

Рыжиков Сергей Борисович

Развитие исследовательских компетенций школьников при выполнении исследовательских работ по физике с использованием численного моделирования

Москва «Школа будущего» 2012 УДК 37.02 : 376.5 ББК 74.262.22

P 93

Рецензенты:

В. А. Макаров, доктор физико-математических наук, профессор, директор Международного учебно-научного лазерного центра МГУ им. М.В. Ломоносова

Д. А. Исаев, доктор педагогических наук, профессор, декан факультета физики и информационных технологий МПГУ

Рыжиков С. Б.

Развитие исследовательских компетенций школьников при выполнении исследовательских работ по физике с использованием численного моделирования: монография / С. Б Рыжиков. — Москва Изд-во: «Школа Будущего», 2012. — 232 с.

ISBN 5-94389-015-7

Монография посвящена одной из актуальных в педагогике проблем развитию исследовательских способностей одаренных школьников. В работе раскрыты методические аспекты проектно-исследовательской деятельности школьников, приведены конкретные направления, по которым могут быть выполнены проектно-исследовательские работы. Показано, что наибольшая эффективность исследовательской деятельности достигается, когда в работе присутствуют расчетная и экспериментальная составляющие. Предложена простейшим позволяющим методика обучения численным методам, рассчитывать весьма сложные задачи. Показано, что для освоения численных необязательно знание языков программирования, достаточно использования электронных таблиц MS Excel или OpenOffice.org Calc. Приводимые эксперименты не требуют дорогостоящего специализированного оборудования и могут быть воспроизведены в любой школе. Книга рассчитана на учителей физики, преподавателей и студентов педагогических вузов.

Я слышу и забываю. Я вижу и запоминаю. Я делаю и постигаю. (Китайская пословица)

Введение

В настоящее время уже стало общепризнанным необходимость перехода к новой парадигмы в образовании – от заучивания определенного объема информации (к тому же постоянно устаревающей) к умению в дальнейшем приобретать необходимые знания самостоятельно [15, 17, 23, 35, 56, 75, 81, 88, 118, 129, 150, 178, 181]. В послании к Федеральному собранию РФ 12 ноября 2009 г. Д.А. Медведев отметил, что главная задача современной школы – это раскрытие способностей каждого ученика, личности. готовой жизни B высокотехнологичном К конкурентном мире, чтобы выпускники могли самостоятельно ставить и достигать серьезные цели, уметь реагировать на разные жизненные ситуации [119]. ЭТИМ актуальной задачей связи является исследовательских компетенций школьников по различным предметам в соответствии с их интересами, в том числе в области физики.

Обучение физике можно разделить на следующие формы:

- изучение теоретического материала (уроки в школе, научно-популярные лекции, чтение литературы, изучение материалов образовательных интернетсайтов)
- решение теоретических задач (как стандартных, так и повышенной сложности);
- выполнение практических (лабораторных) работ;
- проведение проектно-исследовательских работ, которые могут включать как теоретическую, так и экспериментальную составляющую.

В настоящее время выполнению проектно-исследовательских работ школьниками всех возрастных групп уделяется большое внимание, результаты этих работ докладываются на региональных, всероссийских и международных конкурсах (конференциях) проектно-исследовательских работ школьников [38, 46, 52, 60, 68, 73, 87, 89, 105, 125, 140, 154, 171, 190, 216, 229]. Большое внимание проектно-исследовательским работам уделяется не только в России, но и во всех ведущих индустриальных странах [2, 22, 48, 49, 81, 115, 139,151, 221].

Хотя имеются некоторые разногласия в терминологии, большинство авторов разделяют проектные, исследовательские, учебно-исследовательские и научно-исследовательские виды деятельности [26, 54, 80, 85, 86, 98, 99, 123, 131, 133, 141, 142, 175, 191, 219, 222]. Под проектами обычно понимают любую деятельность учащихся, в результате которой возникает новый

продукт: это может быть создание стенгазеты, компьютерной презентации, программы, разработка фантастических проектов по освоению Луны и т.п. Хотя важную роль самостоятельных исследований учеников отводили еще в античности и в Новое время [208, 209, 210, 211, 212], считается, что метод проектов, как совместная деятельность ученика и учителя по поиску решения проблем был разработан в начале XX века американским педагогом Дж. Дьюи [75, 85, 143]. В России приметно в то же время этот метод активно использовал педагог С.Т. Шацкий [85, 143]. Под исследовательской работой школьника понимается более узкий вид деятельности, связанный с получением новой информации, один из видов познавательной деятельности человека [12, 26, 114, 134, 175, 185].

В наибольшей степени развитию исследовательских компетенций способствует проведение исследовательских работ [29, 69, 75, 80, 90, 106, 121, 124, 175, 176, 188]. Это обусловлено прежде всего тем, что при проведении исследовательских работ школьник не связан прокрустовыми рамками условий стандартных задач, где в явном или неявном виде ему уже заданы модельные предположения, и точными указаниями хода выполнения лабораторной работы. Поэтому, планируя и проводя подобные работы, имеет определенную степень свободы, необходимую для творчества. Школьник может сам выбрать себе тему, при необходимости ее скорректировать в ходе работы, определить объект исследования, выбрать модельные предположения и т.д. В результате он приобретает навыки работы с литературными источниками, интерпретации, классификации, обобщения полученной информации. Школьник учится планировать и проводить физические эксперименты, обрабатывать полученные данные, делать на их основании выводы. Докладывая о результатах работы в классе или на конференции школьных работ, ученик получает навык публичных выступлений. образам, приобретает компетенции Таким школьник «взрослых» ученых-исследователей, которые будут необходимы в его дальнейшей деятельности, если он после школы выберет обучение в техническом или естественнонаучном вузе [57, 73, 76, 95, 100, 106, 141, 162, 176, 177, 184, 196].

По уровню сложности исследовательскую деятельность можно условно разделить на три уровня.

Первый уровень (начальный) — школьник получает субъективно новую информацию, т.е. он изучает явления, которые еще не изучались в классе. На этом этапе исследование можно проводить в виде фронтальной лабораторной работы, учитывая при этом существенную разницу между обычной (стандартной) лабораторной работой, где школьнику заранее указывается ход работы и исследовательской работой и, где у школьника существует определенная свобода действий [1, 3, 7, 8, 26, 56, 75, 83, 108, 130,

149, 220, 228]. Выполняемые задания при этом не отличается особенной сложностью, например ученики могут исследовать процесс закипания воды или измерять коэффициент трения [34, 92].

Второй уровень — школьник получает субъективно новую информацию, но при этом эту информацию нельзя получить из школьного учебника. Проведение подобных работ в большей степени дает школьнику представление о научной работе, чем получение примитивной информации в работах первого уровня. К сожалению, проводить подобные работы можно только индивидуально или небольшими группами [7, 12, 73, 76, 79, 80, 88, 91, 98, 102, 123, 125, 132, 154, 171, 185, 190].

Следует иметь в виду, что хотя при выполнении работ второго уровня школьник не открывает, а всего лишь «переоткрывает» физические закономерности, но тем не менее он действует как настоящий «взрослый» исследователь [26, 35, 76, 80, 89, 93, 98, 123, 151, 152, 175, 176].

Третий уровень – школьник получает объективно новую научную информацию. Число работ третьего уровня намного меньше, чем первого и второго. Обычно такие работы проводятся в лабораториях НИИ или вузов под руководством научных сотрудников. Как правило, проводятся учениками школ, являющимися «базовыми» школами при соответствующих институтах (например, лицей 1511 при МИФИ, 1189 при Курчатовском, 1580 при МГТУ им Э.Н. Баумана... и т. п.). К несомненным работ этих достоинствам относится TO, что школьник получает представление о работе современной научной лаборатории, профориентацию, знакомится с возможным местом своей будущей работы [16, 69, 70, 83, 96, 106, 139, 196]. Однако, опыт работы в жюри Московских городских и всероссийских конкурсах проектно-исследовательских работ показывает, что поскольку работой школьника руководит не педагог, а научный сотрудник (или его аспирант), то во многом страдает само обучение. Школьник, работая на дорогостоящем современном физическом приборе, не всегда хорошо представляет физические принципы его функционирования. Бывали случаи, когда личный вклад школьника ограничивался тем, что ему «разрешили нажать вторую кнопку справа». Само же выполнение работы при этом зачастую регламентировано еще жестче, чем обычная школьная лабораторная работа, так что, несмотря на то, что в ходе работы иногда получаются интересные научные результаты, исследовательская составляющая работы школьника может отсутствовать. Сделанное замечание иногда справедливо при работе школьника на дорогостоящем школьном оборудовании, например, цифровой лаборатории «Архимед». Опыт работы в жюри показывает, что, проведя работу в лаборатории «Архимед», школьник зачастую не имеет представления о точности полученных результатов и методах их обработки. Вместе с тем встречаются прекрасно выполненные работы, когда школьник разобрался с постановкой проблемы, успешно освоил экспериментальную методику и математические методы обработки результатов [27, 57, 106, 140, 141]. Остается только надеяться, что число таких работ будет расти.

Как уже было отмечено выше, выполнение работ третьего уровня доступно в основном школьникам, обучающихся в лицеях при вузах или НИИ, а сами работы выполняются в научных лабораториях. К сожалению, большинство школьников лишены такой возможности, и выполняют проектно-исследовательские работы в своей школе. Возникает вопрос, как организовать исследовательские работы в условиях средней школы?

Несмотря на некоторое различие в подходах к этому вопросу, можно выделить основные проблемы, возникающие при выполнении исследовательских работ и пути их решения, на чем мы остановимся в первой главе.

Глава 1

Общие принципы отбора школьников, выбора темы и проведения индивидуально-групповых исследовательских работ

1.1. Особенности проведения исследовательских работ по сравнению с другими формами обучения

Выполнения исследовательских работ имеет несколько особенностей, существенно затрудняющих их проведение по сравнению с другими формами обучения [3, 7, 26, 52, 64, 76, 80, 95, 98, 104, 125, 132, 154, 171, 174, 175, 185, 204, 217, 229].

- 1) Время выполнения. Выполнение исследовательской работы занимает несколько недель, а иногда и месяцев. Кроме того, первые результаты работы могут появиться нескоро, только через несколько занятий. Это существенно отличает исследовательские работы от других форм обучения. Когда школьник учится решать задачи, то к концу урока он уже способен научиться решать задачи рассматриваемого типа, при выполнении лабораторной работы, он получает результаты уже в конце рабочего дня. При выполнении исследовательской работы от школьника требуется много терпения. К сожалению, случаи, когда, с энтузиазмом начав выполнять работу, школьники «сходил с дистанции». Поэтому желательно, чтобы первые результаты получались уже через 2-3 занятия, на большее время терпения может не хватить.
- 2) Выбор темы. Для успешного выполнения работы необходимо, чтобы
- тема исследования должна быть интересна школьнику;
- работа по этой теме должна быть выполнима.

В связи с этим возникает проблема: если тему формулирует руководитель, то у школьника может остаться ощущение не свободы в выборе темы. При этом также теряется важнейшая составляющая исследовательской деятельности — умение наблюдать за физическими явлениями, поскольку многие темы возникают из наблюдений школьника за окружающим миром природы и техники [33, 93, 100, 102, 145, 171, 186, 204, 216, 223]. Если тему предлагает школьник, то, как показывает опыт, она редко бывает выполнимой. Кроме того, обычно школьник не в состоянии сформулировать тему исследования, поскольку он ранее таких исследований не проводил и плохо понимает, как это делается. Предлагать темы на выбор также не является выходом из положения, поскольку по названию темы

школьник не может оценить трудоемкость темы и ценность ожидаемых результатов [71, 82, 102, 132, 148, 222, 223].

Поэтому оптимально, чтобы выбор темы был результатом совместных усилий ученика и руководителя. Например, ученик может указать общее направление своих интересов (тепловые машины, оптические явления, аэродинамика и пр.), а руководитель уже подсказывает как может звучать тема исследования. Если у школьника есть желание «сделать чтонибудь интересное», но нет никаких идей, то можно предложить поискать интересующую его тему в научно-популярной литературе, где описано большое число занимательных экспериментов и интересных наблюдений, связанных с проявлением физических явлений в повседневной жизни [11, 40, 44, 47, 113, 135, 136, 198].

3) **Отбор школьников.** Опыт показывает, что число школьников, готовых тратить свои силы и внеучебное время на выполнение исследовательских работ относительно невелико. Кроме того, следует учесть, что школьники 10 и 11-го классов усиленно готовятся к ЕГЭ, поэтому вовлекать школьников в исследовательскую деятельность в области физики желательно с 7-го класса – с момента начала изучения предмета физики. Если школьник изучает физику в более раннем возрасте, например, в кружке, то можно вовлекать его в исследовательскую деятельность с момента, когда он приходит в кружок [1, 3, 38, 52, 65, 67, 71, 96, 98, 100, 139, 145, 178, 182, 204, 218].

Одним из способов вовлечения детей является организация исследовательских работ в системе дополнительного образования: в школьных кружках, дворцах детского творчества, научных обществах учащихся (НОУ) и т.п. [7, 12, , 27, 68, 139, 141, 142, 174, 195, 196, 207, 213]. Заинтересованные школьники приходят в кружок, наблюдают за работой старших учеников, принимают участие в их исследованиях, а затем переходят к самостоятельным работам. Некоторые школьники начинают заниматься исследовательской деятельностью после выступления (или в процессе подготовки) на Турнире юных физиков [55, 57, 106, 184]

Возможен поэтапный вариант отбора. На первом этапе школьники приходят в кружок (на элективный курс) по решению задач повышенной сложности или просто кружок занимательной физики. По мере обучения в кружке у них могут появляться вопросы, которые выходят за рамки подготовки к решению к олимпиадным задачам, требуют изучения дополнительной литературы. Впоследствии, если интерес к проблеме развивается, то школьник может захотеть провести самостоятельное исследование по заинтересовавшей его теме. Подобный метод отбора школьников используется автором и некоторыми его коллегами в лицее «Вторая школа» [154, 171], о чем будет подробнее рассказано ниже.

1.2. Особенности построения курса в условиях летних школ

При выполнении исследовательских работ в летних школах возникают дополнительные проблемы.

- 1) Летние школы продолжаются непродолжительное время, редко более трех недель, поэтому времени «на раскачку» нет.
- 2) В летнюю школу невозможно вывести много оборудования для демонстрационных экспериментов и практических работ.
- 3) В летней школе обычно число компьютеров ограничено и нет возможности предложить школьникам произвести обработку экспериментов на домашнем компьютере.

Поэтому в условиях летней школы сложно провести полноценную исследовательскую работу и стоит ориентироваться лишь на то, чтобы такую работу хотя бы начать, обсудить тему или общее направление исследования, а работу можно доделать уже в течение учебного года, проводя очное или дистанционное руководство школьником [166, 169].

1.3. Общие рекомендации по планированию исследовательской работы от постановки задачи до подготовки доклада на конференции

Выбор темы. При всем многообразии тем исследовательских работ существует единое требование для этих тем: работа должна быть «обречена на успех». То есть, если ученик не бросает работу посредине пути, а выполняет указания руководителя, то у него должен быть набран материал для выступления на конференции. Если школьник в результате работы не положительные стороны получает результатов, TO исследовательской работы могут стать отрицательными. Действительно, у него перед глазами будет пример, что его сверстники выполняют работы и у них все получилось, а у него – нет. Ему остается думать, что он – неудачник, и, вместо того, чтобы ощутить радость творчества, у него может возникнуть боязнь к исследовательской деятельности. Поэтому лучше ставить простые, но заведомо выполнимые задачи, чем дать важную и актуальную, но рискованную тему работы [25, 100, 102, 103, 104, 139, 144, 148, 171, 189, 223].

Число участников исследовательской работы. Исследовательские работы могут проводиться как индивидуально, так и группой. Способ проведения сильно зависит от характера ученика. Некоторые с самого начала хотят проводить работу в одиночку — чтобы никто не мешал. Другие, напротив, из боязни остаться «один на один» с учителем или по другим причинам предпочитают работать вдвоем, втроем или небольшой группой [1,

7, 65, 100, 101, 108, 148, 204, 216]. Опыт показывает, что увеличение числа участников нежелательно, поскольку это приводит к тому, что делают работу 1-2 человека, а остальные смотрят. К тому же на конференции жюри обязательно поинтересуются, как были распределены роли между участниками. Руководителю нужно быть готовым к тому, что работу начнут делать 2-3 человека, а затем они захотят делать каждый свою задачу. В этом случае хорошо бы иметь несколько подзадач, чтобы при необходимости предоставить каждому участнику свой фронт работы.

Планирование времени работы. Исследовательская работа — это не движение по заранее намеченному плану, а борьба с постоянно возникающими самыми неожиданными препятствиями [75, 81, 148]. Поэтому в процессе выполнения работы школьник:

- 1) приобретает понимание того, что в процессе проведения исследования происходит постоянная корректировка первоначального плана работы;
- 2) путь к совершенству бесконечен и в любом исследовании существует желание улучшить полученный результат, набрать больше статистики ... и. т. п. Однако нужно в какой-то момент остановиться, чтобы оформить результат и доложить его на конференции или конкурсе школьных работ. Обычно этот момент определяется не объемом выполненного исследования, а временным фактором необходимостью успеть подготовить доклад к конференции [26, 65, 93, 102, 103, 104, 148].

Планирование времени подготовки выступления на конференции.

Следует иметь в виду, что подготовка доклада к школьной конференции (конкурсу) занимает не меньше время, чем проведение самой работы. Более того, если желание получить новый результат является достаточной мотивацией. чтобы «ВДОХНОВИТЬ» школьника провести стендового) исследование, TO подготовка доклада (устного или представляется ему рутинной работой, за которую он берется с большой неохотой.

Подготовка доклада требует много внимания со стороны руководителя, поскольку школьник не имеет опыта выступления. Обычно он волнуется, не может собраться с мыслями и постоянно сбивается. Поэтому школьника необходимо тщательно готовить к выступлению [24, 63, 91, 102, 120, 148, 197].

Опыт выступлений на конференциях показывает, что чтение текста по бумажке вызывает негативное отношение членов жюри. Действительно, невольно возникает вопрос: кто делал работу — школьник или тот, кто писал текст (руководитель). Плохим выходом из положения является заучивание текста выступления. Не редко возникает ситуация, когда ученик читает явно заученный текст доклада (иногда с выражением, а иногда и того хуже —

скороговоркой, лишь бы побыстрее выступить и убежать со сцены), и в какой-то момент он сбивается, останавливается, и просто не может продолжить доклад. После чего жюри вынужденно приходить на помощь докладчику и путем задавания наводящих вопросов выяснить, в чем состояла работа. Естественно, что это сильно портит впечатление о докладчике. Члены жюри в этом случае считают (и часто вполне справедливо), что работа делалась наспех, результаты были получены «в последний момент», и у школьника просто не было времени осознать результаты и подготовить доклад.

Оптимальным представляется дать школьнику план выступления, а затем предоставить возможность сделать доклад своими словами. Возможно, он не уложится в установленное время доклада (на конференциях обычно время устного доклада – 10 мин), у него при этом будут неудачные выражения и даже нарушена логика выступления, но зато у него не будет боязни, что он что-то забудет. Компьютерная презентация или стендовый доклад должны представлять собой краткий конспект доклада, и помогать соблюдать логику рассказа. После написания школьнику руководитель должен многократно его прослушать, постепенно исправляя неудачные места. Не стоит слишком детально поправлять доклад – оптимально, чтобы у школьника выработался его собственный стиль изложения материала, а не был навязан стиль руководителя. Конечно, при этом школьника нужно уберечь от типичных ошибок.

Типичные ошибки при подготовке доклада [63, 91, 93, 102, 148, 162, 197]

Неправильно распределение времени доклада. Жюри больше всего интересует личный вклад каждого участника в работу. Поэтому не стоит много времени тратить на предысторию вопроса: мол, первые исследования по этой теме были сделаны еще в античности... Обычно доклад строится по такому плану:

- 1) обоснование выбора темы (важность, актуальность, причина интереса школьника именно к этой теме) минута, лучше меньше;
- 2) что школьнику известно по этой теме, обоснование новизны работы тоже минута или меньше;
- 3) цель работы, постановка задачи минута или меньше;
- 4) методика эксперимента или методика проведения расчетов 2-3 минуты;
- 5) результаты, полученные школьником при выполнении работы не менее половины отведенного времени;
- 6) выводы, можно кратко рассказать планы по развитию темы работы (особенно для школьников младше 11 класса).

Плохо подобранные цвета презентации. Оптимально предоставить школьникам возможность самим оформить презентацию: выбрать фоновые

рисунки, цвет текста и т. п. Но здесь следует иметь в виду, что цвета презентации на экране при использовании мультимедийного проектора могут отличаться от цветов на дисплее компьютера. Например, на экране компьютера коричневый текст может быть хорошо виден на темно-красном фоне, но на проекторе эти цвета могут сливаться и зрители не смогут прочесть текст. Поэтому желательно использовать контрастные цвета: светлый текст на темном фоне (например, белый или золотистый текст на темно-синем фоне).

Шрифт презентации. На экране дисплея приемлемо виден шрифт 10-й кегли, но на экране даже в небольшой аудитории (в классе) плохо виден даже шрифт 16-й кегли. Поэтому нужно следить, чтобы шрифт был не менее 24-й кегли. Отметим, что *MS Power Point* по умолчанию устанавливает 32-ю кеглю для текста и 44-ю для заголовков.

Чтение слайдов докладчиком. Не нужно читать текст на слайдах, слушатели в аудитории, как правило, читают быстрее, чем говорит докладчик, поэтому чтение теста – это лишняя трата времени. От докладчика ждут комментариев к представленной на слайде информации, а текст слушатели прочитают сами.

Избыток текста. На слайдах не должно быть много текста — это всего лишь конспект для выступления. Чтение текста занимает много времени, гораздо лучше представить результаты в виде графиков.

Оформление графиков. Типичной ошибкой является выбор мелкого шрифта для подписей осей (о размере шрифта см. выше). Также нужно выбирать контрастные цвета линий графика: например, желтый цвет на белом фоне плохо виден. Оси должны быть подписаны с указанием единиц измерения величин. Если график отражает результаты эксперимента, то экспериментальные точки должны быть хорошо видны на графике. Желательно на графике отразить погрешности измерений.

Число слайдов. Число слайдов не должно быть очень велико. В зависимости от количества информации на слайде, для осознания того, что на нем отображено, требуется от 15 с до минуты. Если слайды менять очень часто, то слушатели не успевают понять, что на нем отображено, что уменьшает ценность доклада. Опыт показывает, что для 10 мин. доклада нужно не более 15-20 слайдов. Не нужно стремиться отображать в докладе все результаты измерений и расчетов, а также все формулы, используемые для расчетов. Сотрудники жюри, как правило, люди опытные и прекрасно понимают, что представляемые результаты — это лишь надводная часть айсберга. Имеет смысл представлять лишь наиболее значимые результаты. При желании подчеркнуть какой был проведен большой объем работы, можно отдельно отметить число проведенных измерений.

Список литературы. Отсутствия списка литературы воспринимается жюри как существенный недостаток доклада. Список литературы должен был правильно оформлен. На одной из конференций участник представил список литературы:

- 1. Книги.
- 2. Журналы.
- 3. Интернет.

Жюри поинтересовалось, был ли у автора вообще научный руководитель и видел ли он презентацию.

Ссылки на книги и журналы оформляются, как это принято в научных журналах. Формы представления источников могут немного отличаться, но суть одна — по этим данным источник можно разыскать в библиотеке. При ссылке на интернет необходимо указывать адрес сайта, откуда взят материал. Если это сделать нельзя (текст находится на нескольких страницах, используется вызов приложений и пр.), то нужно указать стартовую страницу сайта.

Оценивание работ

Когда речь идет об оценке за домашнее задание, то вопросов обычно не возникает, поскольку у задачи есть авторское решение и ответ, а учитель. выступая в качестве эксперта, оценивает насколько точно путь решения задачи, выбранный школьником, приводит его к известному ответу. Поскольку при выполнении исследовательской работы 2-го, а тем более 3-го уровня, решение проблемы не известно, то возникает проблема с оцениванием работы. С целью уменьшения субъективности при оценивании работы, необходимо сформировать жюри из педагогов и научных сотрудников. Практика проведения работ показывает, что целесообразно, чтобы жюри оценивало не работу в целом, а каждую из составляющих работы: актуальность темы, выполнение работы (учет личный вклад школьника), подготовка презентации, доклад, ответы на вопросы [3, 26, 64, 91, 95, 101, 190, 195, 203, 214]. В любом случае важно помнить, что проведение исследовательской работы должно стимулировать интерес школьника к изучению науки, поэтому жюри должно быть максимально доброжелательно к докладчику. Поэтому на некоторых Всероссийских конференциях нет распределения по местам: кому-то достанется первое место, а как будут чувствовать себя остальные участники? Дипломы получают все участники, но жюри особо отмечает некоторые доклады за интересную тему, за красиво оформленную презентацию и т.п. (см. правила проведения Всероссийской конференции «Авангард» http://conferenceavangard.ru).. Тем более такую практику имеет смысл применять на конференциях школьного и городского уровня.

1.4. Применение численных методов для решения задач повышенной сложности и выполнения индивидуально-групповых исследовательских работ

Американский педагог и психолог Дж. Брунер отмечал, что «Школьник, изучающий физику, является физиком, и для него легче изучать науку, действуя подобно учёному — физику...» [80]. Важнейшей составляющей частью эксперимента является обработка данных, кроме того современный эксперимент стоит настолько дорого, что никто не будет проводить его «вслепую», не проведя предварительных расчетов, что может получиться в результате. Поэтому при проведении исследовательских работ второго уровня желательно не только получить какие-то результаты, но провести предварительное планирование эксперимента.

Возникает вопрос: как это сделать, если математический аппарат школьников не позволяет делать сложные вычисления? Кроме того, следует учесть, что ученики 10-х и 11-х классов обычно озабочены усиленной подготовкой к ЕГЭ, и у них остается не очень много времени на выполнение исследовательских работ. Поэтому при проведении исследовательских работ приходится ориентироваться на учеников 7–9-х классов, познания которых в математике совсем невелики. В результате может создаться впечатление, что школьники не могут выполнять исследовательские работы, связанные со сложными расчетами.

Но, к счастью, есть другой способ решения задач. Вместо оперирования со сложными формулами можно использовать *численные методы*, которые сегодня широко применяются в науке и технике. Благодаря численным методам школьники могут решать задачи, которые без численного подхода показались бы просто не решаемыми. Численные методы изучаются студентами в вузах технического и естественнонаучного профиля. Но для освоения простейших численных методов достаточно знаний, которые есть у 7-ми классников.

К сожалению, в настоящее время численные методы практически не изучаются в школе и, несмотря на огромное количество книг по данной тематике для студентов вузов [14, 72, 153, 180], существует очень немного учебных пособий по численным методам, адаптированных для школьников [18, 42, 127, 157, 160]. Отчасти, это связано с тем, что применение численных методов возможно только при наличии компьютеров, которые появились в школе относительно недавно. Другая сложность изучения численных методов состоит в том, что, несмотря на то, что компьютеры сегодня пришли почти в каждый дом, программировать на них умеют далеко не все. Поэтому предложенные в настоящей книге направления исследовательских работ разделены на два уровня сложности.

Первый уровень сложности (задачи, разбираемые в книге) не требует от школьников знания языков программирования. Все расчеты могут быть произведены с использованием электронной таблицы MS Excel или ее аналога Open Office.org Calc. Используемые в настоящее время расширенные возможности этих таблиц типа надстройки «Поиск решения» и т.п., вряд ли можно рекомендовать школьникам, поскольку:

- 1) алгоритм работы этой и подобных надстроек скрыт от пользователя и школьник не сможет понять, как именно компьютер получил ответ;
- 2) освоение работы этих настроек не проще, чем изучение языков программирования.

Второй уровень сложности исследовательских работ (предлагаемых в конце 2, 3 и 4 главы) предполагает, что школьники знакомы хотя бы с основами языков программирования. Опыт показывает, что современные учебные языки программирования Basic или Pascal (Delphi) имеют достаточно простой интерфейс и при проведении индивидуально-групповых занятий можно за 2–3 занятия дать основы языка в объеме, достаточном для программирования предлагаемых алгоритмов.

Следует специально подчеркнуть, что автор не сторонник того, чтобы численными методами решались все задачи подряд. Численный подход оправдан, если он используется применительно к задачам повышенной трудности, которые на школьном уровне решить либо чрезвычайно сложно, либо вовсе нельзя. Тем более оправдано применение численных методов для проведения сложных расчетов при выполнении исследовательских работ.

Применение компьютеров для обработки результатов экспериментов уже давно с успехом применяется в школе [45, 109, 110, 128, 138, 193]. Однако численные методы могут дать гораздо больше — они позволяют моделировать эксперимент. Но здесь нужно быть осторожным в терминологии и не путать моделирование эксперимента с помощью компьютера и компьютерного моделирования.

1.5. Различие компьютерного моделирования и численного моделирования

В последнее время появилось большое число работ, посвященных компьютерному моделированию, пол которым часто понимается использование школьниками компьютерных программ, позволяющих изменять начальные параметры задачи, после чего программа рассчитывает конечный результат. Таким образом школьник может рассчитать дальность полета тела, брошенного под углом к горизонту, напряжение на резисторе или ход лучей в оптической системе [5, 10, 37, 62, 79]. Компьютерное моделирование или виртуальный эксперимент представляет собой совсем другой способ обучения физике с другими конечными целями. Применение виртуального эксперимента применяется в основном когда нет возможности провести натурный эксперимент (из-за отсутствия оборудования или др. причинам) или в качестве подготовку к проведению лабораторной работе [41, 128, 215]. Главная проблема заключается в том. что программы пишут не школьники и вычислительный алгоритм либо скрыт от них, либо требует специального изучения. При выполнении исследовательских работ с использованием численных методов школьник сначала изучает алгоритмы, а затем применяет их к предмету своего исследования [155, 157, 158, 160, 171].

Однако здесь существует другая крайность, когда исследование ограничивается только численными расчетами (вычислительным Школьники уже привыкли, что получить на экране экспериментом). компьютера, как и на меловой доске можно все что угодно. Поэтому чисто вычислительный эксперимент редко интересен школьникам. вытекают критерии подбора задач: желательно, чтобы расчеты либо подкреплялись аналитическими вычислениями (глава 2), либо опирались на хорошо известные опытные факты (глава 3), либо школьники могли их проверить экспериментально (глава 4). Знакомство с численными методами даст школьникам мощный инструмент для решения задач повышенной сложности и проведения самостоятельных исследовательских работ.

анализа литературы автор использовал факультативного курса, который был разработан автором и проводился на протяжении нескольких лет в лицее «Вторая школа» для учеников 7 – 9 классов, а так же курсов, прочитанных автором в летних школах. Среди слушателей этих курсов были отобраны учащиеся, выполнявшие исследовательские работы, многие из которых были доложены региональных всероссийских конференциях школьных проектноисследовательских работ.

1.6. Методика отбора школьников для проведения исследовательских работ с применением компьютерного моделирования

Как уже отмечалось выше, школьников, желающих выполнять исследовательские работы 2-го и 3-го уровня относительно невелико. Поскольку в школе численные методы не изучаются, то найти школьников, желающих выполнять исследовательские работы с применением численных методов еще сложнее. Поэтому была выработана методика отбора школьников для проведения исследовательских работ с применением

численных методов, применяющаяся в лицее «Вторая школа» и в Вечерней физической школе при физическом факультете МГУ им. М.В. Ломоносова.

Первый этап. В начале учебного года объявляется факультативный курс по решению олимпиадных задач (задач повышенной сложности) по физике. На него ходят одаренные школьники, имеющие высокую мотивацию обучения физике и желающие хорошо выступить на олимпиалах по физике разных уровней. В этом курсе при решении некоторых сложных задач в эвристического численные качестве метода даются метолы. пользоваться компьютером и даже программируемым калькулятором на олимпиадах по физике не разрешается, для домашнего анализа некоторых задач полезно получить ответ в численном виде, поскольку знание ответа может помочь в поиске решения задачи. Примеры решения задач повышенной сложности численными методами приведены во второй главе.

Поскольку школьники редко умеют программировать, то на этом этапе численное решение задач производится с помощью электронной таблицы MS Excel или Open Office.org Calc. При этом на каждом занятии часть времени нужно отводить на объяснение того, как работать с электронными таблицами. При отсутствии возможности работы в дисплейном классе, можно ограничиться одним компьютером учителя, на котором показывается какие формулы нужно заводить в электронные таблицы, с тем, чтобы дома ученики на своих компьютерах воспроизвели то, что делалось в классе.

Второй этап. После 4-5 занятий отбираются школьники, заинтересовавшиеся методом численного решения задач на компьютере. С ними продолжается решение численными методами задач повышенной сложности, при этом уже предлагаются задачи, которые не могут быть решены аналитически на школьном уровне. На этом этапе можно ограничиться электронными таблицами, однако уже можно предложить школьникам начать осваивать какой-нибудь язык программирования, например, *Basic* или *Pascal* (*Delphi*).

Третий этап. Опыт показывает, что через несколько занятий у школьников возникает желание развить одну из предложенных задач в тему исследовательской работы. После этого начинается третий этап, когда формируются рабочие группы, в которых школьники индивидуально или группой (2-3 человека) проводят исследование заинтересовавшей их проблемы.

Предлагаемая схема отбора учеников позволяет частично решить указанные выше проблемы. Проблема, связанная с длительностью промежутка времени от начала выполнения работы до получения первых результатов, решается тем, что еще до начала выполнения исследовательской работы школьники численными методами решают некоторое количество

задач. В процессе работы задачи постепенно усложняются, при этом можно подбирать промежуточные задачи так, чтобы школьник почти на каждом занятий мог получать промежуточные результаты. Проблема, связанная с выбором темы, решается тем, что школьник решает задачи, похожие (хотя и более простые) на те, которые он будет решать в процессе исследовательской работы, и потому он получает представление о трудности задач, объеме работы и ожидаемых результатах.

Рассмотрим детальнее методику применение численных методов для проведения исследовательских работ.

Глава 2

Численное моделирование с помощью электронных таблиц задач повышенной сложности, не выходящих за рамки школьной программы

2.1. Постановка задачи описания движения в кинематике

Кинематика — это раздел физики, посвященный описанию движения тел без указания причин, вызвавших это движение. Построение курса физики традиционно начинается с кинематики [78, 137, 194, 201, 224, 200, 206]. Это обусловлено, по крайней мере, двумя причинами. Во-первых, это самый простой раздел физики, который может быть усвоен даже школьниками 7-го класса. Во-вторых, без умения описывать движение невозможно изучение других разделов механики.

Описание положения тела, тригонометрические функции

Положение тела – материальной точки в пространстве можно выразить в различных системах координат. Наиболее употребительной является декартова (прямоугольная) система координат (если речь не идет об астрономических наблюдениях, где более употребительна сферическая система координат), и обучение кинематике начинается с описания положения и перемещения точки в декартовой системе координат. Чтобы найти координаты тела, необходимо знание тригонометрических функций синус и косинус. К сожалению, в 7-м классе школьники еще не изучают функции синус и косинус, а в 8-м классе, даже если школьники знают эти функции, еще не умеют ими уверенно оперировать. Поэтому начинать занятия приходится с того, чтобы учить школьников пользоваться этими функциями. В геометрии синус и косинус вводятся как отношение сторон прямоугольного треугольника. Однако, это позволяет оперировать только углами от 0 до 90°. При расчете проекции радиус-вектора на оси приходится использовать углы от 0 до 360° (или от -180° до 180° . Поэтому требуется вводить синус и косинус через тригонометрический круг [167].

Кроме того, функции синус и косинус во всех языках программирования и в электронных таблицах MS Excel или Open Office.org Calc используют в качестве аргументов не градусы, а радианы. Поэтому школьникам также приходится объяснять перевод градусы в радианы. Таким образом, большую часть первого занятия приходится отводить на объяснения функций синус и косинус, а также на ввод единиц измерения углов – радианы.

Прямая и обратная задача кинематики

Кинематика изучает перемещение тела. Поэтому кроме описания положения тела в пространстве необходимо описывать изменение этого положения. Для этого вводятся понятия скорости и ускорения. Нахождение скорости и ускорения тела, по известному закону изменения положения тела со временем является прямой задачей кинематики, а нахождение координат тела по известному закону изменения его скорости и ускорения является обратной задачей кинематики. Поскольку при введении понятий скорости и ускорения может быть некоторая путаница, то лучше потратить некоторое время, чтобы быть уверенным, что школьники правильно понимают эти понятия, чтобы в дальнейшем к этому вопросу не возвращаться.

2.1.1. Исторический аспект - апории Зенона как постановка проблемы описания движения

Движенья нет, сказал мудрец брадатый. Другой смолчал и стал пред ним ходить. Сильнее он не смог бы возразить; Хвалили все ответ замысловатый. Но, господа, забавный случай сей Другой пример на память мне приводит: Ведь каждый день пред нами Солнце ходит, Однако ж прав упрямый Галилей.

А.С. Пушкин

Объяснение понятия мгновенной скорости школьникам 7-8 класса представляет собой серьезную проблему [194]. С одной стороны, поскольку школьники 7-10 классов не знают производных, им невозможно строго ввести понятие мгновенной скорости как производную перемещения по времени. С другой стороны, понятие скорости знакомо школьникам из повседневной жизни, и возникает некоторая путаница в связи с тем, что в механике под общим термином «скорость» объединяются несколько разных понятий [194, 200, 224]:

- скалярная скорость равномерного прямолинейного движения;
- векторная скорость равномерного прямолинейного движения;
- средняя скалярная скорость;
- средняя векторная скорость;
- мгновенная скалярная скорость;
- мгновенная векторная скорость;
- угловая скорость.

Понятие мгновенной скорости является сложным для понимания, поскольку речь идет о скорости в данный момент времени. К сожалению, при

изучении курса кинематики ей не уделяют должного внимания, а неправильное понимание понятия мгновенной скорости приводит к ошибкам.

Прежде чем ввести понятие мгновенной скорости, целесообразно подвести школьников к пониманию того, зачем она нужна. Начать разговор о мгновенной скорости можно с получения парадоксальной ситуации, из которой невозможно выйти без понятия мгновенной скорости. Исторически первой эту проблему поднял Зенон Элейский в своих апориях (от греческого слова «порос» – «выход» и стоящей перед ним отрицательной частицы «а»; так что буквально «апория» означает «безвыходное положение»; можно также перевести это слово как «затруднение», «задача» или «загадка») [84, 157, 227].

Рассмотрим апорию «Стрела». Где летит стрела? Стрела летит либо там, где она есть, либо там, где ее нет, третьего не дано (школьники обычно с этим легко соглашаются). Но стрела не может лететь, где ее нет (школьники с этим тоже соглашаются). Остается, что стрела летит там, где она есть. Но стрела не может лететь там, где она есть, в этом месте она может только покоиться. Вывод: стрела не может лететь.

После того, как получен этот вывод, школьники обычно переходят в режим ожидания, что учитель объяснит, в чем тут дело. Понятно, что Зенон видел, как ходят люди и летят стрелы. Он жил в V веке до н. э., и был, наверное, первым, кто попытался описать движение, как бы мы сказали, математически и первым понял, что сделать это совсем не просто. Далее перед школьниками ставиться вопрос: можно ли говорить о скорости в данный момент времени? Обычно после рассказа апории Зенона школьники дают ответ, что мы можем говорить про скорость за любой малый промежуток времени, но нельзя говорить про скорость в данный момент времени. Если следует такой ответ, то нужно тратить время на аккуратное введение понятия мгновенной скорости, которую корректно на школьном уровне можно ввести только через графическое описание движения [224].

2.1.2. Графическое описание движения

Использование графиков является удобным и широко используемым приемом решения физических задач: [20, 21, 74, 94, 157, 194, 224]. Для графического описания движения чаще всего используют следующие графики:

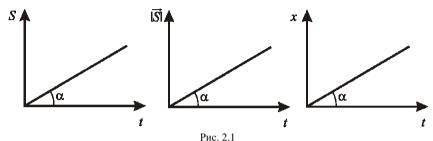
- зависимость одной координаты движения от другой (траектория движения);
- зависимость координаты движения от времени;
- зависимость модуля перемещения от времени;
- зависимость пути от времени;
- зависимость скорости (или проекции скорости) от времени;

- зависимость ускорения (или проекции ускорения) от времени.

Существуют и другие возможности описания движения, о чем речь пойдет ниже.

Начинать рассмотрения нужно с наиболее простого вида движения – равномерного прямолинейного движения. На рис. 2.1 для равномерного прямолинейного движения представлены зависимости:

- а) пути от времени;
- б) модуля перемещения от времени;
- в) координаты от времени.



Графики равномерного движения

Хотя все графики имеют совершенно одинаковый вид, значения угловых коэффициентов (числено равных тангенсу углов наклона α) имеют различный физический смысл. Для графика слева — это скалярная скорость тела, для графика в центре — это модуль векторной скорости тела, для графика справа — это проекция скорости тела на ось x.

Рассмотрим теперь неравномерное движение тела. Для примера выберем зависимость пути от времени (рис. 2.2). Для школьников обычно не составляет большой сложности понять, что средняя скорость на интервале AB численно равна угловому коэффициенту прямой CD (равна тангенсу углу наклона α).

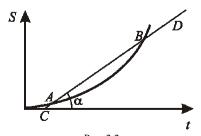


Рис. 2.2 Вычисление средней скорости

Вместе с тем понятие средней скорости не так просто как может показаться с первого взгляда [194]. Если школьники еще не познакомились на основных уроках со следующей задачей, то ее целесообразно разобрать. Семиклассники ее обычно еще не знают, а восьмиклассникам, даже если она им уже известна, ее лучше напомнить.

Задача о нахождении средней скорости [36 (№1.19), 199 (№ 1.27)]

Пусть имеется две точки (два города, пристани и т.п.) A и B. Пусть скорость движения человека (машины, катера) из A и B равна $v_{\rm l}$, а из B в A равна $v_{\rm l}$. Найти среднюю скорость движения туда и обратно.

Типичная ошибка состоит в том, что среднюю скорость школьники ищут как среднее арифметическое: $v_{cp} = (v_1 + v_2)/2$. Однако в этой задаче имеются два участка пути, равных не по времени, а по длине. Поэтому правильным является ответ, что средняя скорость является средним гармоническим:

$$\frac{1}{v_{cp}} = (\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2})/2 \text{ или } v_{cp} = \frac{2v_1v_2}{v_1 + v_2}. \tag{2.1}$$

После того, как школьники разобрались с понятием средней скорости, можно перейти к объяснению мгновенной скорости.

2.1.3. Введение понятий мгновенной скорости и мгновенного ускорения без использования производных

Школьникам 7–8-х классов понятие скалярной мгновенной скорости можно вполне корректно ввести через касательную к графику зависимости пути от времени [74, 157, 224]. Обычно рассматривается график зависимости пути от времени, выбирается некоторый момент времени t_0 и строится набор интервалов $A_i B$ (рис. 2.3). Затем находится средняя скорость на каждом интервале как значение углового коэффициента соответствующей секущей. А далее вводится мгновенная скалярная скорость как величина углового коэффициента касательной к графику зависимости пути от времени.

Хотя строго это не доказывается, но школьники понимают, что к гладкой (без детального обсуждения, что значит «гладкая») линии в данной точке можно провести только одну касательную. Для нас сейчас даже неважно как именно к данной точке провести касательную. Важно, что мы можем говорить про скорость в данный момент времени. Важнейшим следствием этого является то, что мы можем строить графики зависимости скорости от времени. Если бы у нас была только средняя скорость, нам такие графики построить не удалось, было бы непонятно, как отложить на оси

скорость в данный момент времени.

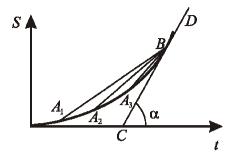


Рис. 2.3 Вычисление мгновенной скорости

Сложнее обстоит дело с понятием мгновенной векторной скорости, поскольку нельзя построить зависимость вектора перемещения от времени. Поэтому для аккуратного определения мгновенной векторной скорости нужно сначала ввести понятие проекции мгновенной векторной скорости как величину углового коэффициента касательной к графику зависимости соответствующей координаты от времени. И уже потом ввести мгновенную векторную скорость как сумму рассчитанных проекций, умноженных на единичные вектора осей координат.

Аналогично, рассмотрев график зависимости проекций скорости от времени, можно ввести понятие векторного мгновенного ускорения.

Понятия мгновенной скорости и ускорения всегда вызывает сложность у школьников. Чтобы в этом убедиться, достаточно задать простой вопрос: чему равна скорость и ускорение вертикально подброшенного тела в верхней точке полета? Стандартный неправильный ответ: в верхней точке полета ускорение равно нулю.

2.1.4. Вычисление координат тела путем численного интегрирования

Кроме касательной к графику полезную информацию можно получить от вычисления площади под графиком. Если применение касательной позволяет обойти понятие производной функции, то площадь под графиком является неявным интегрированием. Опыт показывает, что слова производная, дифференцирование, интегрирование и т. п. лучше не произносить, поскольку они незнакомы школьникам и скорее их пугают, чем помогают освоить материал. Поэтому лучше ограничиться знакомство с приемами вычисления угловых коэффициентов касательных к графику и вычисления площади под графиком.

Для школьников представляется очевидным факт, что при равномерном прямолинейном движении площадь под графиком зависимости скорости от времени численно равна пройденному пути. Далее следует «тонкий» момент. Те, кто знаком с интегрированием понимает, что при неравномерном движении площадь под графиком зависимости скорости от времени также будет численно равна пройденному пути, но школьникам не так легко это представить. Прежде всего, нелегко представить, что время движения можно разбить на бесконечное число бесконечно малых интервалов времени. Этот момент труден для понимания, и его лучше не перескакивать, а остановиться подробнее и разобрать апорию Зенона – «Ахиллес и черепаха».

Апория «Ахиллес и черепаха»

Пусть вначале Ахиллес находится в точке A, а черепаха в точке B_1 (рис. 2.4). Когда Ахиллес добежит до точки B_1 , черепаха успеет проползти вперед до точки B_2 . Ахиллес добежит и до точки B_2 , но черепаха уже будет в точке B_3 . И так далее... Получается, что, какое бы число отрезков Ахиллес не преодолел, он не догонит черепаху [84, 157, 227].

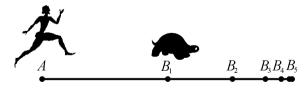


Рис. 2.4 К апории «Ахиллес и черепаха»

Школьникам эти рассуждения представляются странными. Ведь ясно, что быстрый бегун догонит черепаху, для них не является сложным

даже рассчитать, что это произойдет за время:

$$t = \frac{L}{v_{\scriptscriptstyle A} - v},\tag{2.2}$$

где L —начальное расстояние между ними, v_A — скорость Ахиллеса, а v — скорость черепахи. Но, тем не менее, они не могут объяснить, как Ахиллес преодолевает бесконечное число отрезков между ним и черепахой. В качестве альтернативы можно привести другую апории Зенона — «Дихотомия» (греч. «деление»), с соответствии с которой Ахиллес не сможет сделать даже одного шага.

Апория «Дихотомия»

Прежде чем пройти метр, нужно пройти полметра. Но прежде нужно пройти четверть метра. А перед этим нужно пройти 1/8, 1/16, 1/32 ... и т.д. Получается, что бы пройти один метр (или один шаг) нужно пройти бесконечное число отрезков. А разве возможно преодолеть бесконечное число отрезков пути [84, 227]?

Для решения апории «Ахиллес и черепаха» нужно понимать, что, действительно, какое бы конечное число отрезков Ахиллес не преодолел, он не догонит черепаху. Чтобы догнать черепаху ему нужно преодолеть бесконечное число отрезков. К счастью, длина отрезков все время уменьшается, время на ИХ преодоление тоже уменьшается. предложить ученикам это время рассчитать. Пусть вначале между Ахиллесом и черепахой 10 метров, примем для круглого счета скорость черепахи 1 см/с или 0,01 м/с. А скорость Ахиллеса 1 м/с. Первый интервал он преодолеет за 10 секунд. За это время черепаха продвинется на 10 см, т.е. теперь между ними 10 см. Ахиллес преодолеет эти 10 см за 0,1 с. Черепаха продвинется еще на 0,1 см... и т. д. Вычисленные значения интервалов пути и времени полезно занести в таблицу.

No	Время, за которое Ахиллес	За это время черепаха
интервала	преодолеет путь до того	успеет проползти
	места, где была черепаха	
1	10 c	10 см
2	0,1 c	0,1 см
3	0,001 c	0,001 см
4	0,00001 c	0,00001 см
5	0,0000001 c	0,0000001 см
6	0,000000001 c	0,000000001 см

Дальнейший ход объяснений зависит от того, знают ли школьники

геометрическую прогрессию.

Если они знают, что бесконечная сумма вида:

$$a + aq + aq^{2} + aq^{3} + aq^{4} + aq^{5} + \dots$$
, (2.3)

причем q < 1, равна a/(1-q) [117], то дальнейшие рассуждения происходят «в одну строчку»». Ученики 7-го класса геометрическую прогрессию, скорее всего, не знают, и приходится либо доказывать методом математической индукции формулу:

$$a + aq + aq^{2} + aq^{3} + aq^{4} + aq^{5} + \dots + aq^{N} = a\frac{1 - q^{N}}{1 - q},$$
 (2.4)

либо оставлять ее доказательство на уроки математики [117], а ученикам предложить проверить ее правильность для частных случаев на компьютере или калькуляторе.

Затем эту формулу нужно проанализировать, устремив N к бесконечности: $N \to \infty$ (без введения строгого определения предела последовательности). Поскольку q меньше единицы, то при любом N значение q^{N+1} будет меньше q^N , и при $N \to \infty$ значение q^N будет стремиться к нулю. Таким образом, сумма будет равна:

$$a + aq + aq^{2} + aq^{3} + aq^{4} + aq^{5} + \dots = a\frac{1}{1-q}$$
. (2.5)

Далее можно вернуться к задаче с Ахиллесом. У получившейся прогрессии q=0,01 и a=10 с. Значит, Ахиллес пробежит все интервалы за время $a/(1-q)=10/(1-0,01)=10/0,99=10,10101\dots$ с, что совпадает с результатом, полученным по формуле (2.2). Таким образом, школьники получают главный результат; бесконечное число убывающих отрезков пути (или бесконечное число убывающих временных интервалов) можно преодолеть за конечное время, что и является выходом из затруднительного положения (апории) Зенона.

Если учителю представляется, что уровень школьников недостаточен для разбора апории Зенона «Ахиллеса и черепаха», то можно ограничиться разбором апории Зенона «Дихотомия» [84, 227]. Ее решение сводится к нахождению бесконечной суммы:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{2^N} + \dots$$
 (2.6)

Данная задача имеет простую геометрическую интерпретацию – это сумма площадей последовательно разрезаемого единичного квадрата (рис. 2.5). Из построения можно видеть, что:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{2^N} = 1 - \frac{1}{2^N}.$$
 (2.7)

следовательно, сумма (2.6) стремится к единице. Таким образом, на примере апории Зенона «Дихотомия» можно показать, что бесконечное число убывающих слагаемых дает конечную сумму. То есть, Ахиллес может преодолеть бесконечное число убывающих отрезков за конечное время.

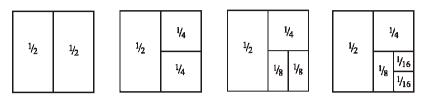


Рис. 2.5 К вычислению суммы геометрической прогрессии

Если время и уровень детей позволяет обсудить понятие предела, то можно заметить, что в этих примерах мы обошли стороной высказанную Зеноном проблему: мы не суммировали бесконечное число слагаемых — это невозможно, а нашли *предел*, к которому эта сумма *стремится*.

Теперь можно перейти к графику зависимости скорости от времени. Если скорость меняется, то движение можно разбить на множество малых отрезков по времени и найти величину пройденного пути как площадь прямоугольника. Остается лишь заметить, что если уменьшать интервалы времени, то сумма бесконечного числа прямоугольников (сумму бесконечного числа слагаемых мы употребляем в том же смысле, что и сумму временных интервалов, пробегаемых Ахиллесом) будет равна площади под графиком, и эта площадь покажет точное значение пройденного телом пути.

Пример решения задачи с использованием площади под графиком

Пройденный материал полезно закрепить конкретным примером. Самый простой пример — это вывод формулы пути, проходимого телом (материальной точки) при равноускоренном прямолинейном движении, который есть в большинстве учебников [194, 224]. Для школьников 7-го класса это будет новым материалом, для старших школьников — это станет очередным повторением. Зависимость скорости от времени при равноускоренном движении будет представлять собой прямую линию (рис. 2.6). Площадь треугольника (трапеции) школьники знают, поэтому они могут вычислить, что путь, пройденный телом равен:

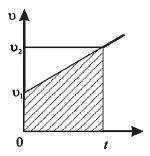


Рис. 2.6 Вычисление пути при равноускоренном движении

$$l = \frac{v_1 + v_2}{2}t = v_1 t + \frac{at^2}{2} . {(2.8)}$$

После рассмотрения стандартной задачи равноускоренного движения можно перейти к решению задач повышенной сложности — исследованию различных видов неравномерных движений.

2.1.5. Разностные схемы для описания движения

В школе рассматривается очень ограниченное число видов движений:

- равномерное по прямой;
- равномерное по окружности;
- равноускоренное;
- гармоническое (колебание маятника).

Математический аппарат школьника позволяет рассчитать еще несколько видов движений (о чем пойдет речь ниже), в остальных случаях нужно прибегать к численному интегрированию (не обязательно произнося слово интегрирование), которое сводится к нахождению площади под кривой. К сожалению, возможности численного расчета движения в школьных учебниках не уделяется должного внимания. Лишь в одном учебнике этому вопросу уделен один параграф без конкретных примеров [200].

Существуют различные способы расчета площади под кривой. Простейшие методы — это разбиение движения на множество малых равных интервалов времени и рассчитываем площадь методом прямоугольников или методом трапеций.

В методе прямоугольников движение представляется в виде

множества равных интервалов времени, на каждом из которых тело движется равномерно. В этом случае путь тела равен (площадь под графиком равна):

$$l = v_1 \Delta t + v_2 \Delta t + \dots + v_{n-1} \Delta t . \tag{2.9}$$

Остается заметить, что разбиение на равные промежутки времени с расчетом площади по формуле (2.9) называется *схемой Эйлера* [72, 180].

Метод прямоугольников является простейшим, но не самым точным методом. Метод трапеций дает более точный результат. Движение представляется в виде множества равных интервалов времени, на каждом из которых тело движется равноускоренно.

В этом случае площадь под графиком равна:

$$l_{1} = \frac{v_{1} + v_{2}}{2} \Delta t + \frac{v_{2} + v_{3}}{2} \Delta t + \dots + \frac{v_{n-1} + v_{n}}{2} \Delta t =$$

$$= (v_{1}/2 + v_{2} + v_{3} + \dots + v_{n-1} + v_{n}/2) \Delta t$$
(2.10)

Легко видеть, что суммы (2.9) и (2.10) отличаются друг от друга на величину:

$$l_1 - l = (v_n - v_1)\Delta t / 2$$
. (2.11)

Понятно, что при уменьшении интервала времени Δt разность между этими суммами уменьшается, и приближается к площади под кривой. Если бы можно было уменьшить интервал Δt до нуля, обе суммы стали бы точно равны площади под кривой. Однако, устремить $\Delta t \to 0$ можно только теоретически, поэтому численные методы всегда дают *приближенный* результат [72].

На этом этапе нужно следить, чтобы у школьников не впадали в две крайности. С одной стороны, не следует думать, что численными методами нужно решать все задачи. Приходится все время напоминать, что численное решение всегда дает *приближенный* ответ. Можно рекомендовать ученикам сначала пытаться решать задачи аналитически, и только в тех случаях, когда это сделать не удается, можно перейти к численным методам.

С другой стороны, школьники могут прийти к заключению, что приближенное решение – это неправильное решение. А раз решить задачу точно нельзя, то незачем получать приближенное, и, следовательно, неправильное решение. Чтобы преодолеть эту крайность, нужно дать представление о сходимости и о точности метода.

2.1.6. Оценка точности численного решения, понятие сходимости

Оценим точность численных расчетов для метода прямоугольников. Пусть тело движется по прямой, причем скорость зависит от времени как показано на рис. 2.7 [157].

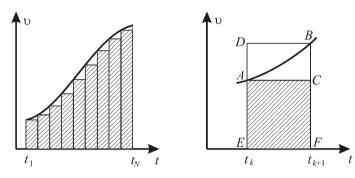


Рис. 2.7. Пояснение схемы Эйлера

Неточность определения перемещения Δx_k , вычисляемого по схеме Эйлера заключается в том, что мы считаем скорость в течение каждого промежутка Δt постоянной, хотя в действительности она меняется. Оценим погрешность вычисления Δx_k (рис. 2.7, справа). За время Δt тело пройдет путь равный площади под кривой AB, т.е. площадь фигуры ABFE. Вычисления по схеме Эйлера дадут значение пути равное площади прямоугольника ACFE. Очевидно, что разность площадей фигуры ABFE и прямоугольника ACFE меньше площади прямоугольника ADBC, равной произведению $|v_{k+1} - v_k| \Delta t$ (разность скоростей берется по модулю, поскольку v_{k+1} может быть как больше, так и меньше v_k , а погрешность всегда положительна). Таким образом, разница между истинным путем, пройденным телом за время Δt , и вычисленным по схеме Эйлера меньше, $|v_{\iota_{\iota_{\iota_{1}}}} - v_{\iota}| \Delta t$. Оценим максимальную суммарную чем погрешность измеренного пути ΔL :

$$\Delta L \le |v_2 - v_1| \Delta t + |v_3 - v_2| \Delta t + \dots + |v_N - v_{N-1}| \Delta t \le \Delta v \cdot N \cdot \Delta t = \Delta v \cdot t , \qquad (2.12)$$

где Δv — максимальное значение всех $\left|v_{k}-v_{k-1}\right|$, t — полное время движения тела. Выразим Δv через ускорение: $\Delta v=a_{\max}\Delta t$, где a_{\max} — модуль максимального ускорения тела за время движения. Окончательно имеем:

$$\Delta L \le a_{\text{max}} \cdot \Delta t \cdot t \ . \tag{2.13}$$

Из (2.13) видно, что чем меньше промежуток времени Δt , тем точнее будет решение. Видно, что погрешность была бы меньше, если бы мы в качестве длины пути вместо площади прямоугольника ACFE брали площадь трапеции ABFE. Однако мы сейчас рассматриваем не самую точную, а самую простую схему. После рассмотрения метода прямоугольников можно перейти к методу трапеций [72].

Заметим, что оценка точности метода занимает иногда целое занятие, но не вызывает особого интереса у школьников, которые пока еще не освоили метод. Поэтому представляется целесообразным сначала дать примеры решения конкретных задач, и лишь когда у школьников возникнут вопросы о точности метода, представить вывод формулы (2.13).

Кроме того полезно исследовать алгоритм на $cxo\partial umocmb$, т.е. смотреть, как решение зависит от значения интервала Δt . Правильно работающий алгоритм при уменьшении интервала Δt должен лишь уточнять полученное значение, не выходя за рамки погрешности. Если известно точное аналитическое решение, то численные расчеты при уменьшении интервала Δt должны сходиться к нему. Если это не происходит, то либо при использовании алгоритма была допущена погрешность, либо точность самого метода недостаточна для решения задачи и нужно использовать другой, более точный алгоритм [72, 157, 180].

2.1.7. Реализация алгоритмов разностных схем на языках программирования

Понятно, что считать десятки, сотни и тысячи сумм слишком трудоемкая задача даже для калькулятора. Поэтому пользоваться схемой Эйлера можно, только реализовав ее в виде компьютерной программы. Общий вид простейшего алгоритма реализации схемы Эйлера для одномерного движения представлен на рис. 2.8. Указанный алгоритм не зависит от языка программирования.

Рассмотрим представленный алгоритм. Вначале задаются начальные условия. Они берутся из условия задачи и определяются начальным состоянием системы: начальной координата тела x_1 и начальным моментом времени t_1 .

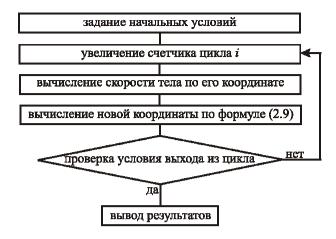


Рис. 2.8. Простейший вариант алгоритма схемы Эйлера

Затем формируется цикл: за один проход цикла программа рассчитывает движение на одном интервале времени. В цикле должны производиться вычисления двух величин. Во-первых, должна вычисляться скорость на n-м интервале v_n . Способ вычисления скорости определяется решаемой задачей, позже это будет обсуждено в приводимых примерах. Вовторых, должен вычисляться путь по схеме Эйлера (2.9):

$$x_{n+1} = x_n + v_{x,n} \Delta t . {(2.14)}$$

Цикл завершается проверкой условия выхода из цикла. Если цель не достигнута, то цикл повторяется. В зависимости от задачи условиями выхода из цикла могут быть:

- максимальное число циклов (время движения);
- прохождение определенного пути;
- достижение определенного значения скорости... и т. д.

Данный алгоритм может быть реализован на любом языке программирования, однако, поскольку скорее всего, не все школьники в классе знают определенный язык, а *MS Excel* (или его аналог *OpenOffice.org* Calc) обычно им известен, то начинать нужно с реализации схемы Эйлера в электронных таблицах.

1.1.8. Реализация алгоритмов разностных схем в электронных таблицах MS Excel и Open Office.org Calc

Указанный алгоритм можно также реализовать с помощью электронной таблицы *MS Excel* или ее свободно распространяемого аналога *Open Office.org Calc*. Электронные таблицы широко используются при решении физических задач [30, 45, 61, 62, 97, 109, 155, 157, 158, 160, 164, 192]. Это вызвано следующими обстоятельствами:

- большинство школьников не знают языков программирования, электронные таблицы видели практически все;
- научить неподготовленного школьника к работе с электронной таблицей можно значительно быстрее, чем дать основы простейших языков программирования;
- электронные таблицы позволяют быстрее получить результат, что имеет существенную роль при планировании времени урока за урок должна быть полностью разобрана задача образец, по образу и подобию которой, школьники смогут дома выполнить аналогичные задачи;
- электронные таблицы позволяют сразу же получить графики зависимости пути от времени, скорости от времени и т.д., написание процедур для построения графиков на языках программирования требует значительных усилий.

Недостатком электронных таблиц можно считать то, что число строк ограничено 32000, что ограничивает проверку сходимости решения, на языках программирования нет проблем выполнить циклы миллионы раз. Однако для разбора большинства задач последнее обстоятельство не является важным, поэтому в дальнейшем все расчеты в этой главы будут проводиться именно с использованием электронных таблиц. Поскольку запись большинства формул в таблицах MS Excel и Open Office.org Calc одинаковы, то они будут приводиться без указания того, для какой из этих таблиц приводятся формулы. Однако, нужно иметь в виду, что некоторые операторы по-разному записываются в англо- и русскоязычной версиях таблицы MS Excel. Эти случаи будут особо оговорены в тексте.

Рассмотрим для примера реализацию алгоритма для расчета равноускоренного движения с постоянным ускорением a. Выберем для примера величину ускорения равной $0,1\,\mathrm{m/c^2}$, а интервал времени равным $0.01\,\mathrm{c}$.

Каждый столбец в таблице рассматривается как массив данных, т.е. как последовательность значений. Каждому шагу цикла по времени будет соответствовать строка. Нам потребуется три массива — времени, скорости и значения пути, следовательно, мы будем использовать три столбца: *А*, *В* и *С*.

Хотя это и не обязательно, но опыт показывает, что полезно первую строку использовать для обозначения столбцов, чтобы школьники в дальнейшем не забыли, что рассчитывается в столбцах.

Во вторую строчку занесем начальные значения: времени – A2=0, скорости – B2=0, пути – C2=0.

При этом ученикам полезно напомнить, что вместе с величиной нужно указывать единицу измерения величины, однако в таблицу нельзя занести « m/c^2 ». Поэтому нужно производить все вычисления в одной системе единиц, лучше всего, в системе СИ, тогда не придется беспокоиться о размерности.

В третью строчку занесем формулы

Ячейка	Формула электронной	Математическая
	таблицы	формула
A3	=A2+0.01	$t_{n+1} = t_n + \Delta t$
В3	=B2+0,1*0,01	$v_{n+1} = v_n + a \cdot \Delta t$
C3	=C2+B2*0,01	$l_{n+1} = l_n + v_n \cdot \Delta t$

Теперь скопируем формулы в нижележащие ячейки. Для этого нужно навести курсор на нижний правый угол ячейки A3, туда, где стоит маленький черный квадратик. При этом курсор превращается в маленьких черный крестик. Далее нажимаем левую кнопку мыши и, не отпуская ее, тянем курсор вниз, пока он не достигнет ячейки с номером 10002. При этом получается возрастающий ряд чисел от 0 до 100 с шагом 0,01. Проводим аналогичные действия для копирования формул из ячеек В3 и С3. При этом в ячейке С10002 появится значение пути 499,95 (м). Таким образом, расчеты на языке Basic и с помощью электронной таблицы дали одинаковые значения. Это следовало ожидать, поскольку в обоих случаях использовался один алгоритм — схема Эйлера [157].

После того, как получен результат, полезно научить учеников строить в электронной таблице графики. Построим, например, график зависимости скорости от времени. Для этого отселектируем столбцы данных, которые мы хотим изобразить на графике, в данном случае, столбцы A и B. Подведем курсор к верху столбца A, там, где написана буква A. Щелкнем левой кнопкой мыши, весь столбец окрашивается в темный цвет. Далее, нажмем клавишу «Ctrl» и, не отпуская ее, наведем курсор на вершину соседнего столбца E и щелкнем левой кнопкой. Теперь окрашены будут уже два столбца. Выберем в меню: «Вставка» — «Диаграмма...» — «Точечная» — «Вид: линии без маркеров». Остальные параметры можно принять по умолчанию и нажать кнопку «Готово». На экране появится график. При

наличии времени на последующих занятиях можно научить школьников подписывать оси, выбирать цвет линий и т.д.

Зависимость скорости от времени при равноускоренном движении представляет прямую линию. Аналогично можно построить зависимость пути от времени. Для этого нужно отселектировать столбцы А и С. Зависимость пути от времени будет представлять собой ветвь параболы. В качестве самостоятельного упражнения можно предложить школьникам подумать, как должна выглядеть зависимость скорости от пути (или пути от скорости), а затем построить эту зависимость.

На том же или на очередном занятии можно также научить школьников изменять ускорение или шаг цикла. Для этого нужно выделить две ячейки, например, D2 и E2 (первая строка используется для наименования столбцов). Пусть в ячейке D2 будет значение интервала времени $(0,01\ c)$, а в E2 — значение ускорения $a\ (0,1\ m/c^2)$. Изменим формулы в ячейках A3 — C3 [157].

Ячейка	Формула электронной	Математическая
	таблицы	формула
A3	=A2+D\$2	$t_{n+1} = t_n + \Delta t$
В3	=B2+E\$2*D\$2	$v_{n+1} = v_n + a \cdot \Delta t$
C3	=C2+B2*D\$2	$l_{n+1} = l_n + v_n \cdot \Delta t$

Знак «\$» означает, что при копировании номер ячейки не меняется. Далее нужно откопировать формулы в ячейках A3 – C3 до 10002 строки. Теперь достаточно изменить значения в ячейках D2 и E2, и мы получим результаты расчета движению тела с другим временем и ускорением.

В качестве самостоятельного упражнения можно предложить школьникам попробовать подставить несколько значений в ячейки D2 и E2, и сравнить полученные значения пути с теоретической формулой. Кроме того, можно рассчитать движение с начальной скоростью, для этого, в ячейку B2 нужно занести значение начальной скорости. Можно также рассчитать равнозамедленное движение, т.е. с движение с отрицательным ускорением. Здесь нужно обратить внимание на то, что, строго говоря, формула (2.9) рассчитывает не путь, а координату тела и пользоваться ею для расчета пути можно только в случае, когда движение происходит без поворотов, т.е. проекция скорости тела не меняет знак [157].

После того, как школьники на примере равноускоренного движения освоили схему Эйлера, можно перейти к более сложным задачам.

2.2. Моделирование одномерного движения

2.2.1. Движение при известной зависимости скорости от времени

Рассмотрим применение схемы Эйлера для расчета движения тела по прямой, когда в явном виде известна зависимость скорости тела от времени.

Задача

Найти путь, пройденный телом (материальной точкой), если скорость зависит от времени по квадратичному закону:

$$v = \beta t^2, \tag{2.15}$$

где β – постоянный коэффициент (чтобы получаемые цифры были реальны, коэффициент β лучше брать порядка 0,001 м/с³).

График зависимости скорости от времени в этом случае будет представлять собой ветвь параболы. Рассмотрение такого движения целесообразно по следующим причинам:

- решение этой задачи не является очевидным для школьника;
- подобное движение не рассматривается в большинстве школьных учебников, не рассматривается также площадь фигуры, ограниченной параболой, и потому школьник не может сразу узнать ответ задачи;
- движение может быть быстро рассчитано по схеме Эйлера;
- задача имеет аналитическое решение, доступное ученикам 7-го класса.

Решение

Рассчитать путь при данном движении можно по аналогии с разобранным в предыдущем пункте примером. Откроем электронную таблицу. Так же, как и в предыдущем примере, для расчета времени, скорости и пути будем использовать три столбца: A, B и C. Занесем начальные значения: времени A2=0, скорости B2=0, пути C2=0, а также значение интервала времени D2=0,01, и значение коэффициента $\beta-E2=0,001$ (м/с³). В электронной таблице придется изменить лишь формулу, задающую скорость тела (напомним, что в электронных таблицах степень числа обозначается символом «^»).

Ячейка	Формула электронной	Математическая
	таблицы	формула
A3	=A2+D\$2	$t_{n+1} = t_n + \Delta t$
В3	=E\$2*A3^2	$v_{n+1} = \beta \cdot t_{n+1}^2$
C3	=C2+B2*D\$2	$l_{n+1} = l_n + \upsilon_n \cdot \Delta t$

Осталось откопировать формулы в нижележащие ячейки до 10002 строки. Общий вид электронной таблицы показан на рис. 2.9. Значение пути находится в ячейке С10002. Расчеты показывают, что за 100 с тело проходит путь 333,283 (м).

	Α	В	С
1	t	٧	Х
2	0	0	0
3	0,01	0,0000001	0
4	0,02	0,0000004	1E-09
-5	0,03	0,0000009	5E-09
6	0,04	0,0000016	1,4E-08
7	0,05	0,0000025	3E-08
8	0,06	0,0000036	5,5E-08
9	0,07	0,0000049	9,1E-08
10	0,08	0,0000064	1,4E-07
9997	99,95	9,9900025	332,7836
9998	99,96	9,9920016	332,8835
9999	99,97	9,9940009	332,9835
10000	99,98	9,9960004	333,0834
10001	99,99	9,9980001	333,1834
10002	100	10	333,2833

Рис. 2.9

Результаты расчетов в электронной таблице

Можно также провести вычисления с использованием метода трапеций. В этом случае формулы в столбце С выглядят следующим образом.

Ячейка	Формула электронной	Математическая
	таблицы	формула
C3	=C2+0,5*(B2+B3)*D\$2	$l_{n+1} = l_n + 0.5 \cdot (\upsilon_n + \upsilon_{n+1}) \cdot \Delta t$

Расчеты методом трапеций дают величину пути 333,333 (м).

Естественно возникает вопрос, какой из этих двух результатов точнее? Если бы эти результаты не с чем было сравнить, то они остались бы только абстрактными числами. К счастью, в этой задаче значение пути можно вычислить аналитически. Для этого нужно, чтобы школьники знали формулу суммы квадратичной прогрессии [117]:

$$S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + N^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6}.$$
 (2.16)

Эта формула доказывается методом математической индукции, а проверить ее правильность для нескольких слагаемых можно на калькуляторе или с помощью электронной таблицы.

Аналитически рассчитать путь тела при данном движении можно следующим образом. Разобьем время движения t на большое число N

интервалов времени $\Delta t = t/N$. На каждом интервале времени движение будем считать равномерным. Тогда путь, пройденный телом, равен:

$$l = v_1 \Delta t + v_2 \Delta t + v_3 \Delta t + \dots + v_N \Delta t = \beta t_1 \Delta t + \beta t_2 \Delta t + \beta t_3 \Delta t \dots + \beta t_N \Delta t, \quad (2.17)$$

где t_i — время, соответствующее началу i-го интервала времени, $t_i = (i-1)\Delta t$. Подставляем:

$$l = \beta \Delta t^{2} \Delta t + \beta \cdot 2^{2} \cdot \Delta t^{2} \Delta t + \beta \cdot 3^{2} \cdot \Delta t^{2} \Delta t \dots + \beta \cdot (N-1)^{2} \cdot \Delta t^{2} \Delta t =$$

$$= \beta \Delta t^{3} \left(1^{2} + 2^{2} + 3^{2} + \dots + (N-1)^{2} \right)$$
(2.18)

Сумму в скобках вычисляем по формуле (2.16):

$$l = \beta \left(\frac{t}{N}\right)^{3} \left(1^{2} + 2^{2} + 3^{2} + \dots + (N-1)^{2}\right) = \beta \frac{t^{3}}{N^{3}} \frac{N(N-1)(2N-1)}{6} =$$

$$= \beta \frac{t^{3}}{3} \left(\frac{N-1}{N}\right) \left(\frac{2N-1}{2N}\right) = \frac{\beta t^{3}}{3} \left(1 - \frac{1}{N}\right) \left(1 - \frac{1}{2N}\right). \tag{2.19}$$

Из последней формулы мы получаем, что при $\Delta t \to 0$ и, соответственно, при $N \to \infty$, путь стремится к значению:

$$l = \frac{\beta t^3}{3}.\tag{2.20}$$

Вычисления по формуле (2.20) для данных нашей задачи дают результат: $l = 0,001 \cdot 100^3 \ / \ 3 = 333.33$ (м). Видно, что метод трапеций ближе к аналитическому значению, но и результат, полученный методом прямоугольников, совпадает с полученным выше численным ответом с точностью 0,015%.

После разбора этой задачи можно предложить школьниками для закрепления материала посчитать путь тела, когда зависимость скорости от времени имеет вид:

$$v = \gamma t^3 \tag{2.21}$$

Для вычисления пути потребуется знание формулы суммы кубической прогрессии:

$$S_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + N^3 = \frac{N^2 (N+1)^2}{4}.$$
 (2.22)

Формула (2.22) доказывается методом математической индукции [117].

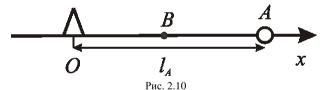
2.2.2. Движение при известной зависимости скорости от координаты

Рассмотрим применение алгоритма схемы Эйлера, когда известна зависимость скорости от координаты. В этом случае уже нельзя применить метод трапеций, поскольку известна скорость тела в начале интервала времени, но скорость тела к концу этого интервала времени может оказаться неизвестной.

Рассмотрим для примера задачу московской городской олимпиады (формулировка немного изменена) [58 (№ 1.21)].

Задача

Когда муравей находился в точке A (рис. 2.10) на расстоянии $l_A=1$ м от муравейника, то он заметил, что муравейник начал закрываться на ночь. Он тут же поспешил вернуться по прямой линии к муравейнику. При этом на некотором отрезке AB его скорость менялась по закону v=C/l, где l- расстояние до муравейника, а C- постоянная величина, равная 0,1 (м²/с). Определите, за какое время муравей добежит до точки B, находящейся от муравейника на расстоянии $l_B=0,5\,$ м.



К задаче о движении муравья

Заметим, что данная задача, как и предыдущая задача:

- не является очевидной для школьника;
- может быть быстро решена числено с использованием схемы Эйлера;
- имеет аналитическое решение, доступное ученикам 7-го класса.

Решение

Движение муравья в этой задаче сложно выразить аналитически: оно не является ни равномерным, ни равноускоренным. Для вычисления пути в этой задаче нужно также использовать три столбца: A – время, B – скорость и C – расстояние до муравейника. Занесем начальные значения: времени – A2 = 0, скорости – B2 = 0, расстояния – C2 = 1. Занесем значение интервала времени D2 = 0,1, и значение коэффициента C – E2 = 0,001 (M^2/c). Далее нужно изменить формулу для вычисления скорости.

Ячейка	Формула электронной	Математическая
	таблицы	формула
A3	=A2+D\$2	$t_{n+1} = t_n + \Delta t$
В3	=E\$2/C3	$v_{n+1} = C/l_{n+1}$
C3	=C2-B2*D\$2	$l_{n+1} = l_n - v_n \cdot \Delta t$

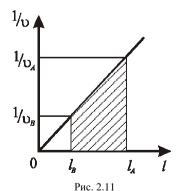
Возникает вопрос, до какой строки копировать формулы, поскольку время движения неизвестно, его как раз и нужно найти. Копировать нужно до тех пор, пока значение расстояния до муравейника не станет равным 0,5.

Здесь нужно обратить внимание учеников, что численные методы приближенные, поэтому значение пути ни в какой ячейке не будет *точно* равно 0,5 (м). Действительно, из таблицы видно, что в 3752 строке расстояние равно 0,500069 м, а в 3753 строке расстояние уже меньше 0,5 м – 0,499869 м. Что же принять за время движения муравья?

Ответом на этот вопрос является то, что мы можем получить ответ с точностью не лучше, чем значение Δt . Таким образом, мы можем принять в качестве ответа 375 с или 375,1 с с точностью 0,1 с [157].

Чтобы полученный ответ не «повис в воздухе», его нужно сравнить с аналитическим решением. Проще всего решить задачу графически, представив движение в осях 1/v от l. В этих осях площадь под графиком числено равна времени движения (рис. 2.11) [58].

Указанное в задаче движение муравья в этих осях будет представлять собой участок прямой линии с угловым коэффициентом C (рис. 2.11).



К решению задачи о движении муравья

Площадь трапеции равна:

$$S = \left(\frac{l_A - l_B}{2}\right) \left(\frac{1}{\nu_A} + \frac{1}{\nu_B}\right) = \left(\frac{l_A - l_B}{2}\right) \left(\frac{l_A}{C} + \frac{l_B}{C}\right) = \frac{l_A^2 - l_B^2}{2C}.$$
 (2.23)

Отсюда время движения равно:

$$t = \frac{l_A^2 - l_B^2}{2C} \,, (2.24)$$

Подставляя начальные условия задачи, получаем, что до отметки $0.5 \, \mathrm{m}$ муравей будет двигаться $375 \, \mathrm{c}$, что совпадает с численным ответом с указанной точностью $0.1 \, \mathrm{c}$ [58].

Отдельно можно обсудить вопрос, корректно ли искать время движения муравья до муравейника, поскольку вблизи муравейника скорость муравья будет стремиться к бесконечности.

Заметим, что задачу можно было решить не только графически, но и аналитически, если разбить движение не на множество равных интервалов движения, а на множество равных отрезков пути, и посчитать сумму времен прохождения каждого из этих интервалов. В результате получается арифметическая прогрессия, которая также приводит к формуле (2.24). Однако опыт показывает, что школьники хуже усваивают решение, основанное на вычислении арифметической прогрессия, чем наглядное графическое решение.

Для закрепления материала можно предложить школьникам решить задачу с муравьем, если скорость муравья зависит от расстояния до муравейника по закону:

$$v = K/l^2, \qquad (2.25)$$

где K — постоянная величина. Для решения этой задачи аналитически школьникам потребуется как результат предыдущей задачи с муравьем, так и задачи с нахождением площади под ветвью параболы (2.22).

Таким образом, мы рассмотрели движение при известной зависимости скорости от времени и при известной зависимости скорости от координаты. В общем случае скорость может зависеть и от времени и от координаты. Примером такого движения является преследование на плоскости, которое будет рассмотрено ниже.

2.3. Моделирование двумерного движения

Для решения задач, связанных с движением по плоскости школьникам 7-х классов необходимы знания, которые они, как правило не успевают получить к началу 7-го класса:

- теорема Пифагора;
- соотношение сторон подобных треугольников;
- векторная величина (скорости);
- проекция вектора на ось;
- тригонометрические функции.

Поскольку времени на детальное изучение этих тем нет, приходится останавливаться лишь на основных моментах. Теорему Пифагора можно рассказать без доказательства, тем более, что многие школьники даже 7-х классов уже слышали о ней (правда, не все 7-ми классники умеют ее доказывать, но для решения задач по физике это не обязательно). Пропорциональное увеличение сторон подобных треугольников и понятие вектора также не вызывает трудностей. Сложение векторов тоже осваивается быстро, особенно, если на первом этапе ограничиться сложением взаимно перпендикулярных векторов. Сложнее обстоит дело с проекцией вектора на ось. Здесь вызывает затруднение то, что проекция имеет знак, ведь до этого школьники имели дело только с длиной, которая всегда неотрицательна. Поэтому на этом моменте нужно специально остановиться [157].

Основная сложность на данном этапе — это освоение тригонометрических функций синус и косинус. Возможно два способа введения тригонометрических функций:

- как отношение сторон прямоугольного треугольника;
- с помощью тригонометрического круга.

Первый способ позволяет определить функции синус и косинус только для первой четверти, т.е. для положительных углов, меньших 90°. Это неудобно для вычисления проекция вектора на ось, поскольку проекция быть отрицательной. Поэтому предпочтительнее может определять тригонометрические функций синус и косинус как проекции единичного радиус-вектора на оси у и х. Школьники обычно спокойно воспринимают фразу, что «для удобства вычислений проекции вектора на ось в математике вводятся функции синус, косинус и тангенс, которые есть в любом языке программирования и в электронных таблицах». Здесь, правда возникает трудность, что эти функции в языках программирования и в электронных таблицах используют в качестве аргументов не градусы, а радианы. И приходится давать школьникам формулу для перевода из градусов в радианы: 1 градус = $\pi/180$ радиан.

Таким образом, на школьников 7-го класса, незнакомых с тригонометрическими функциями наваливается огромное количество информации. Опыт показывает, что для школьников 7-го класса материал лучше разбить на два занятия:

 на первом занятии рассказать про теорему Пифагора, вектора и решить приведенную ниже задачу; – второе занятие посвятить введению тригонометрических функций синус, косинус и тангенс. Здесь же нужно упомянуть о существовании обратных функций для определения углов и доказать основное тригонометрическое тождество [117]:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1. \tag{2.26}$$

В остальном применение схемы Эйлера для двумерного движения аналогично схеме Эйлера для одномерного движения вдоль прямой. Для расчета параметров движения требуется вычисления уже не одной, а двух координат:

$$x_{n+1} = x_n + v_{x,n} \Delta t = x_1 + v_{x,1} \Delta t + v_{x,2} \Delta t + \dots + v_{x,n} \Delta t;$$

$$y_{n+1} = y_n + v_{y,n} \Delta t = y_1 + v_{y,1} \Delta t + v_{y,2} \Delta t + \dots + v_{y,n} \Delta t.$$
 (2.27)

Рассмотрим для примера задачу, которую можно решить без введения тригонометрических функций.

Задача [199 (№1.188)]

К перекрестку по двум взаимно перпендикулярным дорогам подъезжают две машины (рис. 2.12). Скорость первой машины $v_{\rm l}=15\,$ м/с, скорость второй — $v_{\rm 2}=20\,$ м/с. В некоторый момент времени обеим машинам оставалось проехать до перекрестка одинаковые расстояния $d=1000\,$ м. Найти наименьшее расстояние между машинами.

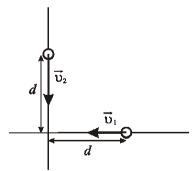


Рис. 2.12 К задаче с двумя машинами

Заметим, что данная задача:

- имеет с первого взгляда очевидное решение, которое на самом деле является неверным;
- может быть решена числено с использованием схемы Эйлера;

 имеет аналитическое решение, доступное ученикам 7-го класса (при освоении ими теоремы Пифагора).

Поскольку школьники знают, что самый короткий путь от точки до прямой — это перпендикуляр [117], то они предполагают, что кратчайшее расстояние между машинами достигается когда одна из машин пересекает перекресток. Далее решение сводится к рассмотрению двух случаев: когда перекресток пересекает первая машина (через 66,7 с) и вторая машина (через 50 с). В первом случае расстояние между машинами равно 333,3 м, во втором — 250 м, что школьники и считают ответом данной задачи. В действительности, машины сближаются на меньшее расстояние.

Решение

Поскольку движение машин равномерное, то нам незачем прибегать к схеме Эйлера — мы можем вычислять координаты машин по формуле для равномерного движения. Для решения задачи нам потребуется четыре столбца: A — время, B — координата I-ой машины, C — координата I-ой машины, D — расстояние между машинами.

Занесем начальные значения: времени -A2=0, координаты І-ой машины -B2=1000, координаты ІІ-ой машины -C2=1000. Выберем интервал времени Δt равным 0,1 с. Занесем в таблицу следующие формулы.

Ячейка	Формула электронной	Математическая
	таблицы	формула
A3	=A2+0,1	$t_{n+1} = t_n + \Delta t$
В3	=B2-15*0,1	$x_{n+1} = x_n - v_1 \Delta t$
C3	=C2-20*0,1	$y_{n+1} = y_n - v_2 \Delta t$
D2	=SQRT(B2^2+C2^2)	$l_n = \sqrt{x_n^2 + y_n^2}$

Формулы записаны для *OpenOffice.org Calc* и англоязычной версии *MS Excel*, русскоязычной версии *MS Excel* вместо «SQRT» нужно записать «КОРЕНЬ». Если школьники знают, что квадратный корень числа – это возведение его в степень «1/2», то формулу в D2 можно записать в виде [157]:

Ячейка	Формула электронной	Математическая
	таблицы	формула
D2	=(B2^2+C2^2)^0,5	$l_n = \sqrt{{x_n}^2 + {y_n}^2}$
		$n \qquad \mathbf{V} n \qquad \supset n$

Если школьники не изучали еще квадратных корней, то можно искать не минимальное расстояние, а квадрат минимального расстояния между машинами. В этом случае в ячейку D2 можно занести: формулу:

Ячейка	Формула электронной	Математическая
	таблицы	формула
D2	=B2^2+C2^2	$l_n^2 = x_n^2 + y_n^2$

Копировать формулы нужно не далее 700-й строки. К этому времени уже обе машины проедут перекресток.

Анализ получившихся расчетов показывает, что минимальное расстояние между машинами достигается в 562 строке (что соответствует 56 с движения) и составляет 200 м, что на 20% меньше «очевидного» решения. Можно обратить внимание школьников на «симметричность» расстояния между машинами относительно этого момента времени: значения в ячейках 561 и 563, 560 и 564, 559 и 565 попарно равны между собой. Полезно построить график зависимости квадрата расстояния между машинами от времени и убедиться, что он напоминает параболу.

Данная задача имеет два решения, доступных школьникам 7-го класса: аналитическое и графическое. Разберем оба способа.

Аналитическое решение

Пусть t — время, прошедшее с указанного в условии момента. Координаты машин будут равны:

$$x = d - v_1 t$$
; $y = d - v_2 t$. (2.28)

Квадрат расстояния между машинами равен:

$$l^{2} = x^{2} + y^{2} = d^{2} - 2dv_{1}t + v_{1}^{2}t^{2} + d^{2} - 2dv_{2}t + v_{2}^{2}t^{2} =$$

$$= t^{2}(v_{1}^{2} + v_{2}^{2}) - 2d(v_{1} + v_{2})t + 2d^{2}$$
(2.29)

Получился полином второй степени относительно t [117]. Поскольку школьники 7-го класса еще не умеют решать квадратные уравнения и находить минимум функции $y = Ax^2 + Bx + C$, то нужно выделить квадрат в явном виде:

$$y = Ax^{2} + Bx + C = A\left(x^{2} + 2\frac{B}{2A}x + \left(\frac{B}{2A}\right)^{2}\right) + C - \frac{B^{2}}{4A}.$$
 (2.30)

Поскольку квадрат числа больше или равен нулю, что минимум достигается при x = -B/2A и его значение составляет:

$$y_{\min} = C - \frac{B^2}{4A} \,. \tag{2.31}$$

Применяя эти рассуждения к формуле (2.29), получим, что минимальное расстояние между машинами будет через время:

$$t = \frac{d\left(v_1 + v_2\right)}{{v_1}^2 + {v_2}^2},\tag{2.32}$$

квадрат расстояния равен:

$$l^{2} = 2d^{2} - \frac{d^{2}(v_{1} + v_{2})^{2}}{v_{1}^{2} + v_{2}^{2}} = \frac{d^{2}(v_{1} - v_{2})^{2}}{v_{1}^{2} + v_{2}^{2}}.$$
 (2.33)

А само расстояние равно:

$$l = \frac{d|v_1 - v_2|}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}. (2.34)$$

Подставляя значения v_1 , v_2 и d, получим что минимальное расстояние между машинами будет достигнуто через 56 с и будет равно $l_{\min} = 200$ м, что совпадает с численными расчетами. «Симметричность» значений расстояний относительно наименьшего значения также становится понятным, поскольку формула для квадрата расстояния (2.33) описывает параболу, а ветви параболы симметричны относительно ее минимума.

Графическое решение

Для графического решения необходимо знать формулу сложения скоростей при переходе из одной системы отсчета в другую [224]. Перейдем в систему отсчета, связанную со второй машиной (см. рис. 2.13). В этой системе отсчета вторая машина неподвижна, а первая движется в направлении AC.

Из подобия треугольников ACE и ADO следует, что:

$$\frac{\left|OD\right|}{\left|OA\right|} = \frac{\left|EC\right|}{\left|AE\right|} = \frac{v_2}{v_1}, \text{ или } \left|OD\right| = \left|OA\right| \frac{v_2}{v_1} = d \frac{v_2}{v_1}. \tag{2.35}$$

Минимальное расстояние между машинами — это длина перпендикуляра из точки B на линию AD. ТО есть минимальное расстояние между машинами будет, когда первая машина достигнет точки F. Из подобия треугольников ACE и BDF следует:

$$\frac{|BF|}{|BD|} = \frac{|AE|}{|AC|} = \frac{v_1}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}$$
 (2.36)

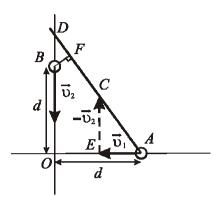


Рис. 2.13 К решению задачи с двумя машинами

Подставляем (2.36) в (2.35):

$$l_{\min} = |BF| = \frac{|BD| v_1}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}} = \left(d \frac{v_2}{v_1} - d\right) \frac{v_1}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}} = d \frac{v_2 - v_1}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}. (2.37)$$

Учитывая, что $v_2 > v_1$, формула (2.37) совпадает с полученной выше формулой (2.34).

Следует обратить внимание, что численное решение дало точный ответ. Так получилось ввиду двух причин:

- 1) движение машин было равномерным, поэтому мы рассчитывали координаты машин не по приближенной схеме Эйлера, а по точным формулам для равномерного движения;
- 2) числа в условии были подобраны так, что минимальное расстояние между машинами было достигнуто через целое число секунд и, следовательно, через целое число интервалов времени. В общем случае, это выполняться не будет. Можно предложить ученикам в качестве самостоятельного упражнения, решить задачу с другими скоростями машин, например, 20 и 25 (м/с). Точность вычисления расстояния в этом случае будет зависеть от величины интервала времени Δt .

2.4. Моделирование задач на преследование

Перейдем к рассмотрению задач, когда скорость тела зависит и от времени и от координаты. Одним из видов подобных задач являются задачи на преследование, когда рассматривается движение по крайней мере, двух тел, одно из которых является преследователем, а второе — преследуемым, причем преследователь все время движется точно на преследуемого. Даже в простейшем случае, когда скорость преследователя постоянна по величине, направление скорости зависит от времени (если известен закон движения преследуемого от времени) и от координат преследователя. Рассмотрим для примера задачи, когда преследуемый объект движется по прямой или по окружности. Подобного рода задачи встречаются во многих сборниках [28, 50, 66].

Иногда участников преследования в задачниках называют «преследователь» и «жертва». Поскольку выражения «преследователь», «жертва» и пр. неприятны для слуха, то будем решать задачи, назвав преследователя Ахиллесом (который вынослив в беге, но не очень умен, поскольку умный преследователь бежит не точно на цель, а с опережением, «наперерез»). Будем считать, что Ахиллес догоняет коня (коня при этом вряд ли можно назвать «жертвой»). В конце главы мы рассмотрим еще одну задачу, когда число участников больше двух.

2.4.1. Преследование при движении цели по прямой (случай равных скоростей)

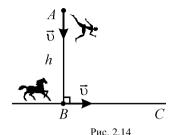
Задача

По прямой дороге BC бежит конь с постоянной скоростью $\upsilon=5$ м/с (рис. 2.14). Ахиллес стоит в точке A. В тот момент, когда конь достиг точки B, Ахиллес начинает его преследовать. Скорость Ахиллеса постоянна, равна по модулю скорости коня и направлена все время на коня. Расстояние h=100 м. Найти расстояние между конем и Ахиллесом через время $t>>h/\upsilon$.

Предварительные замечания

Поскольку задача сложная, вначале полезно дать подсказку – обсудить характер движения коня и Ахиллеса.

Прежде всего, очевидно, что Ахиллес не догонит коня. Действительно, предположим, что Ахиллес догонит коня в какой-нибудь точке Z на прямой BC. Поскольку их скорости равны, то $\left|AZ\right| = \left|BZ\right|$. Но гипотенуза не может быть равна катету. Противоречие. Следовательно, Ахиллес не может догнать коня.



гис. 2.14
Задача преследования по прямой

Далее, можно обосновать, что Ахиллес не сможет пересечь линию BC. Введем систему координат с началом в точке B, так, чтобы конь двигался вдоль оси x. Пусть в некоторый момент времени Ахиллес находится в точке D, а конь в точке E (рис. 2.15). Рассмотрим проекции скорости Ахиллеса на оси x и y. Проекция v_y меньше нуля – Ахиллес движется в сторону оси x. Но чем ближе он k оси k, тем меньше модуль проекции k0. Если бы он достиг оси k1, то проекция k1, обратилась бы в ноль. Так что пересечь ось k2 ему не удастся.

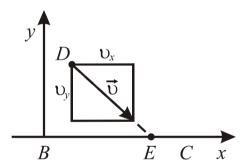


Рис. 2.15 Проекции скорости Ахиллеса

Теперь обоснуем, что через некоторое время Ахиллес будет двигаться вдоль линии BC. Когда Ахиллес будет очень близко к оси x, модуль проекции v_y будет очень мал. Поэтому проекция $v_x = \sqrt{v^2 - {v_y}^2}$ будет почти равна v. Получается, что Ахиллес будет двигаться вдоль линии BC почти с одной скоростью с конем, то есть расстояние между ними меняться практически не будет [157]. Осталось найти это расстояние.

Численное решение

Для численного решения необходимо разработать алгоритм определения координат коня и Ахиллеса. Поскольку скорость коня постоянна, то изменение его координаты x_B происходит по закону:

$$x_{R_{n+1}} = x_{R_n} + v\Delta t \,, \tag{2.38}$$

координата y_{R} коня все время равна нулю.

Сложнее рассчитать изменение координат Ахиллеса, в зависимости от координат коня и самого Ахиллеса. Ходя в этой задаче $y_{\scriptscriptstyle B}=0$, определим изменение координат Ахиллеса в общем виде, поскольку это потребуется в дальнейшем.

Пусть в некоторый момент времени Ахиллес находится в точке A_n с координатами $x_{A,n}$ и $y_{A,n}$, а конь в точке B_n с координатами $x_{B,n}$ и $y_{B,n}$ (рис. 2.16) [157]. По условию задачи скорость Ахиллеса направлена на коня, т.е. вдоль линии A_nB_n . Мы рассматриваем движение, при котором Ахиллес в течение времени Δt движется равномерно прямолинейно. Найдем, где он будет через время Δt . Поскольку скорость Ахиллеса постоянна, то он добежит до точки A_{n+1} , лежащей на прямой A_nB_n , причем расстояние $|A_nA_{n+1}| = v\Delta t$.

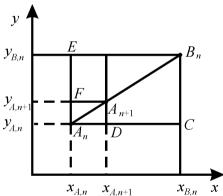


Рис. 2.16. Пояснение к вычислению изменения координат

Треугольники $B_n A_n C$ и $A_{n+1} A_n D$ подобны (рис. 2.16). Следовательно:

$$\frac{\left|B_{n}A_{n}\right|}{\left|A_{n+1}A_{n}\right|} = \frac{\left|A_{n}C\right|}{\left|A_{n}D\right|} = \frac{x_{B,n} - x_{A,n}}{x_{A,n+1} - x_{A,n}}$$
(2.39)

Треугольники $B_n A_n E$ и $A_{n+1} A_n F$ так же подобны:

$$\frac{\left|B_{n}A_{n}\right|}{\left|A_{n+1}A_{n}\right|} = \frac{\left|A_{n}E\right|}{\left|A_{n}F\right|} = \frac{y_{B,n} - y_{A,n}}{y_{A,n+1} - y_{A,n}}.$$
 (2.40)

Теперь мы можем найти значение координат Ахиллеса: $x_{A,\,N+1}$ и $y_{A,\,N+1}$:

$$x_{A, n+1} = x_{A, n} + (x_{B, n} - x_{A, n}) \upsilon \Delta t / L_{n},$$

$$y_{A, n+1} = y_{A, n} + (y_{B, n} - y_{A, n}) \upsilon \Delta t / L_{n},$$
(2.41)

где
$$L_n = \left|A_n B_n\right| = \sqrt{\left(x_{A,n} - x_{B,n}\right)^2 + \left(y_{A,n} - y_{B,n}\right)^2}$$
 — расстояние между конем и Ахиллесом.

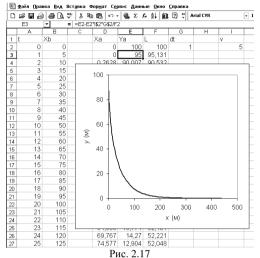
Следует обратить внимание, что формулы получены в предположении, что расстояние между конем и Ахиллесом не равно нулю, иначе это означало бы, что Ахиллес догнал коня и ему уже незачем бежать дальше [157].

Осталось полученные формулы вставить в наш алгоритм в виде формул электронной таблицы. Нам потребуется четыре столбца: A – время, B – координата коня x_B , C и D – координаты Ахиллеса x_A и y_A , E – расстояние между Ахиллесом и конем.

Занесем начальные значения: времени — A2=0, координата коня x_B — B2=0, координата Ахиллеса x_A — C2=0, координата Ахиллеса y_A — D2=100 м, интервал времени Δt — F2=0,1 с, скорость коня (она же скорость Ахиллеса) — G2=5 м/с. Занесем в таблицу следующие формулы.

Ячейка	Формула электронной таблицы	Математическая формула
A3	=A2+F\$2	$t_{n+1} = t_n + \Delta t$
В3	=G\$2*A2	$x_{B,n} = vt$
C3	=C2+(B2-C2)*G\$2*F\$2/E2	$x_{A, n+1} = x_{A, n} + (x_{B, n} - x_{A, n}) \upsilon \Delta t / L_n$
D3	=D2-D2*G\$2*F\$2/E2	$y_{A, n+1} = y_{A, n} - y_{A, n} \upsilon \Delta t / L_n$
E2	=SQRT ((B2-C2)^2+D2^2)	$L_{n} = \sqrt{\left(x_{A,n} - x_{B,n}\right)^{2} + y_{A,n}^{2}}$

Осталось откопировать формулы, например, до строки 1000. Результат расчетов и траектория движения Ахиллеса представлены на рис. 2.17 [157],



Траектория Ахиллеса

Как мы и предполагали, Ахиллес приближается к оси x, но не пересекает ее. Построим график зависимости расстояния между Ахиллесом и конем от времени (рис. 2.18). Видно, что примерно после 30-ой секунды расстояние меняться перестало. Возьмем значение расстояния из ячейки E400, оно получается чуть больше 50 м.

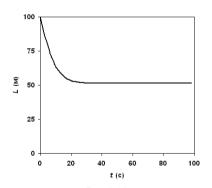


Рис. 2.18 Зависимость расстояния между конем и Ахиллесом от времени

Теперь полезно обсудить с учениками точность проведенных вычислений и полученного результата. Интервал времени, в течение которого Ахиллес бежит по прямой равен 0,1 с. За это время он пробегает 0,5 м. Поэтому полученный ответ не может быть точнее 0,5 м. Далее нужно посмотреть сходимость решения [157].

Уменьшая интервал времени Δt (для этого нужно изменить значение в ячейке F2 и копировать формулы в нижележащие строки), можно убедиться, что расстояние между конем и Ахиллесом приближается к 50 м, т.е. становится вдвое меньше первоначального. Таким образом, ответ задачи — через длительное время расстояние конем и Ахиллесом L станет равно 50 м и далее практически не будет меняться.

Эвристическое значение численного решения [157]

Ячейка	Формула электронной	Математическая
	таблицы	формула
H2	=B2-C2+E2	$S = x_B - x_A + L$

и откопируем ее в нижележащие строки. Сумма меняется от 100,0 до 100,25, т.е. в пределах нашей точности ее можно считать постоянной.

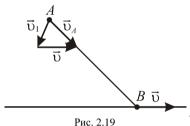
Догадаться рассмотреть эту сумму можно из следующих соображений. Вначале координата Ахиллеса x_A совпадает с координатой коня x_B , а расстояние между ними — L. Через длительное время расстояние между ними равно L/2, и разность между их координатами по оси x также равно L/2. Получается, насколько Ахиллес приблизился к коню, настолько же отстает от коня его координата x.

Можно сказать школьникам, что неизменяемая величина в математике (и физике) называется *инвариантом*, а такой способ решения задачи называется поиском инварианта движения. Используемый эвристический прием — нахождение инвариантов, хорошо известен и упоминается во многих пособиях по решению олимпиадных задач [13, 66, 94, 157].

Возможно, что школьники уже сообразят как дальше решить задачу, а если нет то нужно перейти к разбору аналитического решения.

Подсказка для аналитического решения

Решать задачу проще в системе отсчета, связанной с конем. Для этого нужно векторно вычесть из скорости Ахиллеса скорость коня (см. рис. 2.19) [157].



Скорость Ахиллеса относительно коня

Возможно, что школьникам 7-го класса будет сложно представить движение Ахиллеса относительно коня, поскольку в системе отсчета, связанной с конем, Ахиллес бежит не к коню, а назад от него. В таком случае эту задачу полезно рассмотреть в другой формулировке. Рассмотрение альтернативной формулировки задачи полезно еще и для достижения другой цели – чтобы школьники привыкали, что задачи имеют много формулировок.

Задача (другая формулировка)

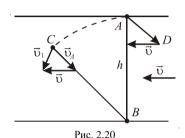
Пусть имеется река ширины h (рис. 2.20). На берегу стоит Ахиллес. На противоположенном берегу напротив Ахиллеса стоит дерево. Ахиллес хочет приплыть к дереву, причем он все время плывет точно на дерево. Сколько времени у него на это уйдет? Скорость течения и скорость Ахиллеса относительно воды равны v [157].

Обсуждение задачи в новой формулировке

Школьники обычно понимают, что эта задача похоже на предыдущую, только решается в системе отсчета, связанной с конем. Можно сказать, что дерево – это неподвижный конь. Скорость Ахиллеса

относительно воды направлена на дерево, а скорость Ахиллеса относительно дерева, т.е. относительно берега, равна векторной сумме скорости Ахиллеса относительно воды $\vec{v}_{\scriptscriptstyle A}$ и скорости течения $\vec{v}: \vec{v}_{\scriptscriptstyle I} = \vec{v}_{\scriptscriptstyle A} + \vec{v}$ (рис. 2.20).

Пусть вначале Ахиллес находится в точке A, а дерево — в точке B. Проанализируем как будет двигаться Ахиллес. Вначале он войдет в воду, и будет двигаться прямо на дерево перпендикулярно берегу. Его начнет сносить течением влево. Чтобы плыть на дерево, ему придется поворачиваться в сторону дерева, но его все равно будет сносить, поскольку проекция его скорости $v_{\rm x}$ меньше скорости течения [157].



Скорость Ахиллеса относительно берега

Численное решение задачи в новой формулировке

Можно (хотя и не обязательно) для лучшего усвоения материала предложить школьникам численное решение этой задачи (это лучше убедит учеников в эквивалентности формулировок задачи, если в этом еще ктонибудь сомневается).

Формула для координаты y_A не изменится, а в выражении для координаты x_A нужно добавить слагаемое $v\Delta t$, равное расстоянию, на которое Ахиллеса сносит течение.

$$x_{A, n+1} = x_{A, n} + (x_{B, n} - x_{A, n}) \upsilon \Delta t / L_n - \upsilon \Delta t,$$

$$y_{A, n+1} = y_{A, n} + (y_{B, n} - y_{A, n}) \upsilon \Delta t / L_n,$$
(2.42)

Поместим дерево в начало координат. Столбец В уже не потребуется, значения $x_{B,n}=0$ и $y_{B,n}=0$. Тогда формула (2.42) запишется в виде:

$$x_{A,n+1} = x_{A,n} - x_{A,n} \upsilon \Delta t / L_n - \upsilon \Delta t ,$$

$$y_{A,n+1} = y_{A,n} - y_{A,n} \upsilon \Delta t / L_n .$$
(2.43)

Таким образом, придется лишь немного изменить уже имеющуюся электронную таблицу.

Ячейка	Формула электронной	Математическая
	таблицы	формула
A3	=A2+F\$2	$t_{n+1} = t_n + \Delta t$
C3	=C2-C2*G\$2*F\$2/E2-G\$2*F\$2	$x_{A, n+1} = x_{A, n} - x_{A, n} \upsilon \Delta t / L_n - \upsilon \Delta t$
D3	=D2-D2*G\$2*F\$2/E2	$y_{A, n+1} = y_{A, n} - y_{A, n} \upsilon \Delta t / L_n$
E2	$= SQRT(C2^2+D2^2)$	$L_{n} = \sqrt{x_{A, n}^{2} + y_{A, n}^{2}}$

Чтобы сравнить новые результаты расчетов с предыдущими начальные параметры можно не менять, хотя скорость Ахиллеса-пловца 5 м/с может показаться чересчур большой. Впрочем, вид траектории не зависит от скорости Ахиллеса, главное, чтобы скорость реки была равна скорости Ахиллеса (рис. 2.21) [157].

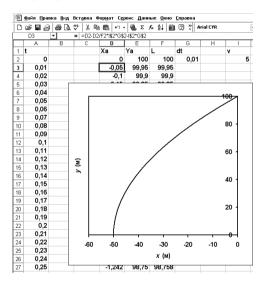


Рис. 2.21 Траектория Ахиллеса – пловца

Получается, что к 100-й секунде Ахиллес плывет в сантиметре от берега и не может выгрести против течения, оставаясь все время практически на одном месте на расстоянии 50 м и 1 см от дерева. Школьники обычно обращают внимание на то, что Ахиллес, плывущий в сантиметре от берега – это нереалистично. Поэтому приходится постоянно напоминать, что мы

работаем в рамках определенной модели, считая Ахиллеса, коня и дерево материальными точками.

Можно также посмотреть на значение суммы $L+x_A$. Она снова постоянна и равна 100. Если построить зависимость L от x_A , то получилась прямая линия (см. рис. 2.22). Таким образом, мы убедились, что задача с Ахиллесом-пловцом эквивалентна задаче с Ахиллесом, догоняющим коня [157]. Перейдем к аналитическому решению задачи.

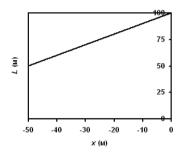


Рис. 2.22 Зависимость расстояния до дерева L от координаты Ахиллеса x

Аналитическое решение

Для аналитического решения задачи нужно ввести понятие: *скорость сближения* Ахиллеса и дерева.

По определению скалярная скорость — это отношение изменения длины пути ко времени, за которое это изменение произошло. Поэтому введем скорость сближения как отношение изменения расстояния между Ахиллесом и деревом ко времени, за которое это изменение произошло [157]. Обозначим ее v_L :

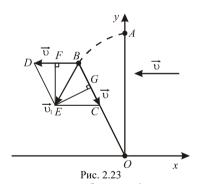
$$v_L = -\Delta L / \Delta t \tag{2.44}$$

Знак «минус» означает, что расстояние со временем уменьшается. Поэтому, если определить скорость сближения как $\upsilon_L = (L_2 - L_1)/\Delta t$, то получится отрицательная величина. Чтобы не путаться, лучше определить скорость сближения как $\upsilon_L = (L_1 - L_2)/\Delta t = -(L_2 - L_1)/\Delta t$.

У школьников может возникнуть путаница относительно того, какая это скорость: средняя или мгновенная? При численном моделировании мы рассматриваем движения за малые, но все же конечные интервалы Δt . Поэтому любая вычисленная скорость будет средней. Когда же мы решаем задачу аналитически, мы можем рассмотреть перемещения тел за малый

промежуток времени Δt , а затем устремить его к нулю. Тогда мы получим мгновенную скорость [157].

Сделаем чертеж (рис. 2.23). Дерево находится в начале координат O. Течение \overrightarrow{v} направлено, как показано рис. 2.23. Ахиллес стартовал из точки A, течение снесло его назад, и через некоторое время он оказался в некоторой точке B. По условию его скорость направлена на дерево. Обозначим ее вектором \overrightarrow{BC} . Но его сносит течением. Чтобы найти скорость Ахиллеса относительно берега, нужно сложить вектор его скорости относительно воды \overrightarrow{BC} и вектор скорости течения, обозначим его \overrightarrow{BD} . Складываем вектора по правилу параллелограмма. Их суммой будет вектор \overrightarrow{BE} . Обозначим скорость Ахиллеса относительно берега $\overrightarrow{v_1}$. Теперь нужно найти скорость сближения. Скорость Ахиллеса относительно неподвижного дерева равна $\overrightarrow{v_1}$. Расстояние между Ахиллесом и деревом — это длина отрезка BO. Скорость сближения показывает, насколько за малое время Δt уменьшится отрезок BO. Следовательно, скорость сближения равна проекции скорости $\overrightarrow{v_1}$ на линию BO. Опустим из E перпендикуляр EG. Тогда проекция вектора \overrightarrow{BE} на линию BO – отрезок BG.



Нахождение скорости сближения Ахиллеса и дерева

Нам нужно связать изменение расстояния L и изменение координаты x. Скорость сближения мы нашли. Теперь найдем скорость изменения координаты x. Она равна проекции скорости $\overrightarrow{v_1}$ на ось x – это отрезок BF, где $EF \perp BD$. Поскольку скорость Ахиллеса равна скорости течения, то BCED – ромб, следовательно, углы CBE и DBE равны. Следовательно, у прямоугольных треугольников GBE и FBE общая гипотенуза и одинаковые

углы, следовательно, они равны и |BF| = |BG|. Получается, что скорость сближения v_L равна проекции скорости v на ось x: $v_L = v_x$ [157].

Следующий момент рассуждения не очевиден, поэтому на нем нужно остановиться подробнее. Поскольку $\upsilon_L=\upsilon_x$ в любой момент времени, то за любой промежуток Δt Ахиллес настолько же приближается к дереву, насколько смещается по оси x влево. Пусть за достаточно долгое время он приблизится к оси x и сместится при этом влево на расстояние L_1 . Тогда расстояние между ним и деревом станет равно L_1 , т.е. Ахиллес приблизится к дереву на $h-L_1$. Приравняем эти величины: $h-L_1=L_1$. Следовательно, $L_1=h/2$, что и является ответом в данной задаче.

Заметим, что при решении задачи нигде не использовались тригонометрические функции, так что его можно объяснить даже ученикам 7-го класса. В то же время задача содержит много звеньев рассуждений, которые делают ее решение сложным даже для учеников старших классов.

Следует обратить внимание школьников, что не при любом начальном положении дерева и Ахиллеса расстояние между ними уменьшится вдвое. Для лучшего усвоения материала можно предложить ученикам решить задачу, когда Ахиллес стоит не напротив дерева, выше по течению на расстояние d [157]. Решить эту задачу можно как численно, задав начальные координаты Ахиллеса $x_A = d$, $y_A = h$, так и аналитически.

Обозначим первоначальное расстояние между Ахиллесом и деревом L_0 . По теореме Пифагора $L_0 = \sqrt{h^2 + d^2}$. Через некоторое время Ахиллес приблизится к противоположенному берегу, т.е. его координата y_A станет практически равна нулю. Пусть при этом расстояние между ним и деревом равно L_1 . Его смещение по оси x составит $d + L_1$ (рис. 2.24). Мы нашли, что смещение по оси x равно изменению расстояния до дерева. Таким образом: $L_0 - L_1 = d + L_1$. Отсюда [157]:

$$L_1 = (\sqrt{h^2 + d^2} - d)/2$$
. (2.45)

Можно предложить ученикам решить задачу числено и сравнить получившийся ответ с аналитическим.

Замети, что при любых значениях d и h расстояние между Ахиллесом и деревом не станет равным нулю. То есть, плывя все время точно на дерево, он не сможет доплыть до дерева, даже если он войдет в реку много выше по течению. Аналогично, Ахиллес не сможет догнать коня даже если конь будет бежать почти на него, но Ахиллес при этом не будет стоять точно на линии BC [157].

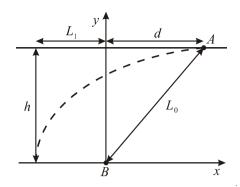


Рис. 2.24 Нахождение скорости сближения Ахиллеса и дерева

После того как ученики освоили эту задачу можно перейти к более сложному случаю, когда скорость Ахиллеса больше скорости коня.

2.4.2. Преследование при движении цели по прямой (случай произвольных скоростей)

Сформулируем условие предыдущей задачи для случая когда скорость Ахиллеса больше скорости коня. Рассмотрим более общий случай, когда их скорости не равны.

Задача [50]

По прямой дороге BC бежит конь с постоянной скоростью $\upsilon=2$ м/с (см. предыдущую задачу, рис. 2.14). Ахиллес стоит в точке A. В тот момент, когда конь достиг точки B, Ахиллес начинает его преследовать. Скорость Ахиллеса постоянна, равна по модулю u=4 м/с и направлена все время на коня. Расстояние h=100 м. Найти через какое время Ахиллес догонит коня.

Предварительные замечания

Если скорость коня была бы больше скорости Ахиллеса, то конь, очевидно, убежал бы от Ахиллеса и расстояние между Ахиллесом и конем стало бы сколь угодно большим. Случай равных скоростей мы уже рассматривали. Если скорость Ахиллеса больше, то рано или поздно он догонит коня. Решим задачу сначала численно.

Численное решение

Для составления электронной таблицы нам потребуется не одна, а две ячейки для скорости. Пусть ячейке G2 у нас останется скорость коня, а скорость Ахиллеса мы занесем в ячейку H2. Формулы претерпят небольшие изменения.

Ячейка	Формула электронной таблицы	Математическая формула
A3	=A2+F\$2	$t_{n+1} = t_n + \Delta t$
В3	=G\$2*A2	$x_{B,n} = vt$
C3	=C2+(B2- C2)*H\$2*F\$2/E2	$x_{A, n+1} = x_{A, n} + (x_{B, n} - x_{A, n}) u \Delta t / L_n$
D3	=D2-D2*G\$2*H\$2/E2	$y_{A, n+1} = y_{A, n} - y_{A, n} u \Delta t / L_n$
E2	= SQRT((B2-C2)^2+D2^2)	$L_{n} = \sqrt{\left(x_{A,n} - x_{B,n}\right)^{2} + y_{A,n}^{2}}$

Аналогично предыдущей задаче копируем формулы и строим траекторию Ахиллеса (рис. 2.25) [157].

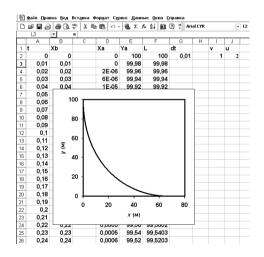


Рис. 2.25 Траектория Ахиллеса, когда его скорость вдвое больше скорости коня

Нужно отдельно остановиться на вопросе, что принять за момент окончания погони. Численные методы – приближенные, и расстояние между конем и Ахиллесом может никогда в точности стать равным нулю. Детальный анализ расчетов показывает, что Ахиллес подбежит к коню и начнет кружиться вокруг него. Таким образом, за окончание погони нужно принять момент, когда расстояние между Ахиллесом и конем перестанет уменьшаться. Это произойдет в строке №6669, минимальное расстояние – 0,0000005 м. Время преследования составляет 66,67 ±0,01 (с). Конь успевает пробежать 66,67±0,01 (м).

Аналогично можно сформулировать и численно решить задачу с Ахиллесом-пловном.

Задача в альтернативной формулировке [157]

Пусть имеется река ширины h. На берегу стоит дерево. На противоположном берегу на расстоянии d выше по течению стоит Ахиллес. Ахиллес начинает плыть к дереву, причем он все время плывет точно на дерево. Сколько времени у него на это уйдет? Скорость Ахиллеса относительно воды постоянна и равна u=4 м/с, скорость течения – v=2 м/с.

Численное решение задачи в новой формулировке

Для решения этой задачи также потребуется не одна, а две ячейки для скорости. Пусть ячейке G2 у нас останется скорость реки, а скорость Ахиллеса будет в ячейке H2. Формулы также претерпят небольшие изменения.

Ячейка	Формула электронной таблицы	Математическая формула
A3	=A2+F\$2	$t_{n+1} = t_n + \Delta t$
C3	=C2-C2*H\$2*F\$2/E2- G\$2*F\$2	$x_{A, n+1} = x_{A, n} - x_{A, n} u \Delta t / L_n - \upsilon \Delta t$
D3	=D2-D2*H\$2*F\$2/E2	$y_{A, n+1} = y_{A, n} - y_{A, n} u \Delta t / L_n$
E2	= SQRT(C2^2+D2^2)	$L_{n} = \sqrt{x_{A, n}^{2} + y_{A, n}^{2}}$

Пусть скорость течения реки в два раза меньше скорости Ахиллеса, ширину реки оставим прежней – 100 м, расстояние d для начала примем равным d=0, интервал времени $\Delta t=0.01$ с. После копирования формул мы получим траекторию движения Ахиллеса – пловца (рис. 2.26). Расстояние между Ахиллесом и деревом перестанет уменьшаться в 6669-ой строке

(расстояние равно 0,0000005 м). Время движения считываем из ячейки A6669 – 66,67 с. Таким образом, Ахиллес достигнет дерева за 66,67±0,01 (с).

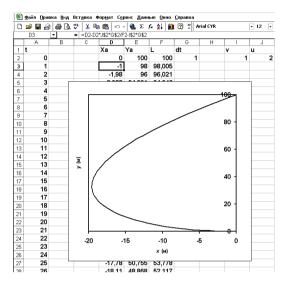


Рис. 2.26 Траектория Ахиллеса – пловца

В качестве задания для самостоятельной работы можно предложить школьникам найти зависимость времени погони за конем (времени движения к дереву) в зависимости от соотношения скоростей Ахиллеса и коня [157].

Далее логика изложения требует аналитического решения задачи. Ввиду того, что задача очень сложная, для решения задачи можно попытаться поискать инварианты движения, которые могли бы помочь найти аналитическое решение, подобно тому, как это было сделано в предыдущей задаче.

Подсказка для аналитического решения

Можно, как и в прошлый раз, предложить ученикам в режиме «свободного полета» поискать закономерности: построить зависимости x_A, y_A, L от t, L от x_A ... и т.д. Однако опыт показывает, что закономерности «вслепую» искать долго и лучше дать им подсказку. В прошлый раз нам очень помогло знание факта, что скорость сближения Ахиллеса и дерева u_L по модулю была равна проекции скорости Ахиллеса u_x . Поэтому можно начать с построения графика зависимости u_L от u_x [157].

Вспомним определение скорости сближения (2.44):

$$u_{L,n} = \frac{L_n - L_{n+1}}{\Lambda t}, \qquad (2.46)$$

а проекцию скорости Ахиллеса на ось х будем искать по формуле:

$$u_{x,n} = \frac{x_{n+1} - x_n}{\Delta t} \tag{2.47}$$

Будем использовать столбцы I и J. Пусть в столбце I будет массив значений u_x , а в столбце J — массив значений u_L . Занесем формулы:

Ячейка	Формула электронной	Математическая				
	таблицы	формула				
I2	=(C3-C2)/F\$2	$u_{x,n} = (x_{n+1} - x_n) / \Delta t$				
J2	=(E3-E2)/F\$2	$u_{L,n} = \left(L_n - L_{n+1}\right)/\Delta t$				

и откопируем формулы до строки №6668, так как после того, как Ахиллес догонит коня, дальнейшие расчеты бессмысленны. График зависимости u_L от u_x представляет собой прямую линию (рис. 2.27) [157]. Отсюда подсказка для аналитического решения — нужно найти связь между u_L и u_x .

Заметим, что просто зависимость L от x_A . представляет собой ничем не примечательную кривую (рис. 2.28).

Аналитическое решение

Предварительный анализ дал подсказку, что можно рассмотреть зависимость между u_L и u_x . Сделаем чертеж, и найдем скорость сближения и проекцию скорости Ахиллеса на ось x (рис. 2.29) [157].

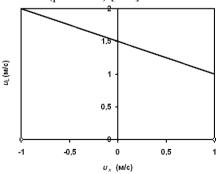


Рис. 2.27 Зависимость скорости сближения от проекции скорости Ахиллеса на ось x

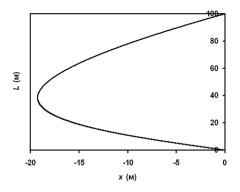


Рис. 2.28 Зависимость расстояния до дерева L от координаты Ахиллеса x

Дерево расположено в начале координат, ось x направлена против течения. Ахиллес стартовал из точки A, течение снесло его к некоторой точке B. По условию его скорость относительно воды u направлена на дерево. Обозначим ее вектором \overrightarrow{BC} . Чтобы найти скорость Ахиллеса относительно берега $\overrightarrow{u_1}$, нужно сложить вектор его скорости относительно воды \overrightarrow{BC} и вектор скорости течения, обозначим его \overrightarrow{BD} . Складываем вектора по правилу параллелограмма и получаем вектор \overrightarrow{BE} . Модуль скорости сближения Ахиллеса и дерева равен |BG| – проекции вектора \overrightarrow{BE} на линию BO, а |BF| – проекция скорости Ахиллеса на ось x. Полученный чертеж отличается от прежнего (рис. 2.23) тем, что скорости Ахиллеса и реки не равны. Теперь нужно найти соотношение между скоростью сближения u_L и проекцией скорости Ахиллеса u_x , т.е. между отрезками |BG| и |BF|.

Это можно сделать с использованием тригонометрических функций, но можно ограничиться только соображениями подобия. Поскольку DBCE – параллелограмм, то углы $\angle EDB$ и $\angle ECB$ равны. Следовательно, прямоугольные треугольники DFE и CGE подобны. Запишем соотношения подобия:

$$\frac{|FD|}{|DE|} = \frac{|GC|}{|EC|}. (2.48)$$

Длина |FD| равна $v-u_x$, а |GC| равна $u-u_L$, |DE|=|BC|=u, а . Подставляем в (2.48):

$$\frac{v - u_x}{u} = \frac{u - u_L}{v}. \tag{2.49}$$

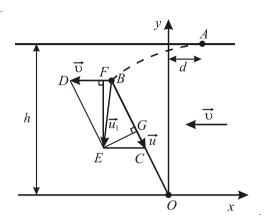


Рис. 2.29 Нахождение скорости сближения Ахиллеса и дерева

Отсюда:
$$v^2 - u_x v = u^2 - u_L u$$
. (2.50)

Окончательно:
$$u_L = u - \frac{v^2}{u} + u_x \frac{v}{u}$$
. (2.51)

Таким образом, соотношение между u_L и u_x найдено. Первые два члена в правой части уравнения — постоянны, коэффициент при u_x — тоже величина постоянная, Следовательно, график зависимости u_L от u_x — прямая линия, что мы уже получили в результате анализа численного решения [157].

Осталось найти время за которое Ахиллес доплывет до берега. Рассуждения аналогичны прошлому разу. Умножим обе части уравнения (2.31) на малый промежуток времени Δt .

$$u_{L}\Delta t = \left(u - \frac{v^{2}}{u}\right)\Delta t + \frac{v}{u}u_{x}\Delta t \tag{2.52}$$

В отличие от предыдущей задачи время движения у нас не бесконечно большое. Сумма всех $v_L \Delta t$ — это изменение расстояния от Ахиллеса до дерева. Вначале оно равно $L_0 = \sqrt{h^2 + d^2}$, затем Ахиллес

доплывет до дерева и расстояние до дерева станет равным 0. Здесь нужно обратить внимание школьников, что условие того, что Ахиллес доплывет до дерева является ОДЗ решения задачи.

Далее, $u_x \Delta t$ – это смещение Ахиллес по оси x. Сумма всех смещений равно по модулю величине d. Знак получается из следующих соображений. Поскольку по условию вначале Ахиллес стоял выше по течению, то сместился он в отрицательном направлении оси х. Следовательно, сумма всех $u.\Delta t$ равна «-d».

Осталось просуммировать $\left(u-\frac{v^2}{u}\right)\Delta t$. Выражение в скобках –

константа, а сумма всех Δt – это время движения Ахиллеса. Запишем, что у нас получилось:

$$\sqrt{h^2 + d^2} = \left(u - \frac{v^2}{u}\right) t_{\partial \text{вижения}} - \frac{v}{u} d \tag{2.53}$$

Отсюда мы уже можем найти время движения:

$$t_{\partial GUJKCEHUM} = \frac{u\sqrt{h^2 + d^2} + vd}{u^2 - v^2}.$$
 (2.54)

При d = 0 формула приобретает совсем красивый вид:

$$t_{\text{овижения}} = \frac{uh}{u^2 - v^2}. \tag{2.55}$$

Получив формулу, ее полезно сравнить с численными расчетами. d = 0 м, h = 100 м, u = 2 м/с, v = 1 м/с время движения 200/3 = 66,6667 с, что совпадает с численным расчетом [157].

Затем формулу можно проанализировать. Выше мы оговаривали, что формулой можно пользоваться только, если Ахиллес доплывет до берега, т.е. при u > v.

Рассмотрим частный случай, когда скорость течения равна нулю.

Тогда $t_{\text{движения}} = \frac{\sqrt{h^2 + d^2}}{dt}$, то есть, пловец просто плывет к дереву по прямой.

Заметим, что данная задача была решена без использования тригонометрических функций. Для разбора последующих задач они уже потребуются.

2.4.3. Преследование при движении цели по окружности

Движение по окружности изучается обычно в 9-м классе. Предлагаемая ниже задача не нужна для понимания последующего материала и потому при занятиях с учениками 7-го и 8-го класса ее можно пропустить, а с учениками 9-го класса и старше ее полезно разобрать для закрепления материала.

Залача

Ахиллес стоит в центре большого загона в виде круга радиуса R, а конь бежит вдоль забора с постоянной скоростью υ (рис. 2.30). Ахиллес начинает бежать за конем с постоянной скоростью ι , меньшей ι , причем Ахиллес все время бежит точно на коня. Какое будет расстояние между Ахиллесом и конем через время ι , много большее $2\pi R/\upsilon$? [28 (№ 10.66)]



Рис. 2.30 К задаче с преследованием по кругу

Численное решение

Отличие от предыдущих задач заключается в том, что движение коня двумерное, и нужно задать закон изменения координат коня от времени. Удобнее всего задать эти координаты, пользуясь понятием угловой скорости. Кроме этого, нужно знать соотношение между угловой и линейной скоростью:

$$\omega = v/R. \tag{2.56}$$

Если школьники еще не изучали это соотношение, его несложно ввести на занятиях.

Поместим начало координат в центр круга. Пусть вначале конь находится в точке B_1 (рис. 2.31). Тогда его координаты $x_{B1} = R$, $y_{B1} = 0$.

Поскольку он движется с постоянной угловой скоростью, то отрезок, соединяющий коня и начало координат повернется на угол $\alpha = \omega t = \upsilon t/R$. Тогда через время t конь будет в точке B_2 с координатами:

$$x_{B2} = R\cos\alpha = R\cos(vt/R), y_{B2} = R\sin\alpha = R\sin(vt/R).$$
 (2.57)

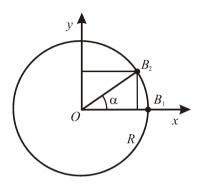


Рис. 2.31 Определение координат коня

Нужно обратить внимание учеников, что при таком задании движения конь движется против часовой стрелки и обсудить как нужно изменить знаки, чтобы конь стал двигаться в противоположенном направлении. Кроме того, следует обратить внимание, что конь может сделать много оборотов и угол $\alpha = vt/R$ может стать больше 2π радиан. Однако, формулы (2.57) верны даже при угле, больше 2π радиан, поскольку синус и косинус – периодические: функции:

$$\sin(2\pi + \alpha) = \sin\alpha. \tag{2.58}$$

В остальном алгоритм расчета похож на тот, который был использован, когда конь бежал оп прямой [157].

Нам потребуется пять столбцов: A – время, B и C – координаты коня x_B , и y_B , D и E – координаты Ахиллеса x_A и y_A , F – расстояние между Ахиллесом и конем.

Занесем начальные значения: времени — A2 = 0, координата коня x_B — B2 = R = 100 (м), координата коня y_B — C2, координата Ахиллеса x_A — D2 = 0, координата Ахиллеса y_A — E2 = 0, интервал времени Δt — G2 = 0,1 (c), радиус круга H2 = 100 (м), скорость коня — I2 = 5 (м/с), скорость Ахиллеса — J2 = 4 (м/с). Занесем в таблицу следующие формулы.

Ячейка	Формула электронной	Математическая			
	таблицы	формула			
A3	=A2+G\$2	$t_{n+1} = t_n + \Delta t$			
B2	=H\$2*COS(I\$2*A2/H\$2)	$x_{B,n} = R\cos(\upsilon t/R)$			
C2	=H\$2*SIN(I\$2*A2/H\$2)	$y_{B,n} = R\sin(\upsilon t/R)$			
D3	=D2+(B2-D2)*J\$2*G\$2/F2	$x_{A, n+1} = x_{A, n} + (x_{B, n} - x_{A, n}) u \Delta t / L_n$			
E3	=E2+(C2-E2)*J\$2*G\$2/F2	$y_{A, n+1} = y_{A, n} + (y_{B, n} - y_{A, n}) u \Delta t / L_n$			
F2	=SQRT((B2-D2)^2+(C2-E2)^2)	$L_{n} = \sqrt{\left(x_{A, n} - x_{B, n}\right)^{2} + \left(y_{A, n} - y_{B, n}\right)^{2}}$			

Аналогично предыдущей задаче копируем формулы (рис. 2.32) и строим траекторию Ахиллеса (рис. 2.33) [157].

<u>№ файл Правка Вид Вставка Формат Сервис Данные Окно Справка</u>										
	₽ ■ ₽	 a □ □	* X 🖦	® Ю +	@ Σ fs	A 160a	? °	Arial C	YR	
F2 = =KOPEHb((B2-D2)*2+(C2-E2)*2)										
	A	В	С	D	E	F	G	Н	1	J
1	t	Xb	Yb	Xa	Ya	L	dt	R	v	u
2	0	100	0	0	0	100	1	100	5	4
3	1	99,87503	4,997917	4	0	96,00521				
4	2	99,50042	9,983342	7,994576	0,208235	92,02647				
5	3	98,87711	14,94381	11,97195	0,633118	88,07555				
6	4	98,00666	19,86693	15,91879	1,283046	84,16519				
7	5	96,89124	24,7404	19,82007	2,166256	80,30914				
8	6	95,53365	29,55202	23,65879	3,290618	76,52226				
9	7	93,93727	34,28978	27,41586	4,663364	72,82048				
10	8	92,1061	38,94183	31,06986	6,290731	69,22079				
11	9	90,04471	43,49655	34,5969	8,177511	65,74111				
12	10	87,75826	47,94255	37,97061	10,32649	62,40015				
13	11	85,25245	52,26872	41,16212	12,73777	59,21701				
14	12	82,53356	56,46425	44,14034	15,40801	56,2108				
15	13	79,60838	60,51864	46,87243	18,3296	53,39998				
16	14	76,48422		49,32456	21,48983	50,80156				
17	15	73 16990	E8 1E388	51 /6305	24 9702	48 43033				
996	994	84,43302	-53,5823	26,42023	-75,5202	62,02222				
997	995	87,0055	49,2955							
998	996	89,36051	-44,8854							
999	997	91,49217	40,3631	37,40916		62,02222				
1000		93,39514	-35,74	40,89714	-68,766	62,02222				
1001										

Рис. 2.32 Вид электронной таблицы

Получается, что вначале Ахиллес добежал почти до границы загона, а затем стал бежать почти по идеальной окружности радиуса 80 м. Построим график расстояния между ними от времени (рис. 2.34) [157]. Видно, что

вначале расстояние уменьшилось до 37 м, а затем Ахиллес отстал на 60 метров и дальше расстояние практически не меняется. Если посмотреть на значения в столбце F, то видно, что в нижних строках расстояние между конем и Ахиллесом постоянно и равно 62 метра. Здесь снова нужно обратить внимание на точность расчетов.

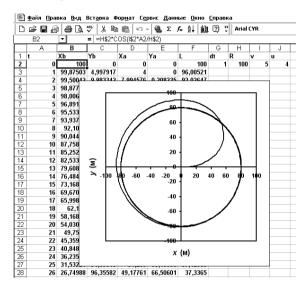


Рис. 2.33 Траектория движения Ахиллеса

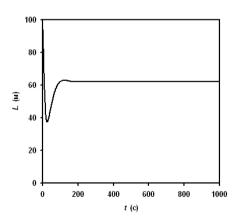
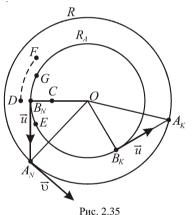


Рис. 2.34 Зависимость расстояние между конем и Ахиллесом от времени

Точность вычислений можно оценить из следующих соображений. Ахиллес бежит по прямой в течение 1 с. При скорости 4 м/с за это время он будет пробегать отрезки 4 м. Таким образом, ответ в задаче: расстояние равно 62 ± 4 (м). Уменьшая интервал времени, можно убедиться, что искомое расстояние стремится к 60 м [157]. В качестве тренировки можно попросить учеников самостоятельно рассчитать расстояния при разных скоростях коня и Ахиллеса.

Аналитическое решение

Аналитическое решение становится почти очевидным после того, как численным методом было получено, что Ахиллес движется по окружности. Это возможно только если у коня и Ахиллеса одинаковые угловые скорости. При этом скорость Ахиллеса должна быть направлена на коня. Этим условиям соответствует положения коня и Ахиллеса на рис. 2.35. Если конь и Ахиллес окажутся в точках A_n и B_n (рис. 2.35) и будут двигаться с одинаковыми угловыми скоростями, то такое взаимное положение будет сохраняться сколь угодно долго.



Решение задачи с бегом по кругу

Из равенства угловых скоростей коня и Ахиллеса можно найти соотношение радиуса загона R и радиуса круга R_A , по которому бежит Ахиллес: $\omega = R/\upsilon = R_A/u$. Отсюда $R_A = Ru/\upsilon$. И по теореме Пифагора находим расстояние между конем и Ахиллесом (рис. 2.35).

$$L^2 = R^2 - R_A^2 = R^2 \left(1 - \frac{u^2}{v^2} \right)$$
 или $L = R\sqrt{1 - \frac{u^2}{v^2}}$ (2.59)

Подставляя R=100 м, u=4 м/с, v=5 м/с, получим, что расстояние между конем и Ахиллесом – 60 м [157]. Ответ совпал с численным решением.

Устойчивость решения

На этом решение данной задачи можно считать законченным. Но если время позволяет можно задержаться и поговорить об устойчивости решения. Аналитическое решение было получено в предположении «если конь и Ахиллес окажутся в точках A_n и B_n » (рис. 2.35). Но как доказать, что они окажутся в таком взаимном расположении или близком к нему?

Для ответа на этот вопрос нужно ввести понятия устойчивого и неустойчивого равновесия [4]. Это можно сделать на примере шарика на поверхности.

На рис. 2.36 изображено три шарика в положении равновесия. Вверху изображен шарик в ямке. Если его чуть-чуть толкнуть, то он будет колебаться в ямке, пока колебания не затухнут и он снова не окажется в прежнем положении. Ниже изображен шарик на горке, если его даже несильно толкнуть, то он скатится с горки. Таким образом, между этими двумя положениями шарика большая разница. Оба шарика находятся в состоянии равновесия. Но первый шарик находится в устойчивом равновесии. Если его попытаться вывести из равновесия, то сила тяжести будет толкать его назад, в положение равновесия. Равновесие второго шарика неустойчиво, малейший толчок и равновесие не восстановится — шарик скатится.

Реально нельзя получить систему в неустойчивом равновесии. Теоретически можно поставить стальной шарик на конец иголки так, чтобы он не упал. Но практически это не реализуемо. Конечно, мы можем поместить шарик наверх горы, но только если там для него есть хотя бы маленькая ямка, пусть даже незаметная на глаз.

Кроме устойчивого и неустойчивого равновесия есть еще положение *безразличного* равновесия (нижний шарик). Если это шарик вывести из положения равновесия, то он не будет стремиться вернуться как первый шарик, но и не будет стремиться удалиться, как второй. Он может находиться в равновесии в любой точке плоскости. Ему безразлично, где остановиться и покоиться.

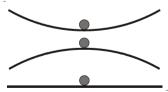


Рис. 2.36 Состояния равновесия – устойчивое, неустойчивое и безразличное

Понятие устойчивости и неустойчивости можно применить не только к равновесию, но и к состоянию системы вообще. Устойчивым называется такое состояние системы, при котором система, будучи незначительно выведена из своего состояния, стремится к нему вернуться. Применим эти понятия к нашей системе: конь и Ахиллес. Мы нашли решение: система находится в состоянии, когда конь и Ахиллес движутся с одинаковой угловой скоростью. Возникает вопрос, будет ли система устойчивой: если Ахиллес окажется в точке C или D (рис. 2.35), то будет ли он стремиться попасть на окружность радиуса R_A [157]?

Пусть Ахиллес находится в точке C. Тогда его скорость направлена на коня, следовательно, он стремится пересечь окружность радиуса R_A , т.е. он стремится к нашему решению. То есть, пока Ахиллес движется внутри окружности радиуса R_A , он движется по направлению к этой окружности.

Пусть теперь Ахиллес окажется в точке D. Ахиллес будет двигаться к изгороди, но его угловая скорость будет меньше угловой скорости коня. Следовательно, он начнет отставать и окажется в точке F. Тогда его скорость снова направлена в сторону окружности радиуса R_A . Таким образом, движение Ахиллеса по окружности радиуса R_A является устойчивым. Где бы ни был Ахиллес, он неизбежно будет приближаться к окружности радиуса R_A . Таким образом, было найдено решение задачи и получено, что это решение является устойчивым [157].

Можно еще заметить, что мы нашли расстояние между конем и Ахиллесом через длительное время (что и требовалось найти в задаче). Полученное нами аналитическое решение не дает ответа на вопрос, как долго Ахиллес будет приближаться к окружности радиуса R_A . В действительности, он будет стремиться достигнуть окружности радиуса R_A , бесконечно долго, как функция y=1/x бесконечно долго стремится достигнуть оси x. При этом Ахиллес будет многократно пересекать окружность радиуса x0. Правда, чтобы заметить это по траектории, рассчитанной с помощью электронной таблицы, нужно брать очень маленький интервал x1.

2.4.4. Преследование со многими участниками

Рассмотрим задачу, когда в преследовании задействовано несколько участников. Эту задачу в разных формулировках можно встреить в сборниках задач повышенной сложности [199 (№1.190)].

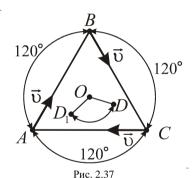
Залача

На плоскости имеется равносторонний треугольник со стороной a, в вершинах которого сидят три черепахи (рис. 2.37). В некоторый момент времени все три черепахи одновременно начинают ползти с одинаковыми скоростями v, причем каждая из них ползет точно к своей соседке слева. Вопрос, через какое время они встретятся?

Предварительный анализ

Очевидно, что нужно использовать условие того, что треугольник равносторонний. Из соображений симметрии ясно, что черепахи встретятся в центре треугольника. Школьники могут не знать как использовать условие симметрии, поэтому на этом вопросе придется остановиться подробнее.

Прежде всего онжун понять. какая TVT симметрия. равностороннего треугольника имеется осевая симметрия (рис. 2.37). При повороте на 120° вокруг оси система переходит в себя. Осью является центр треугольника. При этом важно подчеркнуть, что при повороте не меняется не только положение черепах, но и направление их скоростей. Обозначим вершины треугольника A, B и C, соответственно черепах также назовем A, Bи С. Предположим, что черепахи встретятся не в центре треугольника – точке O, а, например, в точке D. Повернем систему вокруг точки O на 120° . Точка D тоже повернется и перейдет в точку D_1 . Но с другой стороны, расположение черепах останется прежним, следовательно, черепахи должны встретиться в точке D. Но они не могут встретиться одновременно в точке Dи в точке D_1 . Противоречие. Черепахи могут встретиться только в центре треугольника, который при повороте переходит сам в себя [157].



Задача с тремя черепахами

Численное решение

Для численного решения задачи мы воспользуемся формулами (2.41). Но тогда, чтобы определить значение проекций скорости первой черепахи, надо знать координаты второй черепахи. Чтобы определить изменение координат второй черепахи, нужно знать координаты третьей черепах. Получается, что в электронной таблице нам потребуется 6 столбцов для координат x и y всех трех черепах. придется рассчитывать координаты всех трех черепах. Кроме этого, потребуется столбец для массива времени и три столбца для расстояний между черепахами. Задача получается более громоздкой, чем раньше. Чтобы не запутаться, составим таблицу.

Столбец	Содержание
A	Шкала времени
В	Черепаха A , координата — x_A .
С	Черепаха A , координата — y_A .
D	Черепаха B , координата – x_B .
Е	Черепаха B , координата — y_B .
F	Черепаха C , координата – x_C .
G	Черепаха C , координата – y_C .
Н	Расстояние между черепахами A и $B - L_{AB}$.
I	Расстояние между черепахами B и $C - L_{BC}$.
J	Расстояние между черепахами C и $A-L_{CA}$.

Поскольку задача симметрична относительно центра треугольника, имеет смысл поместить начало координат в центр треугольника. Пусть черепаха B находится на оси y (рис. 2.38) [157]. Далее нам потребуется занести значения скорости черепах и сторону треугольника. Черепахи не могут двигаться со скоростью $5\,\text{M/c}-9$ то нереально. Для большей реалистичности примем скорость черепах равной $1\,\text{см/c}$ (0,01 м/c). Тогда сторону треугольника возьмем не $100\,\text{м}$, а $1\,\text{m}$, иначе время движения будет очень большим. Поскольку черепахи движутся медленно, то интервал времени Δt можно $1\,\text{c}$. Теперь занесем значения в следующие ячейки:

Ячейка	Содержание	Значение
K2	Временной интервал Δt	1
L2	Скорость черепах	0,01
M2	Сторона треугольника	1

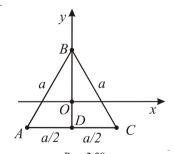


Рис. 2.38 Координаты черепах

Для задания начального положения черепах нужно вычислить координаты вершин. У правильного треугольника высота BD (она же биссектриса и медиана) равна $a\sqrt{3}/2$, а точка пересечения медиан делит медианы в соотношении 1 к 2. Таким образом, координаты вершин треугольника будут равны (рис. 2.38): $A(-a/2, -a\sqrt{3}/6)$, $B(0, a\sqrt{3}/3)$, $C(a/2, -a\sqrt{3}/6)$.

Занесем начальные координаты черепах:

Ячейка	Значение	Содержание ячейки
A2	0	0
B2	-a/2	= -M\$2/2
C2	$-a\sqrt{3}/6$	= -М\$2*КОРЕНЬ(3)/6
D2	0	0
E2	$a\sqrt{3}/3$	=М\$2*КОРЕНЬ(3)/3
F2	a/2	=M\$2/2
G2	$-a\sqrt{3}/6$	= -М\$2*КОРЕНЬ(3)/6

Осталось занести формулы (2.41) и формулы для вычисления расстояния между черепахами:

Ячейка	Формула электронной	Математическая
	таблицы	формула
H2	SQRT((B2-D2)^2+(C2-E2)^2)	$L_{AB, n} = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$
I2	SQRT((D2-F2)^2+(E2-G2)^2)	$L_{BC, n} = \sqrt{(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2}$
J2	SQRT((F2-B2)^2+(G2-C2)^2)	$L_{CA, n} = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2}$
A3	A3=A2+K\$2	$t_{n+1} = t_n + \Delta t$
В3	B3=B2+K\$2*L\$2*(D2-B2)/H2	$x_{A, n+1} = x_{A,n} + \Delta t \ v(x_{B,n} - x_{A,n}) / L_{AB, n}$
C3	C3=C2+K\$2*L\$2*(E2-C2)/H2	$y_{A, n+1} = y_{A,n} + \Delta t \upsilon (y_{B,n} - y_{A,n}) / L_{AB, n}$
D3	D3=D2+K\$2*L\$2*(F2-D2)/I2	$x_{B, n+1} = x_{B,n} + \Delta t \ v(x_{C,n} - x_{B,n}) / L_{BC, N}$
E3	E3=E2+K\$2*L\$2*(G2-E2)/I2	$y_{B, n+1} = y_{B,n} + \Delta t \upsilon (y_{C,n} - y_{B,n}) / L_{BC, N}$

F3	F3=F2+K\$2*L\$2*(B2-F2)/J2	$x_{C, n+1} = x_{C,n} + \Delta t \upsilon \left(x_{A,n} - x_{C,n} \right) / L_{AC,n}$
G3	G3=G2+K\$2*L\$2*(C2-G2)/J2	$y_{C, n+1} = y_{C,n} + \Delta t \upsilon (y_{A,n} - y_{C,n}) / L_{AC, n}$

Осталось откопировать формулы до строки №1000 и построить траекторию черепахи A (рис. 2.39) [157]. Как и в предыдущих задачах, кривая не напоминает известные функции. К сожалению, на графике не виден первоначальный треугольник. Поэтому для наглядности имеет смысл вывести траектории всех черепах.

Чтобы построить траекторию сразу трех черепах в MS Excel и OpenOffice.org Calc нужно произвести следующие действия [157].

- 1. Сначала нужно отселектировать (выбрать) столбцы. Подведем курсор к столбцу В (к букве «В», которая над ячейкой В1) и нажмем левую кнопку мыши. Столбец В окрасится в темный цвет. Затем нажмем клавишу «Shift» и, не отпуская ее, подведем курсор к столбцу Е, (к букве «Е») и снова нажмем левую кнопку мыши. Тогда окрасятся столбцы В, С, D и Е.
- 2. В верхнем меню выберем: «Вставка» «Диаграмма» «Точечная» «Вид сглаживающая линия без маркеров». Остальные параметры можно оставить без изменения и нажать кнопку «Готово». По умолчанию, в электронной таблице будут построены графики зависимостей y_A от x_A , x_B от x_A , y_B от x_A .
- 3. Теперь нужно исправить ряды данных. Подведем курсор к пустому пространству на диаграмме и нажмем правую кнопку мыши. Появится меню. Выберем пункт «Исходные данные». Там две закладки «Диапазон данных» и «Ряд». Выберем закладку «Ряд». Слева внизу найдите квадратик «Ряд» (рис. 2.40). Там строки: « y_A », « x_B » и « y_B ». Строчка « y_A » выделена темным цветом. Правее будет строчка «Значения X:=Лист1!\$В\$2:\$В\$1000».

Это значит, что значениями координаты x для первого графика будут значения из ячеек B2–B1000 первого листа электронной таблицы. Следующая строка «Значения Y:=Лист1!\$С\$2:\$С\$1000» означает, что значениями координаты y для первого графика будут значения из ячеек C2–C1000 первого листа (впрочем лист y нас всего один). Подведем курсор к квадратику «Ряд», ко второй строке « x_B » и щелкнем левой кнопкой мыши. Появится надпись: «Значения X:=Лист1!\$В\$2:\$В\$1000», и «Значения Y:=Лист1!\$D\$2:\$D\$1000».

Нам нужно, чтобы второй график отображал зависимость y_B от x_B . То есть, значения для оси x должны браться из столбца D, а для оси y из столбца E. Следовательно, надо изменить параметры диаграммы на «Значения X:=Лист1!\$D\$2:\$D\$1000», и «Значения Y: =Лист1!\$E\$2:\$E\$1000». После того как изменения сделаны, второй график будет похож на первый, повернутый на 120° по часовой стрелке. Далее изменим параметры третьего графика.

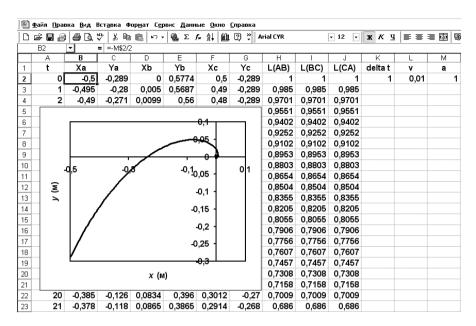


Рис. 2.39 Траектория черепахи *A*

4. Снова открываем «Исходные данные» — «Ряд». Щелкаем мышкой по третьей строке « y_B ». Высвечиваются строки: «Значения X:=Лист1!\$В\$2:\$В\$1000», и «Значения Y: =Лист1!\$Е\$2:\$Е\$1000». Нам нужен третий график — траектория третьей черепахи, т.е. зависимость y_C от x_C . Значит, значения для оси x будем брать из столбца F, а для оси y — из столбца G. Меняем параметры диаграммы на «Значения X:=Лист1!\$F\$2:\$F\$1000», и «Значения Y: =Лист1!\$G\$2:\$G\$1000» (рис. 2.40). Все три траектории примут одинаковую форму, что и следовало ожидать в силу симметрии задачи [157].

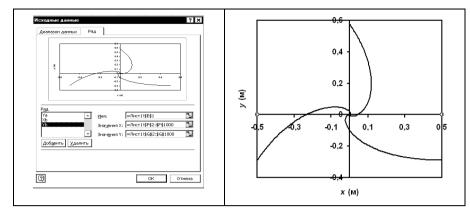


Рис. 2.40 Траектории трех черепах

Чтобы определить время движения черепах, нужно понять, что считать окончанием движения, поскольку численные методы приближенные, поэтому расстояния между ними не станут *точно* равны нулю. Наша точность составляет $v\Delta t=0.01$ м. Поэтому посмотрим, когда расстояния между ними перестанут уменьшаться. Затем, черепахи будут вертеться вокруг точки O на расстоянии порядка 0.01 м.

Расстояние между черепахами перестает уменьшаться к 70 строке: в строке №70 – 0,0097 м, а в строке №71 – 0,0101 м. Считаем время движения из ячейки A70=68 с. Таким образом, мы получили, что время движения черепах – 68 ± 1 (c).

Далее исследуем сходимость [157]. Уменьшим шаг времени до 0,1 с, занеся в ячейку K2 число 0,1. Минимальное значение расстояния — 0,0009 м достигается в 670 строке. Следовательно, время движения черепах — $66,8\pm0,1$ (c).

Уменьшим интервал времени до $\Delta t = 0.01$ с. Копируем формулы до строки №7000. Монотонное уменьшение расстояния прерывается в строке №6670. Время движения черепах – 66.68 ± 0.01 (c).

Таким образом, видно, что время движения черепах стремится к значению 66.6666...с.

В качестве самостоятельного упражнения школьникам можно предложить найти время сближения черепах, если вначале они были расположены в вершинах квадрата, пятиугольника... и т.д. Больших проблем здесь не возникнет, придется только использовать большое число столбцов (по три на каждую новую черепаху) и не запутаться с формулами: кто на кого ползет. При использовании языков программирования не составит больших

проблем создать для координат черепах массив переменной размерности и численно посчитать движение произвольного числа черепах.

Посла того, как разобрано численное решение, можно дать аналитическое. В задачниках можно встретить два способа решения задачи [19, 59, 66, 157]. Рассмотрим их.

Аналитическое решение №1

Будем решать задачу сразу для N-угольника, Пусть угол при вершине равен $\alpha = 180^{\circ} \cdot (N-2)/N = 180^{\circ} - 360^{\circ}/N$.

Исходя из накопленного опыта решения задач на преследование, можно попытаться использовать уже знакомый прием — найти скорость сближения черепах. Поскольку задача симметрична, нам достаточно найти время сближения двух любых черепах, например, A и B. Из симметрии задачи следует, что в любой момент времени черепахи образуют правильный N-угольник. Сделаем чертеж (рис. 2.41). Отложим скорости черепах v_A и v_B . Обозначим их: $\overrightarrow{v_A} = \overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{v_B} = \overrightarrow{BE}$. Перейдем в систему отсчета одной из черепах, например, A. В этой системе отсчета черепаха A неподвижна, а чтобы найти скорость черепахи B, надо из ее скорости вычесть скорость черепахи A. Отложим на рис. 2.41 вектор \overline{BF} , который равен v_A по величине, но противоположен по направлению. Тогда скорость черепахи B в новой системе отсчета $\overline{v_1}$ равна:

$$\overrightarrow{v_1} = \overrightarrow{v_R} - \overrightarrow{v_A} = \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{BG} . \tag{2.60}$$

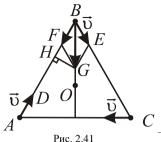
Из рис. 2.41 видно, что:

$$|BG| = 2|BE|\cos(\alpha/2) = 2v\cos(\alpha/2). \tag{2.61}$$

Здесь следует обратить внимание школьников на «странное» движение черепах. Получается, что скорость черепахи B направлена *мимо* черепахи A. Возникает вопрос: как же черепахи встретятся? Ответ состоит в том, что в системе отсчета, связанной с черепахой A, черепаха B ползет не прямолинейно. Направление ее скорости все время меняется. Аналогичная проблема возникала когда мы рассматривали направление скорости Ахиллеса в системе отсчета, связанной с конем [157].

Скорость сближения равна проекции вектора \overrightarrow{BG} на линию AB (рис. 2.41):

$$v_L = v_1 \cos(\alpha/2) = 2v \cos^2(\alpha/2) \tag{2.62}$$



Скорость сближения черепах

Скорость сближения оказалась постоянной, следовательно, не будет сложным вычислить время встречи:

$$t = \frac{a}{v_L} = \frac{a}{2v\cos^2(\alpha/2)}.$$
 (2.63)

Подставим значения для случая трех черепах в вершинах треугольника: $\alpha = 60^\circ$: $\cos^2\left(\alpha/2\right) = \left(\sqrt{3}\,/\,2\right)^2 = 3/4$. Соответственно:

$$t = \frac{2a}{3v} \tag{2.64}$$

Осталось сравнить полученный результат с численным расчетом: t = 2/0,03 = 66,666...(c). Результаты аналитических и численных расчетов совпали [157].

Аналитическое решение №2

Задачу можно решить еще проще, если искать не скорость сближения черепах, а скорость сближения черепахи с местом встречи (точкой O). Из симметрии задачи следует, что в любой момент времени черепахи образуют правильный N-угольник. Проекция скорости черепахи к центру N-угольника равна (проекция BE на BO на рис. 2.41):

$$v_o = v\cos(\alpha/2). \tag{2.65}$$

Эта скорость постоянна. Расстояние до центра описанной окружности N-угольника равно:

$$R = \frac{a}{2\cos(\alpha/2)} \,. \tag{2.66}$$

Следовательно, время движения составит:

$$t = \frac{R}{v_o} = \frac{a}{2v\cos^2(\alpha/2)},\tag{2.67}$$

что совпадает с предыдущим ответом [157].

2.4.5. Проектно-исследовательские работы, которые могут быть выполнены в рамках задач на преследование

На основе разобранных задач на преследование, можно предложить следующие направления проектно-исследовательских работ школьников. Правда, для успешной реализации этих работ электронной таблицы может оказаться недостаточно и придется использовать языки программирования [157].

- 1) Можно предложить школьникам рассмотреть преследование коня Ахиллесом, когда конь бежит по квадрату, треугольнику и т.п. При этом получаются весьма затейливые траектории. Можно сделать движение коня или Ахиллеса неравномерным, ограничить время погони... и т.д.
- 2) Рассматривается движение большого числа черепах, расположенных в вершинах (не обязательно правильного) *N*–угольника. В качестве варианта можно рассмотреть движение черепах не обязательно к своей ближайшей соседке, можно сделать движение черепах не равномерным. При этом также могут получиться затейливые траектории.
- 3) Рассчитывается задача преследования, когда один из участников движется по заданной траектории (прямая, круг, квадрат и т.д.), а остальные гонятся по цепочке друг за другом: кошка за мышкой, Жучка за кошкой и т.д. [157].

Достоинствами этих работ является то, что они могут быть выполнены даже учениками 7-го класса. К недостаткам следует отнести то, что полученные результаты, скорее всего, не с чем будет сравнить.

Подводя итоги второй главы, можно отметить, что применение простейших вычислительных алгоритмов, которые можно объяснить даже школьникам 7-го класса, и реализовать с помощью электронных таблиц (т.е. не обучая языкам программирования), позволяет рассчитывать очень сложные виды движения, которые обычно в школе не рассматриваются.

В следующей главе мы перейдем к задачам, имеющим экспериментальное подтверждение.

Глава 3.

Численное моделирование с помощью электронных таблиц задач повышенной сложности, не решаемых в рамках школьной программы, но имеющих хорошо известное решение (на примере задач небесной механики)

Рассмотрим применение численного моделирования движения тел с использованием схемы Эйлера для решения задач повышенной сложности с решением, известным из эксперимента. В качестве примера подобных задач мы выбрали движение небесных тел в Кеплеровском приближении (т.е. когда рассматривается притяжение планет массивным Солнцем, но не учитывается взаимодействия планет друг с другом). Сделанный выбор обусловлен следующими причинами.

- одаренные школьники (в области физики) уже к 7-му классу знают из популярной литературы или образовательных интернет-сайтов о законах Кеплера, о том, что планеты обращаются по эллипсам, но, к сожалению, школьный учебник физики не может удовлетворить их любопытство, почему так происходит ввиду того, что для расчета эллиптической орбиты требуется знание производных;
- численный расчет движения планет не представляется сложным после изучения закона всемирного тяготения.

Как и в предыдущей главе, мы будем использовать для расчетов электронную таблицу *MS Excel* или ее аналог *OpenOffice.org Calc*. Однако все алгоритмы можно воспроизвести с помощью любого языка программирования.

3.1. Применение разностных схем для решения задач с известной зависимостью ускорения от координаты

В предыдущей главе мы рассчитывали движение тела, когда мы знали зависимость скорости тела от времени и координаты. При переходе к динамике будем пользоваться основным уравнением динамики – II законом Ньютона:

$$\vec{F} = m\vec{a} \,, \tag{3.1}$$

где \vec{F} — равнодействующая сила, в общем случае зависящая от времени, координат, скорости тела, а также от положения других тел рассматриваемой

системы. В данной главе мы ограничимся случаем, когда сила в явном виде зависит от координаты тела. Для моделирования движения небесных тел нам нужно развить нашу методику численного моделирования для задач, когда известно, как меняется не скорость, а ускорение тела [161].

Когда мы пользовались схемой Эйлера в кинематике, мы разбивали движение тела на множество малых одинаковых интервалов времени Δt , на каждом из которых мы считали движение равномерным прямолинейным. Теперь мы будем расчеты проводить в два этапа. Рассмотрим для простоты движение вдоль одной координаты. На первом этапе найдем изменение скорости. Если скорость вначале была равна v_1 , а ускорение равно a_1 , то через время Δt скорость тела станет равна:

$$v_2 = v_1 + a_1 \Delta t . \tag{3.2}$$

На втором этапе найдем изменение координаты. Если координата вначале была равна x_1 , а скорость равна v_1 , то через время Δt координата тела станет равна:

$$x_2 = x_1 + v_1 \Delta t . \tag{3.3}$$

Продолжая для последующих моментов времени, получим:

$$v_{n+1} = v_n + a_n \Delta t;$$

$$x_{n+1} = x_n + v_n \Delta t.$$
 (3.4)

Здесь у школьников может возникнуть вопрос. Если он не возник, то можно обратить их внимание на то, что уравнение (3.2) описывает равноускоренное движение. Получается, что мы считаем движение тела за время Δt уже не равномерным, а равноускоренным, но тогда нужно применять формулу для равноускоренного движения.

$$x_2 = x_1 + v_1 \Delta t + a_1 (\Delta t)^2 / 2 = x_1 + (v_1 + v_2) \Delta t / 2,$$
 (3.5)

то есть пользоваться методом трапеций [161].

Далее остается обобщить эти формулы на случай когда движение происходит не по прямой, а на плоскости:

$$\begin{aligned}
\upsilon_{x,\,n+1} &= \upsilon_{x,\,n} + a_{x,\,n} \Delta t ; \\
\upsilon_{y,\,n+1} &= \upsilon_{y,\,n} + a_{y,\,n} \Delta t ; \\
x_{n+1} &= x_n + (\upsilon_{x,\,n} + \upsilon_{x,\,n+1}) \Delta t / 2 ; \\
y_{n+1} &= y_n + (\upsilon_{y,\,n} + \upsilon_{y,\,n+1}) \Delta t / 2 .
\end{aligned} (3.6)$$

Получив уравнения в общем виде, можно переходить к конкретным задачам.

3.2. Моделирование движения небесных тел в Кеплеровском приближении

Школьники 9-го класса изучают закон всемирного тяготения Ньютона, а школьникам младшего возраста его нужно объяснять. Согласно этому закону между всеми телами действуют сила, равная:

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \,, \tag{3.7}$$

где m_1 и m_2 — массы тел, r — расстояние между ними, а G — гравитационная постоянная. Сила направлена вдоль прямой, соединяющей тела.

Здесь следует остановиться и объяснить, что этот закон применим к телам – материальным точкам или телам сферической формы (в последнем случае r – расстояние между центрами сфер) [78, 224].

Дальнейшие задачи будем решать в следующих модельных предположениях (Кеплероское приближение) [173]:

- Солнце и планеты мы считаем материальными точками, поскольку расстояние между ними много больше их размеров;
- масса Солнца много больше массы остальных планет, поэтому будем считать, что они планеты обращаются вокруг Солнца, а не вокруг центра масс солнечной системы;
- пренебрежем взаимным притяжением планет.

Кроме этого мы отдельно рассмотрим движение спутников вокруг Земли. Здесь нужно сделать следующие модельные предположения:

- спутники мы считаем материальными точками, а Землю мы считаем идеальным шаром (что не очень точно, но учитывать ее приплюснутость у полюсов слишком сложно);
- масса Земли много больше массы спутников, поэтому можно считать, что спутники обращаются вокруг Земли, а не вокруг общего центра масс (что выполняется для всех искусственных спутников, но не для Луны [173]);
- пренебрежем влиянием Луны, других спутников и орбитальным движением вокруг Солнца.

Рассмотрим для примера движение Земли вокруг Солнца (рис. 3.1). Если пренебречь влиянием других планет, то на Землю действует единственная сила со стороны Солнца, по закону всемирного тяготения она равна:

$$\left| \overrightarrow{F} \right| = G \frac{m_C m_3}{r_0^2} \,, \tag{3.8}$$

где m_C и m_3 — массы Солнца и Земли, а r_0 — расстояние между ними. Далее запишем второй закон Ньютона:

$$\vec{F} = m_3 \, \vec{a_0} \,, \tag{3.9}$$

где \vec{a}_0 – *центростремительное* ускорение Земли. Считая, что Земля движется вокруг Солнца по окружности с постоянной скоростью, можно вычислить скорость орбитального движения по формуле:

$$\left| \vec{a}_{0} \right| = \left| \vec{v}_{0} \right|^{2} / r_{0} , \qquad (3.10)$$

где $|\vec{v}_0|$ – значение орбитальной скорости Земли. Из формул (3.8)–(3.10) получаем:

$$\left| \overrightarrow{F} \right| = G \frac{m_C m_3}{r_0^2} = m_3 \left| \overrightarrow{a_0} \right| = \frac{m_3 \left| \overrightarrow{v_0} \right|^2}{r_0}$$
, или: (3.11)

$$\left|\vec{v}_0\right| = \sqrt{Gm_C / r_0} \ . \tag{3.12}$$

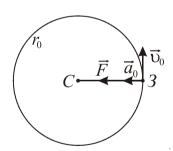


Рис. 3.1 Круговое движение Земли вокруг Солнца

Иногда у школьников возникает вопрос о наличии центробежной силы. Поскольку непонимание может привести к путанице, на этом вопросе лучше остановиться. В инерциальной системе отсчета нет центробежной силы, на планету действует только сила притяжения со стороны Солнца, и она движется с центростремительным ускорением [224].

Учет центробежной силы необходим, когда мы переходим в неинерциальную систему отсчета, где планета неподвижна. В этой системе отсчета мы не можем записать II закон Ньютона как раньше, поскольку ускорение неподвижного тела равно нулю. Получилась бы неверная формула: $G m_c m/r_0^2 = 0$.

Чтобы онжом было пользоваться законами Ньютона неинерциальной системе отсчета, вводят дополнительную силу, называемую силой *инерции*. Обозначим ее F_1 . Тогда II закон Ньютона в проекции на ось x, соединяющую тело и центр Солнца, запишется: $G m_c m / r_0^2 + F_1 = 0$. Чтобы получилось соответствие с формулой (3.11), сила инерции F_1 должна быть равна: $F_1 = -m|\vec{v}_0|^2/r_0$. Эта сила инерции и называется центробежной [224]. Равна она массе тела, умноженной на центростремительное ускорение, и направлена сторону, противоположенную центростремительному ускорению.

Таким образом, можно решать задачу в инерциальной системе отсчета, тогда центробежной силы нет, но есть центростремительное ускорение. Можно решать задачу в неинерциальной системе отсчета, где нет центростремительного ускорения, но нужно учитывать центробежную силу. Главное, не посчитать их вместе.

Формула (3.12) определяет скорость, при которой Земля или другая планета движется вокруг Солнца по окружности. В качестве самостоятельного упражнения можно предложить школьник вычислить скорость для движения спутника по круговой орбите вблизи Земли, т.е. первую космическую скорость.

Обычно у школьников возникает вопрос: на каком расстоянии от поверхности Земли считать эту скорость. Здесь нужно напомнить, что реально на высоте 200 км плотность атмосферы настолько мала, что там могут летать спутники. Поскольку эта высота много меньше радиуса Земли $R_0 = 6380$ км (на экваторе), то в формулу (3.12) можно подставить значение радиуса Земли.

Масса Земли составляет $5,976\cdot10^{24}$ кг, гравитационная постоянная $G=6,672\cdot10^{-11}$ м³/(кг·с²) [6]. Получается, что первая космическая скорость равна 7905 м/с.

Для дальнейшего нам потребуется зависимость периода обращения от радиуса орбиты. Из предыдущих формул получается, что время одного оборота спутника составит:

$$T = \frac{2\pi R_0}{v} = \frac{2\pi R_0}{\sqrt{Gm_3/R_0}} = \frac{2\pi R_0 \sqrt{R_0}}{\sqrt{Gm_3}}.$$
 (3.13)

Получилось, что квадрат периода обращения пропорционален радиусу в кубе [224]. Надо предложить школьникам запомнить этот результат.

Подставляя данные в формулу, найдем, за какое время спутник на околоземной орбите облетит вокруг Земли: $T=2\pi\,R_0/\upsilon=6,28\cdot6380/7,9=5072$ (c). Получается примерно полтора часа. Именно столько времени провел 12 апреля 1961 г. на орбите Юрий Гагарин, совершая первый пилотируемый космический полет.

Разобрав стандартные школьные задачи, связанные с законом всемирного тяготения, перейдем к задачам повышенной сложности.

3.2.1. Вывод I закона Кеплера из закона всемирного тяготения

В начале XVII века астроном Иоганн Кеплер (1571–1630) открыл три закона движения планет, названные впоследствии его именем. Эти законы были открыты на основе наблюдений за звездным небом самого Кеплера, а также многочисленных наблюдений его учителя Тихо Браге (1546–1601) [53]. Открыты они были задолго до открытия закона всемирного тяготения и даже до рождения Исаака Ньютона (1643–1727).

Поставим **задачу:** получить законы Кеплера как следствие закона всемирного тяготения путем численного моделирования.

Первый закон Кеплера

Все планеты движутся по эллипсам, в одном из фокусов которого находится Солнце [173, 224].

Определение эллипса

Прежде всего, нужно разобрать со школьниками вопрос: что такое эллипс?

Возьмем две точки A и B, которые назовем фокусами эллипса (рис. 3.2). Эллипс — это множество всех точек, от которых сумма расстояний до фокусов постоянна [117, 173].

Свойства эллипса

Одного определения мало. Нужно разобрать еще свойства эллипса. На рис. 3.2 изображен эллипс. Из определения следует, что сумма расстояние от любой точки эллипса до точек A и B постоянна и равна отрезку |CD|:

$$|AK_1| + |BK_1| = |AK_2| + |BK_2| = |AK_3| + |BK_3| = |AC| + |BC| = |CD|.$$

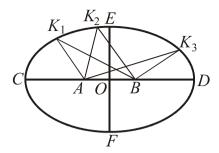


Рис. 3.2 К определению эллипса

Отрезок CD называется большой осью эллипса, а перпендикулярный ему отрезок EF — малой осью эллипса. Степень вытянутости эллипса характеризуется эксцентриситетом — отношением расстояния между фокусов к длине большой оси [117]:

$$e = \frac{|AB|}{|CD|}. (3.14)$$

Найдем соотношение между большой, малой осями и эксцентриситетом. По определению эллипса |EA| + |EB| = |CD|, отсюда |EA| = |CD|/2 = |CO|. По теореме Пифагора $|EA|^2 = |OE|^2 + |OA|^2$. По определению эксцентриситета: |OA| = e|CO|. Отсюда получаем: $|CO|^2 = |OE|^2 + e^2 |CO|^2$ или $|OE|^2 / |CO|^2 = 1 - e^2$. Таким образом, отношений осей равно:

$$\left| EF \right| / \left| CD \right| = \sqrt{1 - e^2} \ . \tag{3.15}$$

Следует заметить, что окружность – частный случай эллипса, когда фокусы совпадают. Эксцентриситет окружности равен нулю. Орбиты большинства планет очень близки к круговым. Например, у Земли эксцентриситет равен 1/59 = 0,017, а отношение (|CD| - |EF|)/|CD| составляет всего 1/7000 [173]. Эллиптичность земной орбиты практически невозможно изобразить. Если вы на листе бумаги нарисовать циркулем со стержнем толщиной 0,1 мм орбиту Земли в виде окружности радиуса 30 см, то эллиптическая орбита уместится внутри толщины нарисованной линии. Поэтому для не астронома земную орбиту можно смело считать окружностью.

Выразим через эксцентриситет минимальное и максимальное расстояние от планеты до Солнца. Пусть Солнце находится в фокусе B (рис. 3.2). Расстояние от планеты до Солнца будет минимальным, когда планета будет в точке D, а максимальным, когда планета будет в точке C. Минимальное расстояние равно:

$$|BD| = 0.5(|CD| - |AB|) = 0.5(|CD| - e|CD|) = 0.5|CD|(1-e).$$
 (3.16)

А максимальное равно:

$$|BC| = |CD| - |BD| = |CD| - 0.5|CD|(1 - e) = 0.5|CD|(1 + e).$$
 (3.17)

Таким образом, половина большой оси 0.5|CD| — это среднее между минимальным и максимальным расстоянием от планеты до Солнца.

Полученные значения важны, поскольку в астрономических таблицах указывается именно величина большой полуоси (половина большой оси) и эксцентриситет орбиты [6].

Астрономические единицы

Для расчетов астрономических величин неудобно пользоваться системой СИ. Действительно, расстояние от Земли до Солнца (длина большой полуоси) равно 149,6 миллионам км. С такими гигантскими числами работать сложно. Поэтому мы будем пользоваться не единицами СИ, а единицами длины, принятыми в астрономии [173]. Длину будем измерять в астрономических единицах – «а.е.».

Астрономическая единица равна половине длины большой оси орбиты Земли, т.е. среднему между минимальным и максимальным значением расстояния Земли до Солнца

Поскольку эксцентриситет орбиты Земли равен 1/59, то минимальное расстояние от Земли до Солнца равно (1-1/59)=0,983 а.е., а максимальное -(1+1/59)=1,017 а.е.

Скорость движения планет будем выражать в «а.е./год». Один год — это 365,256 суток или $60\cdot60\cdot24\cdot365,256=31558$ тысяч секунд.

Поскольку школьники столкнулись с новой (астрономической) системой единиц, то полезно произвести пересчет из одной системы, например, предложить им перевести величину средней орбитальной скорости Земли (29,78 км/с) в астрономические единицы. У них должно получиться, что средняя орбитальная скорость Земли равна $\upsilon=29,78\cdot31558\cdot1000/149,6/1000000=6,282$ (а.е./год).

После того как ученики получат это число, можно заметить, что полученное значение легко проверить, поскольку Земля проходит за год

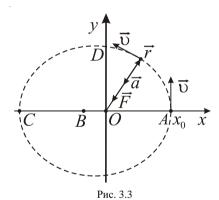
длину $2\pi r$, где r – радиус орбиты Земли. Значит длина орбиты 2π а.е. А скорость – 2π а.е./год.

Для расчетов еще потребуется величина Gm_C . Масса Солнца составляет $1,989\cdot10^{30}$ кг, гравитационная постоянная равна $6,672\cdot10^{-11}$ м $^3/(\text{кг}\cdot\text{c}^2)$, их произведение $1,327\cdot10^{20}$ м $^3/\text{c}^2$. Переведем в наши единицы: $Gm_C=1,327\cdot10^{20}\cdot(31,557\cdot10^6)^2/(149,6\cdot10^9)^3=39,47$ а.е. $^3/\text{год}^2$. Теперь проведем численные расчеты, используя новые единицы.

Численный расчет круговой орбиты

После того, как ученики разобрались с основными свойствами эллипса, и астрономическими единицами, можно перейти к решению задач численными методами (численному моделированию). Найдем закон движения планеты солнечной системы.

Поместим в начало координат Солнце, а планету – в точку A с координатами $x=x_0,\ y=0.$ Зададим начальную скорость в направлении перпендикулярном радиусу: $v_x=0,\ v_y=v_0$ (рис. 3.3). В Кеплеровском приближении движение планеты происходит в одной плоскости [173], поэтому нам достаточно указать две оси.



К построению алгоритма в электронной таблице

Запишем закон всемирного тяготения в проекции на оси (рис. 3.4):

$$F_{x} = -G\frac{m_{c}m}{r^{2}}\cos\alpha = -G\frac{m_{c}m}{r^{2}}\frac{x}{r};$$

$$F_{y} = -G\frac{m_{c}m}{r^{2}}\sin\alpha = -G\frac{m_{c}m}{r^{2}}\frac{y}{r},$$
(3.18)

где m_C – масса Солнца, а m – масса планеты. Знак «минус» означает, что

действует сила притяжения, а не отталкивания.

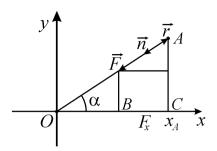


Рис. 3.4. К вычислению проекции силы

Тогда из II закона Ньютона мы можем записать проекции ускорения планеты:

$$a_x = -G\frac{m_C}{r^3}x$$
; $a_y = -G\frac{m_C}{r^3}y$. (3.19)

В электронной таблице нам потребуется 8 столбцов.

Столбец A — массив времени.

Столбец B – массив координат x.

Столбец C – массив координат y.

Столбец E – массив проекций скорости $v_{_{\mathrm{V}}}$.

Столбец F — массив расстояний от планеты до Солнца r.

Столбец G - массив проекций ускорения a_x .

Столбец H - массив проекций ускорения a_{y} .

Для вспомогательных вычислений нам потом потребуется еще несколько столбцов, поэтому их лучше зарезервировать, а интервал времени занести в дальнюю ячейку, например, в M2 – интервал времени (возьмем 1/1000 года).

Заносим начальные параметры.

Переменная	Ячейка	Значение
t	A2	0
x	B2	1
у	C2	0
v_{x}	D2	0
$v_{\scriptscriptstyle \!\scriptscriptstyle m V}$	E2	6,282
Δt	M2	0,001
Gm_C	L2	39,47

Осталось записать в электронную таблицу следующие формулы:

Ячейка	Формула электронной	Математическая
	таблицы	формула
A3	=A2+M\$2	$t_{n+1} = t_n + \Delta t$
В3	=B2+0,5*(D2+D3)*M\$2	$x_{n+1} = x_n + 0.5(v_{x,n+1} + v_{x,n})\Delta t$
C3	=C2+0,5*(E2+E3)*M\$2	$y_{n+1} = y_n + 0.5(v_{y,n+1} + v_{y,n})\Delta t$
D3	=D2+G2*M\$2	$v_{x, n+1} = v_{x, n} + a_{x, n} \Delta t$
E3	=E2+H2*M\$2	$v_{y, n+1} = v_{y, n} + a_{y, n} \Delta t$
F2	= SQRT(B2^2+C2^2)	$r_n = \sqrt{x_n^2 + y_n^2}$
G2	=-M\$2*B2/F2^3	$a_{x,n} = -G m_C x_n / r_n^3$
H2	$=-M$2*C2/F2^3$	$a_{y,n} = -G m_C y_n / r_n^3$

Далее нужно откопировать формулы в нижележащие строки и построить траекторию (рис. 3.5) [164]. Учеников должно обескуражить, что на экране получается не эллипс, а, скорее, спираль. Для объяснения полученного результата нужно еще раз напомнить ученикам, что численные методы всегда приближенные. Неточность вычислений привела к тому, что траектория получилась незамкнутой. Для увеличения точности нужно уменьшить интервал времени до 0,0001 года.

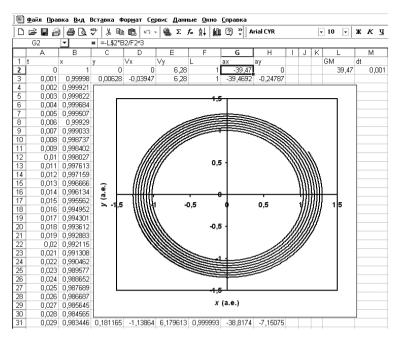


Рис. 3.5 К решению задачи с помощью электронной таблицы

Найдем период обращения при этом интервале времени. Координата y становится положительной (0,0005) в 10031 строке. То есть, период составляет 1,0029 года. Хотя и близко к ожидаемому значению, но все же больше года. Орбита получается незамкнутой — Земля вернулась не в точку x=1 а.е., а в точку x=1,004 а.е. Таким образом, наши вычисления с выбранным интервалом времени дали погрешность в 0,5%.

Таким образом, наши расчеты показали, что Земля обращается по круговой орбите. Это должно вызвать вопросы у учеников, ведь орбита Земли - эллипс. Так получилось, потому что мы в качестве начальных параметров взяли средние значения расстояния до Солнца и орбитальной скорости Земли. Чтобы получить эллиптическую орбиту, нужно занести в ячейку В2 минимальное расстояние (0,987 а.е.), а в ячейку Е2 – максимальное значение скорости 6,37 а.е./год (30,2 км/с) [173]. Тогда получится эллипс с искомым эксцентриситетом.

Однако этот эллипс мало отличается от окружности. Чтобы убедиться, что планеты обращаются по эллипсу, возьмем значение начальной скорости побольше, например, 7 а.е./год.

Найдем период. Координата y становится положительной (0,0004) в 15176 строке. То есть, период составляет 1,5174 года. При этом планета вернулась не в точку x=1, а в точку x=1,002. (Эту планету уже лучше не называть Землей, поскольку мы уже не моделируем движение Земли, а проверяем законы Кеплера.) Орбита получилась вытянутой, но нам еще нужно доказать, что это — эллипс. Для этого нужно посчитать сумму расстояний от точек орбиты до фокусов. Координаты первого фокуса — Солнца мы знаем (0,0). Возникает вопрос: как найти координаты второго фокуса?

Если ученики сами не сообразят, как это сделать, то можно, например, провести следующие рассуждения [161]. Расстояние от первого фокуса (точка O на рис. 3.3) до ближайшей точки траектории A равна x_0 , т.е. 1 а.е. Определим размер большой оси. Для этого нужно в электронной таблице найти x_C , где координата y становится отрицательной. Это происходит в 7578 строке. Координата $x_C = -1,6395$ а.е. Таким образом, большая ось |AC| равна 2,6395 а.е. В силу симметрии эллипса второй фокус отстоит от точки C также на расстоянии 1 а.е. Тогда координата x второго фокуса $x_B = -0,6395$ а.е. Занесем координату x_B в ячейку K2.

Поскольку нам известны координаты обоих фокусов, то мы можем посчитать сумму от каждой рассчитанной координаты траектории до фокусов. Выделим для этой цели один из зарезервированных столбцов таблицы. Пусть в столбце I будет сумма расстояний от точек эллипса до фокусов. Посчитаем сумму расстояний до фокусов. Расстояние до первого фокуса – Солнца мы уже вычислили. Это – столбец F. Расстояние до второго фокуса вычислим по теореме Пифагора. Занесем формулу:

Ячейк	Формула электронной	Математическая
a	таблицы	формула
I2	=F2+SQRT((B2-K\$2)^2+C2^2)	$L_{n} = \sqrt{x_{n}^{2} + y_{n}^{2}} + \sqrt{(x_{n} - x_{B})^{2} + y_{n}^{2}}$

Построим график зависимости значений в столбце I от времени или проанализируем значения непосредственно в таблице. Сумма меняется в пределах от 2,638 а.е. до 2,644 а.е., т.е. с точностью 0,2%, что укладывается в нашу погрешность 0,5%. Следовательно, орбита планеты — это эллипс с точностью 0,2%.

Таким образом, мы получили первый закон Кеплера, использовав закон всемирного тяготения. На рис. 3.6. показан вид электронной таблицы и вид вычисленной орбиты.

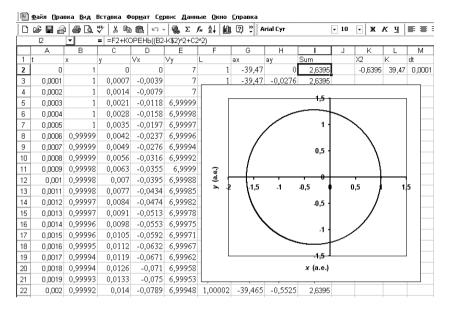


Рис. 3.6 Эллиптическая орбита

Далее можно предложить школьникам выполнить еще одно вычисление, которое будет нужно в дальнейшем — вычислим эксцентриситет этого эллипса. Это сделать несложно, поскольку мы уже вычислили, что большая ось равна 2,6395 а.е., а расстояние между полюсами равно 0,6395 а.е. Осталось только разделить одно на другое. Получилось e = 0,242.

Теперь посмотрим еще одно значение в электронной таблице. Найдем координаты точки D — пересечение орбиты с осью y (рис. 3.3). Для чего это нужно станет ясно чуть позже. Для этого найдем, когда координата x станет почти равной нулю. Строка №2634: x = 0,0001; y = 1,242. Получился интересный факт: если у координаты y точки D отбросить единицу, то получится значение эксцентриситета.

В качестве самостоятельного упражнения для закрепления материала можно попросить рассчитать орбиту, задав начальную скорость, например, 8 а.е./год. Поскольку потребуется большое число строк, то можно предложить школьникам увеличь шаг времени до 0,0002 (года).

У них должен получиться следующий результат. Координата y становится положительной (0,001) в 21596 строке. Период составляет 4,3188 года. При этом планета возвращается в точку x=1,003. Координата y становится отрицательной в 10772 строке. Координата $x_C=-4,3021$ а.е. Большая ось равна 5,3021 а.е., а координата второго фокуса $x_B=-3,3021$ а.е. Подставляя это значение в ячейку K2, получим, что сумма расстояний до фокусов в столбце I меняется от 5,295 до 5,311 а.е., т.е. орбита является эллипсом с точностью две десятых процента. Эксцентриситет равен: e=3,3021/5,3021=0,62. Заметим, что орбита пересекает ось y в строке M=1414, координата M=1,62. Мы видим опять ту же закономерность: если отбросить единицу, то получится значение эксцентриситета [161]. Почему так получается, мы обсудим ниже, а сейчас на очереди проверка II закона Кеплера.

3.2.2. Вывод II закона Кеплера из закона всемирного тяготения

Второй закон Кеплера определяет изменение скорости планеты. На круговой орбите ее скорость постоянна, а на эллиптической меняется по следующему закону.

II закон Кеплера

Радиус-вектор, соединяющий Солнце и планету, за равные промежутки времени заштриховывает равные площади, как показано на рис. 3.7 [53, 173, 224].

Поскольку понятие радиуса-вектора может быть школьникам незнакомо и сложно для восприятия, то для наглядности можно говорить о нитке или резинке, соединяющей Солнце и планету.

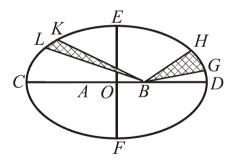


Рис. 3.7 Пояснение ко II закону Кеплера

Проанализируем ІІ-й закон Кеплера. Чтобы площади фигур BGH и

BKL были равны, нужно, чтобы дуга GH была больше дуги KL (рис. 3.7). Получается, что чем ближе планета подлетает к Солнцу, тем быстрее она движется [173, 224].

Для проверки II закона Кеплера надо вычислить площадь фигуры, заштриховываемой радиус — вектором. Пусть Солнце находится в точке O, планета в точке A и скорость планеты направлена вдоль линии AB (рис. 3.8) [164]. Заметим, что для круговой орбиты скорость перпендикулярна радиусу, но у эллипса касательная не обязательно перпендикулярна линии, соединяющую точку и фокус [224].

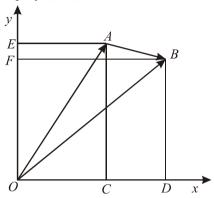


Рис. 3.8 Нахождение площади, заштриховываемой радиус вектором

Рассмотрим малый промежуток времени Δt , и будем считать, что планета двигалась это время равномерно прямолинейно и прошла путь AB, то есть нужно вычислить площадь треугольника OAB (рис. 3.8). Нам известны координаты точек O и A, а координаты точки B можно найти по схеме Эйлера

$$x_B = x_A + v_x \Delta t , \ y_B = y_A + v_y \Delta t$$
 (3.20)

Теперь можно вычислить площадь S_{OAB} (рис. 3.8). Если к площади треугольника OAC прибавить площадь трапеции ACDB и вычесть площадь треугольника OBD, то получится S_{OAB} . Площадь треугольника OAC равна $|AC||OC|/2 = y_{_A}x_{_A}/2$. Площадь трапеции ACDB равна:

$$(|AC| + |BD|)|CD|/2 = (y_A + y_B)(x_B - x_A)/2.$$
 (3.21)

Площадь треугольника *OBD* равна: $|BD||OD|/2 = y_B x_B/2$.

Подставляем в (3.21):

$$S_{OAB} = y_A x_A / 2 + (y_A + y_B)(x_B - x_A) / 2 - y_B x_B / 2 = (y_A x_B - y_B x_A) / 2$$
. (3.22)

Здесь у школьников может возникнуть непонимание. Получается, что если $y_A x_B < y_B x_A$, то площадь треугольника отрицательна, а площадь отрицательной быть не может. Так получилось, потому что мы посчитали $|CD| = (x_B - x_A)$. А ведь x_A может быть правее x_B , тогда $x_B - x_A$ будет отрицательно. Поэтому в формуле (3.22) правильно писать модуль [161]:

$$S_{OAB} = \left| y_A x_B - y_B x_A \right| / 2. \tag{3.23}$$

Подставляя формулы (3.20), получим:

$$S_{OAB} = \left| y_A \left(x_A + v_x \Delta t \right) - \left(y_A + v_y \Delta t \right) x_A \right| / 2 = \Delta t \left| y_A v_x - x_A v_y \right| / 2.$$
 (3.24)

Внесем эту формулу в зарезервированный столбец J (оператор «ABS» означает модуль числа).

Ячейка	Формула электронной	Математическая
	таблицы	формула
J2	=ABS(C2*D2 - B2*E2)*M\$2/2	$S = \left y_A v_x - x_A v_y \right \Delta t / 2$

Откопировав формулу в нижележащие строки, мы получим, что значение площади меняется от $8,000 \cdot 10^{-3}$ до $8,015 \cdot 10^{-3}$ (а.е. ²). То есть, II закон Кеплера соблюдается с точностью 0,2%. В качестве самостоятельного здания можно предложить школьникам проверить выполнение II закона Кеплера для движения планеты с начальной скоростью 7 а.е./год.

3.2.3. Вывод III закона Кеплера из закона всемирного тяготения

Третий закон Кеплера связывает периоды обращения планет и их расстояние от Солнца. Поскольку орбиты планет эллиптические, то в законе говорится о больших осях орбит.

III закон Кеплера

Квадраты периодов обращения планет вокруг Солнца относятся как кубы больших осей эллипсов [53, 173, 224].

Следует напомнить школьникам, что мы уже получили III закон Кеплера для *круговых* орбит спутников, обращающихся вокруг Земли — это уравнение (3.13). Заменим массу Земли на массу Солнца, возведем обе части в квадрат и получим:

$$T^2 = \frac{2\pi}{Gm_C} R_0^3. {(3.25)}$$

Чем дальше планета от Солнца, тем больше у нее период. Если планета дальше от Солнца в 4 раза, то период ее обращения больше в $\sqrt{\left(4\right)^3} = \sqrt{64} = 8$ раз. А если планета дальше в 10 раз, то период больше в $\sqrt{\left(10\right)^3} = \sqrt{1000} \approx 31$ раз.

Проверка третьего закона не займет много времени. Электронная таблица для расчетов уже составлена. Более того, мы уже рассчитали три орбиты с большими осями в 2, 2,64 и 5,3 а.е. и нашли периоды обращения планет. Проверим, как относятся кубы больших осей и квадраты периодов.

Большая ось <i>a</i> (a.e.)	Период <i>T</i> (год)	a^3	T^2	a^3/T^2
2	1	8	1	8
2,64	1,52	18,4	2,3	8
5,30	4,32	148,9	18,66	7,98

Значения в последнем столбце одинаковы с точностью до нашей погрешности 0,5%. В качестве самостоятельного задания можно предложить школьникам выбирать любые начальные параметры. Однако нужно их предостеречь, что начальные скорости не должны быть слишком большими, иначе планеты могут улететь и не вернуться. Можно также предложить провести исследование: при каких скоростях не удается получить замкнутый эллипс. Это позволит плавно перейти к теме о движении небесных тел по параболическим и гиперболическим орбитам.

3.3. Моделирование гиперболических и параболических траекторий движения небесных тел

У школьников может возникнуть вопрос. Мы получили справедливость трех законов Кеплера из закона всемирного тяготения. Можно ли, наоборот, получить закон всемирного тяготения из законов Кеплера? Ответ на этот вопрос – нет. Закон всемирного тяготения является более общим законом – он позволяет рассчитывать движение небесных тел, которые законы Кеплера не описывают. Законы Кеплера ничего не говорят о движении гостей солнечной системы – комет, которые, единожды залетев к нам, никогда больше не вернутся.

Чтобы избежать путаницы, нужно уточнить, что существуют кометы, движущиеся по эллиптическим орбитам, например, комета Галлея, период обращения которой составляет примерно 75 лет [173]. Но есть и такие кометы, которые залетают в Солнечную систему с настолько большой скоростью, что сила притяжения Солнца не может их удержать, и они навсегда покидают пределы Солнечной системы.

Для получения незамкнутой траектории зададим начальную скорость 10 а.е./год. Траектория становится похожей на часть овала, переходящего в прямую (рис. 3.9, назначение столбца I объяснено ниже) [164]. Это – участок гиперболы.

Чтобы доказать, что траектория имеет гиперболический вид, нужно, прежде всего, определить, какую линию мы называем гиперболой.

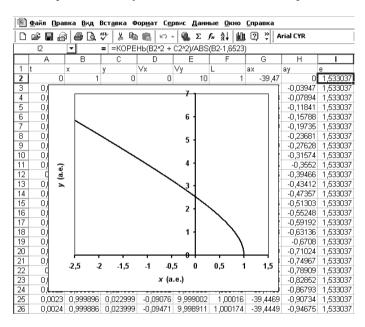


Рис. 3.9 Гиперболическая орбита

Геометрическое определение гиперболы, параболы и эллипса

Дадим общее определение трех фигур: гиперболы, параболы и эллипса (но не круга)

Гипербола, парабола и эллипс — это кривые, которые задаются точкой, называемой фокусом и прямой, называемой директрисой, при этом расстояние от каждой точки кривой до фокуса в e раз больше расстояния от той же точки до директрисы, где e — постоянная величина, называемая эксцентриситетом. При этом у гиперболы e больше единицы, у параболы e равен единице, а у эллипса меньше единицы [117, 173].

Данное определение проиллюстрировано на рис. 3.10. Пусть у нас задан фокус – точка O и директриса BC. Тогда парабола – это множество всех точек F, таких что $\left|OF\right| = \left|FG\right|$. Гипербола – это множество всех точек D, таких что $\left|OD\right|/\left|DE\right| = e > 1$ и эллипс – это множество всех точек K, таких что $\left|OK\right|/\left|KM\right| = e < 1$.

Здесь возникает сложность, что ранее школьникам было дано другое определение эллипса. Получается, что у эллипса два определения, причем не очевидно, что они эквивалентны. Чтобы не отвлекаться на доказательство эквивалентности определений (весьма непростым), можно пользоваться старым определением для эллипса и новым для гиперболы и параболы. К тому же новое определение неудобно для фигур с малыми эксцентриситетами. При малых е директрису нужно помещать на большое расстояние, что неудобно для проверки того, что орбита эллиптическая. И совсем оно плохо для окружности – директрису для окружности нужно помещать в бесконечность.

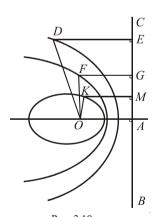


Рис. 3.10 К определению эллипса, параболы и гиперболы

Чтобы исследовать форму рассчитанной орбиты, нужно найти фокус и директрису. С фокусом проблем не возникает, поскольку в фокусе

гиперболической и параболической орбит находится Солнце. Осталось найти положение директрисы и значение эксцентриситета [161].

Пусть начало координат (точка O на рис. 3.11) является фокусом исследуемой кривой. Ось x является осью симметрии, директриса будет перпендикулярна ей, а точка начала расчета траектории A будет вершиной гиперболы (параболы, эллипса). Пусть директриса пересекает ось x в точке C. Тогда расстояние от вершины до директрисы равно |AC|. Из определения эксцентриситета e = |OA|/|AC|.

Возьмем еще точку на кривой — ее пересечение с осью y (точка B). Восстановим из B перпендикуляр на директрису BD . Тогда, по определению эксцентриситета e = |OB|/|BD| .

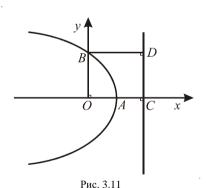
Отсюда:
$$|OB| = e|BD| = e(|AC| + |OA|) = |OA| + e|OA|$$
. Преобразуем:

$$e = (|OB| - |OA|)/|OA|. \tag{3.26}$$

Зная эксцентриситет, можно найти расстояние от точки A до директрисы:

$$|AC| = |OA|/e. (3.27)$$

Справедливость формулы (3.26) для эллиптических орбит мы уже проверяли (в наших примерах |OA|=1 a.e.).



К вычислению эксцентриситета у эллипса, параболы и гиперболы

Теперь можно приступить к анализу формы орбиты при начальной скорости 10 а.е./год (рис. 3.9). Найдем пересечение с осью у. Ближе всего к нулю в столбце В (координата x) находится значение в строке №3232 [161]: В3232 = 0,0001. Значение координаты y считаем из столбца C: C3232 = 2,533.

Следовательно, эксцентриситет равен 2,533 - 1 = 1,533. Расстояние от A до директрисы равно 1/1,533 = 0,6523. Значит, она пересекает ось x в точке 1,6523.

Будем записывать в свободный столбец I отношение расстояний от точек орбиты до фокуса к расстоянию до директрисы. Заносим формулу.

Ячейк	Формула электронной таблицы	Математическая
a		формула
I2	$=$ SQRT($B2^2+C2^2$)/ABS($B2-1,6523$)	$e = \sqrt{x^2 + y^2} / x - 1,6523 $

Откопировав ее в нижележащие строки, мы получим, что отношение расстояний меняется от 1,53304 до 1,53325. Таким образом, орбита является гиперболической, и Солнце лежит в ее фокусе (в рамках нашей погрешности).

Полезно сделать школьникам маленькое уточнение. Гипербола состоит из двух ветвей, (график функции y = 1/x). Комета же движется только по одной ветви, поэтому говорить, что орбита является гиперболой немного неточно, лучше говорить, что орбита является гиперболической [161, 173].

Школьникам может быть интересным, почему четыре столь непохожих кривых; круг, эллипс, парабола и гипербола оказались в одной цепочке. Если есть время, то можно рассказать, что все четыре кривые с древнейших времен известны в математике как виды конического сечения (см. рис. 3.12) [117, 173].

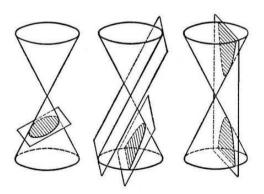


Рис. 3.12 Конические сечения: слева – эллипс, в центре – парабола, справа – гипербола

Если его разрезать перпендикулярно оси, то в сечении получится окружность, если разрезать чуть под углом, то получится эллипс, если

разрезать параллельно боковой образующей, то получится парабола, а если задать угол побольше, то – гипербола. Причем можно получить обе ветви гиперболы, если поставить два конуса друг на друга, как показано на рис. 3.12.

Далее логика исследования требует изучения параболической траектории. Однако, возникает вопрос: как найти скорость, при которой орбита из эллипса становится параболой? При увеличении начальной скорости эллипс становится все более вытянутым, время обращения все больше. Как узнать, траектория стала параболической или нам просто не хватает строк, чтобы планета вернулась в исходную точку?

Самым простым способом является нахождение скорости, при которой эксцентриситет орбиты равен единице, т.е. скорости, при которой орбита будет пересекать ось y в точке y=2 а.е. Лучше оставить эту задачу школьникам для самостоятельного исследования и лишь затем рассказать как вычислить эту скорость [161]. А перед этим можно проверить справедливость II закона Кеплера для гиперболических и параболических траекторий.

3.4. Исследование справедливости II закона Кеплера для гиперболических и параболических траекторий

Поскольку в составленной ранее электронной таблице (см. 3.1) уже занесена формула для расчета площади, заштриховываемая радиус-вектором при движении планеты, то можно проверить, выполняется ли II закон Кеплера для комет.

Занесем в ячейку E2 значение начальной скорости 12 (а.е./год). Интервал времени оставим $\Delta t = 0,0001$ год. Площадь меняется от 6,000 до 6,001. Значит, II закон Кеплера в рамках нашей точности выполняется и для гиперболических орбит.

В качестве самостоятельного упражнения можно предложить школьникам проверить справедливость II закона Кеплера для нескольких гиперболических орбит, а также для параболической орбиты (значение начальной скорости для земной орбиты – 8,885 а.е./год).

Таким образом, используя численные методы, можно из закона всемирного тяготения получить справедливость законов Кеплера, показать, что при больших скоростях небесные тела движутся по параболическим и гиперболическим орбитам, а также показать справедливость ІІ закона Кеплера для параболических и гиперболических орбит. С точки зрения «взрослой» физики здесь нет ничего удивительного, поскольку ІІ закон Кеплера фактически означает сохранение момента количества движения тела, движущегося в центральном поле [4]. Однако, поскольку в школьном

курсе момент количества движения обычно не изучается, то выполнение II закона Кеплера для параболических и гиперболических орбит не является для школьника очевидным.

При работе со школьниками 7-го и 8-го класса можно перейти к следующему разделу, а со школьниками 9-го класса и старше, которые уже знают закон сохранения энергии, можно проанализировать справедливость закона сохранения энергии для небесных тел и вывести на его основании значение параболической и II космической скоростей.

3.5. Исследование справедливости закона сохранения энергии

Мы выяснили, что при «не очень больших» скоростях небесные тела движутся вокруг Солнца по эллипсу (e < 1), а при «очень больших» скоростях – по ветви гиперболы (e > 1). Существует промежуточное значение скорости, при которой небесные тела движутся по параболе (e = 1).

Скорость, с которой нужно в нашей схеме запустить тело, чтобы оно летело по параболе, называют *параболической* скоростью [173].

Для земной орбиты ее значение равно примерно 8,885 а.е./год. Возможно, школьники сами заметят, что эта скорость в $\sqrt{2}$ = 1,41 раз больше круговой скорости. Если нет, то можно обратить на это их внимание.

Получить значение параболической скорости можно из закона сохранения механической энергии.

Механическая энергия складывается из потенциальной и кинетической. Изменение кинетической энергии небесного тела равно $m{v_2}^2/2-m{v_1}^2/2$, где v_1 и v_2 — начальная и конечная скорости планеты. Из закона сохранения механической энергии следует, что она должна быть равна изменению потенциальной энергии. Гораздо сложнее посчитать изменение потенциальной энергии. Поскольку сила гравитации меняется с расстоянием, уже нельзя пользоваться приближением, что изменение потенциальной энергии равна mgh.

Ученики 9-го класса (и младше) не могут получить аналитическую формулу для расчета потенциальной энергии. Ученики 10 класса могут провести аналогию с потенциалом точечного заряда [225]. Поэтому можно дать готовую формулу и предложить проверить ее правильность численно.

Прежде всего, нужно обратить внимание, что если планета движется по окружности вокруг Солнца, сила притяжения Солнца работу не совершает. Обычно это утверждение не вызывает возражений, поскольку работа — это произведение модуля вектора силы на модуль вектора перемещения на косинус угла между этими векторами. Если угол между векторами силы и перемещения равен 90°, то косинус равен нулю, и, следовательно, работа равна нулю.

Далее школьникам предлагается формула для проверки закона сохранения механической энергии. Если планета находится на расстоянии r_1 от Солнца, то для перемещения ее на расстояние r_2 сила притяжения Солнца должна совершить работу:

$$A = G m_C m \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right), \tag{3.28}$$

где m_C и m — массы Солнца и планеты.

Проверим эту формулу. У нас рассчитана траектория движения небесного тела, и мы знаем скорость в каждой ее точке. Поскольку мы рассматриваем модель, в которой учитывается взаимодействие планеты только с Солнцем, но не с другими планетами, то изменение кинетической энергии планеты равно изменению ее потенциальной энергии, которую мы вычисляем по формуле (3.28). Таким образом, получается:

$$mv_2^2/2 - mv_1^2/2 = G m_C m \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right).$$
 (3.29)

Преобразуем формулу:

$$v_2^2/2 - Gm_C/r_2 = v_1^2/2 - Gm_C/r_1$$
, (3.30)

Таким образом, если формула (3.28) справедлива, то справедлива также формула (3.30), и для любого положения планеты r_n величина:

$$C = v_n^2 / 2 - G m_C / r_n \tag{3.31}$$

должна быть постоянной. Заметим, что физический смысл величины C – это механическая энергия планеты, деленная на ее массу [161].

Используем свободный столбец K для вычисления величины C в формуле (3.31):

Ячейка	Формула электронной	Математическая
	таблицы	формула
K2	=(D2^2+E2^2)/2-L\$2/F2	$C = (v_{x,n}^2 + v_{y,n}^2)/2 - Gm_C/r_n$

Откопировав формулу в нижележащие ячейки, мы получим, что значение C меняется от 10,53 до 10,54, т.е. остается постоянной в пределах нашей точности. Поскольку величина C представляет собой энергию планеты, деленной на ее массу, а масса планеты постоянна, то из этого

следует, что энергия планеты не изменяется в пределах точности вычислений нашего алгоритма.

3.6. Расчет II космической скорости

Перейдем к вычислению значения II космической (параболической) скорости. II космическая скорость определяется, как минимальная скорость, которую необходимо сообщить телу, чтобы оно преодолело притяжение Земли и улетело бесконечно далеко [224]. Соответственно III космическая скорость позволяет телу преодолеть силу притяжения Солнца.

Обычно у школьников возникает непонимание, что значит: «что значит улететь в бесконечность», ведь улететь на бесконечность невозможно – это требует бесконечно большого времени. Кроме того, не очень ясно, как различить II III космические скорости Реально нужно удалиться не на бесконечность, а на расстояние, когда притяжением Земли (для расчета II космической скорости) или Солнца (для расчета III космической скорости) можно пренебречь. Ведь не учитываем же мы притяжение далеких звезд. [161]

Таким образом, при движении по параболической траектории, кинетической энергии тела, находящегося на расстоянии r_0 от Солнца должно хватить, чтобы улететь в бесконечность. Формула (3.31) запишется в виле:

$$C = v_0^2 / 2 - Gm_C / r_0 = v_{\infty}^2 / 2 - Gm_C / r_{\infty}, \qquad (3.32)$$

где $v_{\scriptscriptstyle \infty}$ – это скорость бесконечно удаленного небесного тела.

Для наших расчетов r_{∞} должно быть достаточно велико, чтобы можно было пренебречь слагаемым $Gm_{C} \, / \, r_{\infty}$. Тогда формула (3.32) запишется в виде:

$$C = v_0^2 / 2 - Gm_C / r_0 = v_{\infty}^2 / 2.$$
 (3.33)

Тело, движущееся по эллиптической орбите, не сможет удалиться на бесконечность, поэтому выражение (3.32) к нему не применимо. Если при удалении на бесконечность у тела еще будет кинетическая энергия, то оно будет двигаться по гиперболической траектории, а если кинетическая энергия будет стремиться к нулю, то получится параболическая траектория. Выражение (3.31) для параболической траектории примет вид:

$$C = v_0^2 / 2 - Gm_C / r_0 = 0. {(3.34)}$$

Отсюда параболическая скорость равна:

$$v_0 = \sqrt{2Gm_C / r_0} \tag{3.35}$$

Таким образом, получилось, что параболическая скорость в $\sqrt{2}$ раз больше скорости, при которой планета движется по окружности [173, 224].

Рассчитаем лвижение тела с параболической скоростью. У школьников уже была заготовка электронной таблицы для движения Земли по круговой орбите со скоростью 6,283 а.е./год. Занесем в ячейку Е2 значение $6.283 \cdot \sqrt{2} = 8.885$ (а.е./год) и посмотрим на график траектории (рис. 3.13). С конечно. траектория параболическая виду, не скажешь, эта гиперболическая. Вычислим эксцентриситет. Орбита пересекает ось ординат при значении y = 2. Следовательно, по формуле (3.26), эксцентриситет равен единице. Таким образом, получившаяся траектория – параболическая. Заметим, что в столбце K значения величины C близки κ нулю.

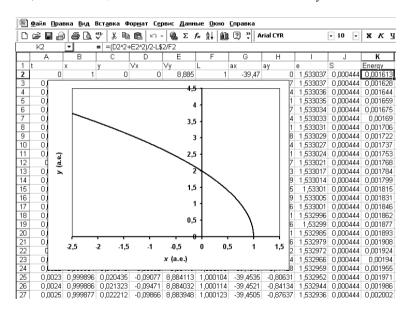


Рис. 3.13 Параболическая орбита

В качестве самостоятельного задания можно предложить школьникам рассчитать, какую нужно задать скорость спутнику вблизи поверхности Земли, чтобы он: а) навсегда покинул Землю (вторая космическая скорость); б) навсегда покинул Солнечную систему (третья космическая скорость).

На этом можно закончить рассмотрение параболической скорости. Но иногда у школьников возникает вопрос [161]. На уроках математики параболу определяли как график функции $y=kx^2$. Где находится фокус и чему равен эксцентриситет этой параболы? Данная задача чисто математическая, однако при наличии времени, ее лучше разобрать, чтобы у школьников осталось понимание межпредметных связей, поскольку парабола на уроках математики и вычисленная траектория движения небесных тел — суть одна линия.

3.7. Нахождение фокуса параболы

Залача.

Имеется график параболы $y = kx^2$. Где находится фокус и чему равен эксцентриситет этой параболы?

Построим график параболы (рис. 3.14). Из соображений симметрии фокус должен лежать на оси y, а директриса должна быть параллельна оси x. Пусть координата y точки A будет y_A , а директриса пересекает ось y в точке B с координатой y_B . Найдем расстояние от произвольной точки параболы C с координатами $x_C = x_1$ и $y_C = kx_1^2$ до фокуса и до директрисы.

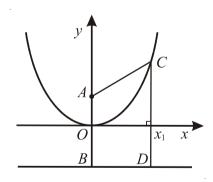


Рис. 3.14 Нахождение фокуса параболы

Расстояние |СА| найдем по теореме Пифагора:

$$|CA|^2 = x_1^2 + (y_C - y_A)^2 = x_1^2 + (kx_1^2 - y_A)^2.$$
 (3.36)

Далее найдем |CD|: $|CD| = y_C - y_B = kx_1^2 - y_B$.

У параболы длины отрезков |CA| и |CD| должны быть равны. Но сравнивать проще не длины отрезков, а их квадраты:

$$|CA|^{2} = x_{1}^{2} + (kx_{1}^{2} - y_{A})^{2} = k^{2}x_{1}^{4} + x_{1}^{2}(1 - 2ky_{A}) + y_{A}^{2};$$

$$|CD|^{2} = (kx_{1}^{2} - y_{B})^{2} = k^{2}x_{1}^{4} - 2kx_{1}^{2}y_{B} + y_{B}^{2}.$$
(3.37)

Найдем их разность:

$$|CA|^2 - |CD|^2 = x_1^2 (1 - 2ky_A + 2ky_B) + y_A^2 - y_B^2.$$
 (3.38)

Формула (3.38) должно обращаться в ноль при любом x_1 . Рассмотрим значение $x_1 = 0$. Формула (3.38) обращается в ноль при $y_A = y_B$, или при $y_A = -y_B$. Первое отпадает, поскольку $y_B < 0$. Теперь уравнение (3.38) приводится к виду:

$$|CA|^2 - |CD|^2 = x_1^2 (1 - 2ky_A - 2ky_A).$$
 (3.39)

Правая скобка обращается в ноль при $y_A=1/4k$. Следовательно, при $y_A=-y_B=1/4k$ разность равна нулю при любом x_1 . Таким образом, мы получили, что график функции $y=kx^2$ попадает под геометрическое определение параболы, причем координата фокуса равна $y_A=1/4k$, а директриса пересекает ось ординат в точке $y_B=-1/4k$ [161]. Задача решена.

Разобрав возможности применения численных методов для расчета эллиптических, параболических и гиперболических орбит, проверки законов Кеплера и закона сохранения энергии, перейдем к более сложным проблемам, которые могут стать темами для исследовательских работ школьников.

3.8. Задачи для исследовательских работ

До сих пор мы рассматривали движение небесных тел в Кеплеровском приближении (т.е. когда рассматривается притяжение планет массивным Солнцем, но не учитывается взаимодействия планет друг с другом). В общем случае задача расчета движения трех и более взаимодействующих тел (так называемая «задача трех тел») не решается. Поэтому выполненные расчеты нельзя будет проверить аналитически. Экспериментальная проверка также затруднена, поскольку астрономические наблюдения за небесными телами продолжаются многие годы. Тем не менее, можно предложить несколько интересных тем для исследования [161, 165].

Следует заметить, что, как мы уже получили ранее, достижения приемлемой точности расчетов даже одного оборота Земли нам пришлось брать интервал времени $\Delta t = 10^{-4}$ года. Для исследования больших времен движения интервал должен быть еще меньше. Поэтому возможностей электронной таблицы не хватит и проводить предлагаемые ниже расчеты нужно с использованием языков программирования.

Первое направление исследования: влияние планет-гигантов на движение планет земной группы и астероидов.

В простейшем случае можно использовать следующие модельные предположения:

- масса Солнца много больше массы остальных планет, т.е. будем попрежнему считать, что планеты обращаются вокруг Солнца, а не вокруг общего центра масс;
- малые планеты (Венера, Земля, Марс) не оказывают влияние на движение планет-гигантов (Юпитер, Сатурн, Уран), причем для простоты планеты-гиганты движутся по окружностям.

Рассмотрим для начала движение трех тел: Солнца, Земли и самой большой планеты – Юпитера. Теперь на Землю действует не одна сила, а две – со стороны Солнца и со стороны Юпитера. Значит нужно записать закон всемирного тяготения (3.7) в виде [4, 161, 165]:

$$m\vec{a} = \vec{F} = -G\frac{m_C m}{r^3}\vec{r} - G\frac{m_J m}{r_J^3}\vec{r}_J$$
, (3.40)

где m_J – масса Юпитера, \vec{r} – вектор, соединяющий Солнце и Землю, а \vec{r}_J – Юпитер и Землю; расстояние от Земли до Юпитера равно $r_J = \sqrt{\left(x-x_J\right)^2 + \left(y-y_J\right)^2}$, где (x_J, y_J) – координаты Юпитера. Для большей точности нужно учесть, что Юпитер и Земля вращаются не в одной плоскости, а орбита Юпитера наклонена по отношению к орбите Земли на 1° 18′ [173].

В этом случае проекции ускорения Земли с учетом действия сил со стороны Юпитера и Солнца равны:

$$a_x = -G\frac{m_C}{r^3}x - G\frac{m_J}{r_L^3}(x - x_J), \ a_y = -G\frac{m_C}{r^3}y - G\frac{m_J}{r_L^3}(y - y_J).$$
 (3.41)

Параметры Юпитера и его орбиты можно взять из таблиц [6, 173]. Масса Юпитера в 1047 раз меньше массы Солнца. Большая полуось равна 5,2 а.е., эксцентриситет 0,048, период обращения 11,862 лет (т.е. 11 лет и 315 суток). Если возникнет желание рассчитать влияние остальных планет, то необходимые данные можно взять из таблицы [173].

Планета	Радиус орбиты,	Масса, единицы земной массы	Период обращения	Эксцентриситет	Наклон орбиты
	a.e.	(5,98·10 ²⁴ кг)	оорищения		оронты
Меркурий	0,387	0,05	88 сут	0,296	7° 0'
Венера	0,723	0,82	224,70 сут	0,007	3° 24'
Земля	1,000	1,00	365,25 сут	0,017	
Mapc	1,524	0,11	686,96 сут	0,093	1° 51'
Юпитер	5,203	317,9	11,86 лет	0,048	1° 18'
Сатурн	9,539	95,2	29,46 лет	0,056	2° 29'
Уран	19,191	14,6	84,0 лет	0,046	0° 46'
Нептун	30,061	17,2	164,8 лет	0,009	1° 47'
Плутон	39,529	0,08	247,7 лет	0,249	17° 9'

Второе направление исследования: задача устойчивости движения планет солнечной системы.

Солнечная система существует достаточно давно – миллиарды лет. Можно ли считать ее движение устойчивым, т.е. можно ли быть уверенным, что из-за взаимодействия планет не произойдет их изменение орбит, которое, в конечном счете, может привести к их столкновениям.

В связи с этим есть следующие темы исследования [161].

- 1) Известно, что все планеты Солнечной системы лежат практически в одной плоскости. Вопрос, случайно ли так получилось? Оказывается, иначе не может быть. Существует гипотеза, что если взять Солнце, Юпитер и любую небольшую планету типа Земли и запустить планету вращаться в другой плоскости, то она не сможет устойчиво вращаться. Под влиянием притяжения Юпитера орбита планеты будет вытягиваться и ее судьба упасть на Солнце. Возможно, такова судьба Плутона, который недавно разжаловали из планет в небольшое космическое тело. Плоскость орбиты Плутона наклонена к плоскости Земли на 17° 9'. И орбита Плутона самая вытянутая, ее эксцентриситет равен 0,249 [6]. Можно предложить школьникам исследовать эту гипотезу в любых разумных модельных предположениях.
- 2) Существует экспериментальный закон, открытый в XVIII веке немецкими астрономами Тициусом и Боде [53]. Они предложили математическую

закономерность расположения планет. Средний радиус орбиты планеты в зависимости от ее номера N определяется по закону: $R=4+3\cdot2^N$, причем радиус измеряется в 0,1 а.е. Правда, нумерация планет у Боде отличается от той, к которой мы привыкли. В таблице приведены радиусы орбиты планеты, рассчитанные по закону Тициуса-Боде и их радиусы по современным данным [6].

Планета	N	Радиус орбиты по закону	Современные
		Тициуса-Боде (а.е.)	данные(а.е.)
Меркурий	8	0,4	0,38
Венера	0	0,7	0,72
Земля	1	1,0	1,00
Mapc	2	1,6	1,52
Астероиды	3	2,8	2,9
Юпитер	4	5,2	5,20
Сатурн	5	10,0	9,54
Уран	6	19,6	19,2
Нептун	7	38,8	30,1
Плутон	8	77,2	39,5

Следует заметить, что Боде опубликовал этот закон в 1772 году, еще до открытия Урана и астероидов. И когда у открытого в 1781 г. Урана размер орбиты совпал с предсказаниями закона Тициуса-Боде, то интерес к нему существенно возрос. И это несмотря на то, что №3 в таблице тогда пустовал, поскольку пояс астероидов открыли позже, причем именно там, где предсказывал закон Тициуса-Боде.

Закон Тициуса-Боде до сих пор не нашел разумного объяснения. Некоторые астрономы считают, что это просто случайность. Другие считают, что планеты не могут располагаться как угодно. Во-первых, они должны быть расположены достаточно далеко друг от друга, чтобы их влияние было мало. Во-вторых, в их расположении должен быть определенный порядок, иначе за миллиарды лет даже небольшие возмущения орбит привели бы к сильным изменениям и даже к катастрофам. Существует гипотеза, что если бы планеты вращались по другим орбитам, чем определяет закон Тициуса-Боде, то их движение не было бы устойчивым.

В связи с этими рассуждениями можно предложить школьникам тему для исследования: рассмотреть систему, состоящую из Солнца и нескольких планет, или хотя бы из двух самых больших: Юпитера и Сатурна. Пусть попробуют запустить малую планету по круговой орбите, и посмотреть, на любой ли орбите ее движение будет устойчивым. Для начала можно считать, что Юпитер и Сатурн движутся по круговым орбитам, как будто маленькой планеты нет. Наиболее интересен в этой связи область между Юпитером и Марсом – там, где находится пояс астероидов. Известно, что пояс астероидов состоит из нескольких узких поясов. Возможно, не любая орбита между Юпитером и Марсом является устойчивой [161].

Третье направление исследования: расчет возможности столкновения Земли с астероидом.

В настоящее время астрономы наблюдают за примерно 600 астероидами, орбиты которых лежат вблизи орбиты Земли. Их координаты можно найти на астрономических интернет-сайтах. Наиболее опасен астероид под названием «Апофис» (по имени египетского Демона – Змея) [165]. Этот небольшой астероид размером около 400 метров и массой около 50 млн. тонн был открыт в 2004 году. Период его обращения вокруг Солнца чуть меньше года, а плоскость его орбиты немного наклонена к плоскости орбиты Земли. Плохо то, что его орбита и пересекает орбиту Земли. По расчетам астрономов в апреле 2029 г. Апофис пройдет от Земли всего в 40 тыс. км, что по астрономическим меркам очень близко. Это составляет всего 0,0003 а.е., это расстояние в 10 раз меньше, чем от расстояние от Земли до Луны. Скорее всего, астероид будет виден невооруженным глазом. Точный расчет расстояния сближения произвести трудно, поскольку нужно учитывать взаимодействия с другими планетами. Кроме того, сложно предсказать, как изменится его орбита, после того как он пройдет так близко от Земли, и на какое расстояние будет между астероидом и нами во время следующего сближения. Возникает вопрос, можно ли предотвратить столкновение астероида с Землей?

Можно предложить школьникам рассчитать орбиту астероида (реального или придуманного), который может столкнуться с Землей и провести исследование, на сколько нужно изменить его орбиту, чтобы это столкновение не произошло. Школьники могут убедиться в том, что движение астероида неустойчиво. Изменив его орбиту на толщину бумажного листа за несколько десятков оборотов до столкновения, можно отвести астероид от Земли на безопасное расстояние. Чем раньше ученые узнают о существовании такого астероида, тем меньше нужно изменить его орбиту, чтобы избежать катастрофы. Координаты астероида Апофис и др. астероидов можно найти на сайте NASA [165]. Разумеется, предложенные направления исследования не исчерпывают список возможных тем.

Рассмотрев применение численного моделирования для задач, которые не предполагают экспериментальную проверку учениками, перейдем к задачам, где численные расчеты могут быть подтверждены экспериментами, проводимыми самими учащимися.

Глава 4.

Исследовательские работы, выполняемые на основе численного моделирования

Рассмотрим применение численного моделирования движения тел с использованием схемы Эйлера для проведения со школьниками исследовательских работ, которые могут быть проверены экспериментально.

Начнем с колебательных процессов. Такой выбор был сделан по следующим причинам.

- колебательные процессы изучаются в школьной программе, причем эта тема – сложная и вызывает много вопросов у школьников;
- формулы, необходимые для решения задач по этой теме, а именно: период пружинного и математического маятников, закон движения грузика при гармонических колебаниях (тот факт, что движение происходит по синусоидальному закону), во многих учебниках приводятся без строго доказательства, как экспериментальный факт [39, 147, 194], а в других доказательство приводится с использованием производных [201], что затрудняет понимание явлений и вызывает путаницу при решении задач;
- при изучении математического маятника используется понятие малых углов (малых колебаний), которое не очень понятно школьнику (почему 6° это малый угол, а 7° уже нет, и что делать, если угол не мал);
- колебательные процессы достаточно часто встречаются в повседневной жизни: это и качание качелей, и колебание гитарной струны, и колебание маятника настенных ходиков и пр.,
- изучение колебаний математического маятника любимая лабораторная работа многих учителей [61, 111, 112];
- на основе колебательных систем можно поставить много исследовательских работ [167].

Реализовать простейшие колебательные системы оказывается совсем несложно, необходима лишь нитка и грузик. Описать наблюдаемые процессы оказывается намного сложнее, поскольку для решения полученных уравнений (даже в приближении малых углов) требуется знание производных (как мы увидим ниже, можно обойтись и без производных, но в этом случае приходится производить сложные расчеты).

Как и в предыдущей главе, мы будем использовать для расчетов электронную таблицу *MS Excel* или ее аналог *OpenOffice.org Calc*. Однако все алгоритмы можно воспроизвести с помощью любого языка программирования.

4.1. Исследование колебательных систем

4.1.1. Особенности изучения математического маятника

В школе изучается две простые колебательные системы: пружинный и математический маятники. Мы начнем с математического маятника, поскольку:

- реализовать эксперименты с математическим маятником проще, чем с пружинным;
- он чаще используется при выполнении лабораторных работ;
- именно с математического маятника Галилей начал свои исследования в механике [31].

На примере математического маятника удобно продемонстрировать, как можно в повседневном увидеть необычное. Можно запустить в классе математический маятник и спросить школьников, что они наблюдают. Обычно этот вопрос вызывает недоумение: маятник просто качается взад – вперед, что тут можно наблюдать и анализировать? Тогда им можно рассказать историю про открытие Галилеем изохронности (от греческих слов «изо» – «постоянство» и «хронос» – «время», то есть явление независимости периода колебания от амплитуды).

В своих трудах Галилей описывает, как в молодости он присутствовал на церковной службе. Он заметил, как в начале службы кто-то задел паникадило – большой подсвечник, висящий на цепи. Галилею захотелось измерить период колебания подсвечника. Не имея других инструментов, он измерил период по собственному пульсу. В конце службы, когда колебания подсвечника стали заметно меньше, Галилей снова измерил период колебаний. Оказалось, что период не изменился. Так Галилей открыл явление изохронности. Многие видели, как качаются маятники, но нужно быть Галилеем, чтобы догадаться изучить зависимость периода колебаний от амплитуды [31].

Если возникнет вопрос столь уж важно явление изохронности, то можно напомнить, что до Галилея не было маятниковых часов. Маятниковые часы сконструировал ученик Галилея — Гюйгенс. Все маятниковые часы, включая Кремлевские куранты и Биг-Бен, а также простые настенные ходики — наследники идей Галилея.

У школьников иногда возникает вопрос: как Галилей догадался, что в Соборе нужно измерить время колебания паникадила? Здесь можно заметить, что, скорее всего, он не ставил определенной цели, а просто привычка все замечать и анализировать – является важным качеством любого естествоиспытателя [167].

Если школьники читали «Записки о Шерлоке Холмсе», то можно провести аналогию между естествоиспытателем и великим сыщиком,

который тоже все время призывал доктора Ватсона подмечать и анализировать. Аналогия тем более полная, что прообразом Шерлока Холмса был преподаватель Конан Дойля в Эдинбургском университете – хирург Джозеф Белл (1837–1911) (до того как стать писателем Конан Дойль изучал медицину). По воспоминаниям Конан Дойля Джозеф Белл учил своих студентов замечать любые мелочи. Его слушателей поражало, что при первом знакомстве с пациентом Джозеф Белл определял не только его болезнь, но профессию и характер больного. «Вы все видите, но не даете труда поразмыслить о том, что вы видите», говорил Джозеф Белл своим студентам. Примерно то же самое говорил Холмс доктору Ватсону.

Школьники обычно с недоверием относятся к утверждению, что период не зависит от амплитуды. Очевидное соображение заключается в том, что чем сильнее мы отклоним маятник, тем больший путь ему нужно будет пройти. Следовательно, с увеличением угла период должен расти.

При наличии времени для наглядного разъяснения этого парадокса школьникам можно предложить решить задачу Галилея о движении тела по хорде [32].

Задача

Пусть имеется неподвижная сфера радиуса R, которая касается земли в точке A как показано на рис. 4.1. В сфере закреплены два прямых желоба неравной длины |AB| и |AC|. Из точек B и C без начальной скорости пускают маленькие бруски. Какой из брусков быстрее достигнет точки A? Трением пренебречь.

Замечание. У школьников может возникнуть вопрос о массе брусков. Хотя время движения бруска не зависит от его массы, для школьников это может оказаться не очевидным. Поэтому, чтобы ученики сами додумались, что время движения бруска не зависит от массы, можно указать, что массы брусков одинаковы, хотя тогда школьников может смутить наличие лишнего условия.

Решение

Рассмотрим брусок на желобе AB. На него действует сила тяжести. Проекция силы тяжести на линию AB равна $mg\sin\alpha$. Еще на тело действует силы реакции опоры, но ее проекция на AB равна нулю. Запишем II закон Ньютона в проекции на линию AB:

$$mg \sin \alpha = ma$$
 (4.1)

Получается, что движение будет равноускоренным с ускорением $g \sin \alpha$. Время движения рассчитаем из формулы для перемещения при равноускоренном движении без начальной скорости:

$$\left|AB\right| = g \sin \alpha \cdot t^2 / 2$$
, отсюда $t = \sqrt{\frac{2\left|AB\right|}{g \sin \alpha}}$. (4.2)

Получается, что время движения бруска от массы не зависит.

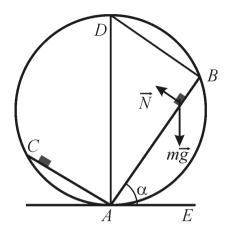


Рис. 4.1 Движение тел по наклонным желобам

Чтобы найти длину хорды |AB|, нужно вспомнить, что угол, опирающегося на диаметр, равен 90°. Значит, угол DBA равен 90°. Следовательно, $\angle ADB = 90^\circ - \angle DAB = \angle BAE = \alpha$. Отсюда $|AB| = |AD| \sin \alpha = 2R \sin \alpha$. Тогда:

$$t = \sqrt{2|AB|/g\sin\alpha} = \sqrt{4R/g} = 2\sqrt{R/g} . \tag{4.3}$$

Таким образом, получается, что время движения не зависит от массы бруска, и не зависит от наклона хорды. Это происходит вследствие того, что с увеличением угла увеличиваются и длина пути и ускорение бруска.

Обычно после рассмотренной задачи школьникам становится понятно, что с математическим маятником получается что-то в том же роде. При увеличении угла отклонения длина пути увеличивается, но и начальное ускорение увеличивается. Поэтому период может не зависеть от угла отклонения.

Иногда у школьников возникает соображение, как найти период качания математического маятника. Если время движения по хорде не зависит от угла, то, возможно время движения тела по хорде AB равно

времени движения по дуге AB (рис. 4.1). Очевидно, что время подъема равно времени спуска, а за период маятник дважды опускается и дважды поднимается. Тогда период колебания маятника по этим рассуждениям равен: $T=8\sqrt{R/g}$.

Хотя эти рассуждения ошибочны, поскольку утверждение, что время движения тела по хорде равно времени движения по соответствующей дуге, ни на чем не основано, оно дает возможность в дальнейшем оценить период для определения того, до какой строки нужно копировать формулы в электронной таблице [167]. Еще Галилей из геометрических соображений доказал, что время соскальзывания по дуге быстрее, чем по хорде [32], так что период качания математического маятника меньше $8\sqrt{R/g}$. Более точно рассчитать период колебания математического маятника можно с помощью численного моделирования.

При наличии времени можно получить период колебания математического маятника *методом размерностей*. Поскольку ученики могли не слышать о таком методе, на нем можно остановиться подробнее [9, 94, 126].

Каждая физическая величина измеряется в определенных единицах: время – в секундах, длина – в метрах.

Нам нужно найти период колебаний маятника. Первый шаг состоит в том, что нужно определить от каких параметров может зависеть период. Очевидно, он зависит от длины нити *L*. Простое соображение, что в невесомости маятник не колебался бы, приводит к заключению, что период зависит от ускорения свободного падения. Период измеряется в секундах, длина в метрах. Размерность ускорения: длина, деленная на время в квадрате. Теоретически период еще может зависеть от угла колебания и массы грузика. Но, следуя Галилею, будем пока считать, что от угла колебания период не зависит.

Второй шаг: нам нужно выразить период, имеющий размерность «время», через длину, ускорение и массу. Приходится принять, что от массы период не зависит, а остальные параметры связаны одной простой комбинацией [167]:

$$[время] = \sqrt{\frac{[\partial лина]}{[\partial лина]/[время]^2}}$$
 (4.4)

Получилось, что период пропорционален $\sqrt{L/g}$. Следует обратить внимание учеников, что, к сожалению, метод размерностей не может дать коэффициент пропорциональности, но в некоторых случаях получить общий

4.1.2. Применение разностных схем для описания колебательного движения

Реализация алгоритма схемы Эйлера требует знания ускорения (проекции ускорения) от координаты. Возникает вопрос с выбором координаты. Можно выбрать горизонтальную координату грузика. Однако в этом случае получатся очень громоздкие формулы. Кроме того, ввиду наличия погрешности численных методов возникает опасность, что при расчетах грузик «соскочит» с нити. Поскольку грузик у маятника движется по окружности, то в качестве координаты удобнее взять угол поворота маятника (рис. 4.2) [167].

Однако здесь обычно возникает проблема: проекция может быть как положительной, так и отрицательной, а угол в геометрии вводится как положительная величина. Поэтому приходится тратить время на введение отрицательного угла: если поворот происходит против часовой стрелки (т.е. маятник отклоняется вправо), то угол будет положительным, а если поворот происходит по часовой стрелке – отрицательным.

Проще всего ввести знак угла поворота по аналогии с географическими координатами. Понять, что значит «10 градусов северной широты» и «10 градусов южной широты» не сложнее, чем понять, что значит «10 градусов отклонения вправо» и «10 градусов отклонения влево» или «отклонение плюс 10 градусов» и «отклонение минус 10 градусов» [167].

Введения угла, как координаты позволяет решить несколько проблем.

Во-первых, введение знака угла отклонения позволяет связать угол поворота маятника и координату грузика по горизонтальной оси (назовем ее z, чтобы не путаться с мгновенными осями). Если угол не имеет знака, то необходимо две формулы для определения координаты (рис. 4.2):

$$B_z = L \sin \alpha$$
, $C_z = -L \sin \alpha$, (4.5.)

где L – длина нити. Таким образом, нам каждый раз нужно проверять, вправо или влево отклонился маятник. Если же мы припишем углу знак, то тогда вправо маятник отклониться на угол $\alpha_1 = \alpha$, а налево он отклонится на угол $\alpha_2 = -\alpha$. Тогда координаты точек B и C по горизонтальной оси Z равны:

$$B_z = L \sin \alpha_1, \ C_z = L \sin \alpha_2, \tag{4.6}$$

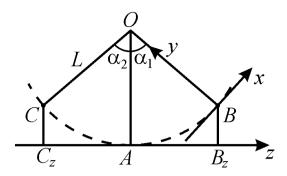


Рис. 4.2 Проекции математического маятника на горизонтальную ось

Во-вторых, это позволяет связать угол отклонения и угловую скорость. Здесь нелишне напомнить школьникам, что угловая скорость имеет знак. Будем для определенности считать, что если движение происходит против часовой стрелки, то угловая скорость – положительна, а в обратную сторону – отрицательна. При наличии знака угла поворота, изменение угла можно записать с помощью угловой скорости одной формулой: $\alpha = \alpha_0 - \omega \Delta t$. При таком вычислении значении угла, оно может стать отрицательным. Например, если угол в начальный момент равен нулю, а движение по часовой стрелке, то угол должен принять отрицательное значение $\alpha = 0 - \omega \Delta t$.

После выбора координаты, нужно найти закон ее изменения. Рассмотрим грузик на нитке (рис. 4.3). Определим силы, действующие на него. Направим ось y вдоль нити, а ось x – перпендикулярно ей (рис. 4.3).

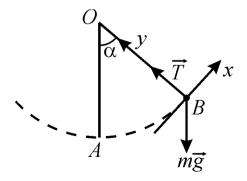


Рис. 4.3 К расчету движения математического маятника

Проекция силы тяжести на ось x равна $-mg\sin\alpha$, а проекция натяжения нити на ось x равна нулю. Таким образом, проекция ускорения на ось x:

$$a_x = -g\sin\alpha \ . \tag{4.7}$$

Заметим, что это ускорение направлено по касательной к траектории и является тангенциальным, т.е. определяет изменение модуля скорости шарика. Теперь можно приступать к составлению алгоритма по схеме Эйлера.

Пусть за малое время Δt тело движется равномерно по окружности. Изменение угла можно найти методом прямоугольников по формуле:

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n + \omega_n \, \Delta t \tag{4.8}$$

или методом трапеций:

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n + (\omega_{n+1} + \omega_n) \Delta t / 2.$$
 (4.9)

Чтобы не связываться с новым для школьников понятием углового ускорения, можно перейти от угловой скорости к линейной:

$$v_n = \omega_n L, \qquad (4.10)$$

где L – длина нити.

Изменение скорости можно найти из мгновенного ускорения тела вдоль окружности:

$$v_{n+1} = v_n + a_{x,n} \, \Delta t \,. \tag{4.11}$$

Указанные формулы позволяют описать движение математического маятника. Реализуем алгоритм в электронной таблице [167]. Будем в столбцы A-E заносить значения:

A – времени;

B – угла отклонения α ;

C – угловой скорости ω ;

D – скорости движения по окружности υ ;

E – тангенциального ускорения a_x .

Значения Δt , L и g занесем в ячейки J2, K2 и L2.

Вначале нужно взять малый угол, например, 0,01 радиан. Интервал времени можно взять равным одной сотой секунды.

Поскольку учитель знает результат, то можно приятно удивить

школьников появлению в ответе числа π . Поэтому хорошо бы подвести учеников к тому, чтобы взять длину маятника так, чтобы отношение $\sqrt{L/g}$ было равно 1/4.

Для этого можно либо проверять правильность формулы периода колебаний математического маятника, полученной из соображений размерности: $T \sim \sqrt{L/g}$.

Далее можно предложить школьникам взять длину маятника численно равной ускорению свободного падения (на широте Москвы) 9,815 м. Такая длина маятника обычно вызывает у школьников недоумение – как потом сравнить полученные данные с экспериментом? Здесь можно с ними согласиться и выбрать длину нити в 4 раза меньше: 2,45375 м.

Заносим начальные значения:

A2 – начальное время 0 (c);

B2 — начальный угол 0,01 (рад);

C2 – начальная угловая скорость 0 (рад/с);

D2 – начальная скорость 0 (м/с);

L2 – значение g = 9.815 (м/с²);

K2 – длина маятника L = 2,45375 (c);

J2 – интервал времени $\Delta t = 0.01$ (c).

Затем заносим формулы:

Ячейка	Формула электронной	Математическая
	таблицы	формула
A3	=A2+J\$2	$t_{n+1} = t_n + \Delta t$
В3	=B2+0,5*(C2+C3)*J\$2	$\alpha_{n+1} = \alpha_n + 0.5(\omega_{n+1} + \omega_n) \Delta t$
C3	=D3/K\$2	$\omega_n = v_n / L$
D3	=D2+E2*J\$2	$\upsilon_{n+1} = \upsilon_n + a_{x,n} \ \Delta t$
E2	=-L\$2*SIN(B2)	$a_{x,n} = -g\sin\alpha_n$

Далее формулы нужно копировать до 400 строки. Полученный результат численного расчета обычно обескураживает школьников, поскольку маятник возвращается не в прежнее положение, а отклоняется до 0,01032 радиан (рис. 4.4). Конечно, у свободно колеблющегося маятника не может увеличиться амплитуда колебаний, изменение возникает из-за неточности расчетов. Получилась погрешность в 0,0003 радиан, или 3% от исходной величины [167].

	📳 <u>Ф</u> айл Правка <u>В</u> ид Вст <u>а</u> вка Фор <u>м</u> ат С <u>е</u> рвис <u>Д</u> анные <u>О</u> кно <u>С</u> правка											
	🚅 🖫 🔒) / 🖨 Da. 🛡	× % 🗈 🖷	B 10 → @	Σ f _* A ₁	. í	ido,	?	» *	Arial Cy	/r	•
	A316	▼ =	=A315+J\$2	!								
	Α	В	С	D	E	F	G	Н	Τ	J	K	L
1	t	alpha	w	٧	a					delta t	L	g
2	0	0,01	0	0	-0,098148					0,01	2,45375	9,815
3	0,01	0,009998	-0,0004	-0,000981	-0,098129							
1	0.02	ก กกจจจว	_n nnn7999	_n nn1963	_n n98n7		<u> </u>					
312	3,1	0,0102832	0,00172077	0,0042223	-0,100928							
313	3,11	0,0102983	0,00130945	0,0032131	-0,101076							
314	3,12	0,0103094	0,00089752	0,0022023	-0,101185							
315	3,13	0,0103163	0,00048516	0,0011905	-0,101252							
316	3,14	0,0103191	7,2513E-05	0,0001779	-0,10128							
317	3,15	0,0103177	-0,0003402	-0,000835	-0,101267							
318	3,16	0,0103123	-0,0007529	-0,001848	-0,101213							
319	3,17	0,0103027	-0,0011654	-0,00286	-0,101119							

Рис. 4.4 Результаты расчета движения маятника

Найдем строку, где скорость меняет направление. В строке 316 – скорость еще больше нуля (C316=0,00007), а 317 – меньше нуля (C317=-0,0003). В строке 316 значение скорости ближе к нулю, поэтому возьмем в качестве периода значение времени в ячейке A316-3,14 с.

Ученики обычно сразу обращают внимание, что получилось знакомое число. Увеличение точности (уменьшение интервала до 0,001 с) дает значение периода 3,141 с. В электронных таблицах далее увеличить точность не получиться (слишком много строк), но, используя Basic или другие языки программирования, можно получить более точный результат, который еще более будет напоминать число π [167].

Анализ полученного результата

1. Сходимость

Исследование на сходимость показывает возрастание точности возвращения грузика в исходную точку и стремление значения периода к числу π .

2. Закон движения маятника

Построим график зависимости отклонения маятника от времени. Чтобы получить смещение по оси x, нужно вычислить $L\sin\alpha$. Выберем свободный столбец и получим столбец значений. Получается кривая, похожая на функцию синус (рис. 4.5).

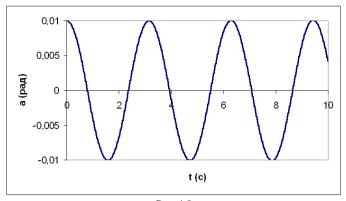


Рис. 4.5 Зависимость угла отклонения от времени для математического маятника

То, что эта кривая имеет форму синусоиды, можно убедиться, построив рядом график: $y = y_0 \cos(t/T)$, где T – период.

Кроме этого, для наглядности можно в электронной таблице построить графики зависимости скорости и координаты от времени. Получаются две синусоиды, причем вторая синусоида отстает от первой на четверть периода (рис. 4.6) [167].

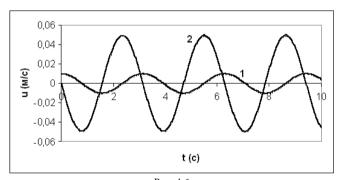


Рис. 4.6 Зависимости угла отклонения (1) и скорости (2) от времени для математического маятника,

шкала на оси ординат приведена только для скорости

Почему получается смещение двух графиков, будет обсуждено ниже.

4.1.3. Исследование колебаний математического маятника при малых и произвольных углах

4.1.3.1. Зависимость периода от амплитуды колебания

Расчеты показывают, что период колебания зависит от начального угла отклонения (амплитуды колебания) грузика. В таблице представлены результаты расчетов значения период для нескольких значений амплитуд. Чтобы таблица была нагляднее, в нее занесено отношение периода колебания к теоретическому значению периода при малых углах [4, 226]:

$$T_0 = 2\pi \sqrt{L/g}$$
 (4.12)

Начальный угол (рад)	0,0001	0,001	0,01	0,1	0,2	0,3	0,5	1,0	1,55
Период <i>T</i> (c)	3,141	3,141	3,141	3,143	3,149	3,159	3,191	3,350	3,652
T/T_0	1	1	1	1,0006	1,0025	1,006	1,016	1,066	1,163

Видно, что при углах 0,01 радиан и меньше, период практически не меняется и совпадает с теоретическим по формуле (4.12) в пределах нашей точности 0,001 с. При угле 0,1 радиан (6°) период увеличивается менее чем на 0,1%. При угле 0,5 радиан период увеличивается уже на 1,6%, что сложно заметить при выполнении лабораторных работ. Даже при отклонении почти на 90° период увеличивается менее чем на 20%, однако, при таких амплитудах колебания быстро затухают, поэтому экспериментально проверить эту зависимость сложно [167].

Если построить график зависимости периода от угла, то она напоминает параболу, пересекающую ось у в единице (рис. 4.7).

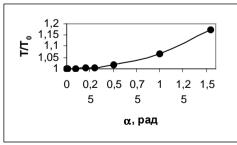


Рис. 4.7 Зависимость периода колебания от угла

Чтобы убедиться в том, что это кривая действительно парабола, можно построить зависимость отношения периодов от квадрата начального угла (рис. 4.8).

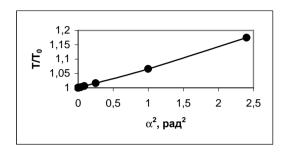


Рис. 4.8 Зависимость периода колебания от квадрата угла

Получается почти прямая линия. Таким образом, периода математического маятника равен [4]:

$$T = T_0 \left(1 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\alpha_0}{2} \right), \tag{4.13}$$

где T_0 – период колебания, вычисляемый по формуле (4.12).

Эта формула позволяет вычислять период колебания вплоть до отклонения 90° с точностью до 3%, а если мы ограничимся углами 60°, то с точностью 1%. Следует заметить, что формула (4.13) все же не является абсолютно точной. Строгой формулы для периода математического маятника не существует. Период колебания равен сумме бесконечного ряда [4]:

$$T = T_0 \left[1 + \left(\frac{1}{2} \right)^2 \sin^2 \frac{\alpha_0}{2} + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \right)^2 \sin^4 \frac{\alpha_0}{2} + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \right)^2 \sin^6 \frac{\alpha_0}{2} + \dots \right] . (4.14)$$

Последнюю формулу можно ученикам и не приводить, а просто отметить, что формула (4.13) описывает период качания математического маятника достаточно точно, так что мы не сможем экспериментально обнаружить расхождение с этой формулой.

4.1.3.2. Проблемы, возникающие при использовании понятия «малые углы»

Получив формулу (4.13), можно остановится на понятии малых углов. Обычно малыми принимаются угла меньше или равные 6° .

Прежде всего, следует заметить, что нельзя строго установить границу: 6° – это малый угол, а 7° – уже не малый. Здесь можно вспомнить апорию «куча», придуманную еще древнегреческими мудрецами [227].

Апория «куча»

Одна песчинка — это куча? Разумеется, нет. А две песчинки? Это тоже не куча. Далее можно спросить учеников, как они думают, сколько песчинок в куче песка на пляже? Может быть, миллион. Получается, что две песчинки — не куча, а миллион — куча. И где проходит граница между кучей и не кучей? Предположим, что ученики ответят: тысяча. Тогда получается, что тысяча песчинок — это куча, а 999 — уже не куча? Получается, что невозможно указать строго границу, сколько песчинок составляет «кучу». Также невозможно указать точное значение угла, который уже нельзя считать малым.

Как же пользоваться понятием «малых» углов? Все зависит от точности, с которыми мы хотим получить результат. Малыми считаются углы, когда с требуемой точностью выполняется соотношение [78, 226]:

$$\sin \alpha \approx tg \ \alpha \approx \alpha \ , \tag{4.15}$$

где α – угол, выраженный в радианах.

Для проверки этого соотношения можно предложить воспользоваться электронной таблицей и посмотреть на соотношение значений α , $\sin \alpha$ и tg α . Значения α можно взять от 0 до 1 с шагом 0,01 или 0,001 (рад).

Будем заносить значения:

столбец $A - \alpha$;

столбен $B - \sin \alpha$:

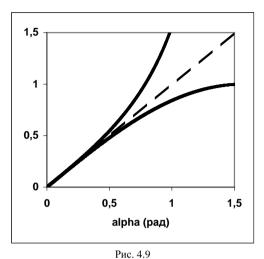
столбец $C - tg \alpha$.

В дальнюю ячейку, например, H2 можно занести шаг: 0,001 (рад.).

В ячейку А2 запишем 0, а в следующие ячейки формулы:

Ячейка	Формула электронной	Математическая
	таблицы	формула
A3	=A2+H\$2	$\alpha_2 = \alpha_1 + \Delta \alpha$
B2	=SIN(A2)	$\sin \alpha$
C2	=TAN(A2)	$tg\alpha$

Построив график, мы получим две ветки, отходящие от общего ствола (рис. 4.9).



Графики зависимости $\sin \alpha$ (внизу) и $tg \alpha$ (сверху) от α

Для наглядности можно проанализировать, как зависят отношения $\sin \alpha/\alpha$ и $tg \alpha/\alpha$ от α . В ту же таблицу занесем формулы в столбцы D и E.

Ячейка	Формула электронной	Математическая
	таблицы	формула
D3	=B3/A3	$\sin \alpha$
		${\alpha}$
		u
E2	=C3/A3	$tg \alpha$
		α

Следует обратить внимание, что ячейки D2 и E2 нужно оставить пустыми, поскольку на ноль делить нельзя.

Для этих зависимостей лучше построить отдельный график (рис. 4.10). Видно, что вблизи нуля значения $\sin \alpha/\alpha$ и $tg \alpha/\alpha$ практически неотличимы от единицы [167].

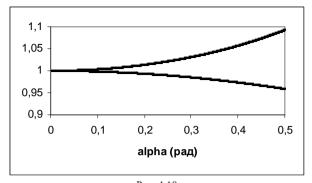


Рис. 4.10 Графики зависимости $\dfrac{\sin lpha}{lpha}$ и $\dfrac{tg \; lpha}{lpha}$ от $\; lpha$

Если время позволяет, то можно рассказать, что функции синус и косинус могут быть представлены в виде бесконечных сумм [4]:

$$\sin \alpha = \alpha - \frac{\alpha^3}{3!} + \frac{\alpha^5}{5!} - \frac{\alpha^7}{7!} + \frac{\alpha^9}{9!} - \frac{\alpha^{11}}{11!} + \dots$$

$$\cos \alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^4}{4!} - \frac{\alpha^6}{6!} + \frac{\alpha^8}{8!} - \frac{\alpha^{10}}{10!} + \dots$$
(4.16)

Следует иметь в виду, что школьники могут не знать, что восклицательный знак обозначает факториал, который по определению равен [117]:

$$N! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot N \tag{4.17}$$

Здесь можно остановиться и обратить внимание школьников, что если бы последовательность (4.16) была конечной, то мы могли бы получить *точное* значение синуса угла. А так мы можем сделать это лишь приближенно. Также для общего образования полезно заметить, что в калькуляторах для вычисления синусов и косинусов используются именно эти формулы.

Используя формулы (4.16) и, пренебрегая малыми слагаемыми, можно записать (4.14) в виде [4]:

$$T = T_0 (1 + \frac{1}{16} \alpha_0^2), \qquad (4.18)$$

что похоже на формулу (4.13).

У учеников может возникнуть законный вопрос: какая из формул (4.18)? Нужно точнее. заметить. обе формулы что приблизительные лают примерно одинаковые значения. Можно предложить им воспользоваться расчетами в электронной таблице и определить, какая из формул точнее. Понятно, что экспериментально разницы между ними обнаружить не удастся [167].

При наличии времени можно доказать формулу (4.15) для малых углов из геометрических соображений.

4.1.3.3. Геометрическое доказательство равенства синуса и его аргумента при малых углах

Пусть имеется окружность радиуса R и в ней задан малый угол α (рис. 4.11).

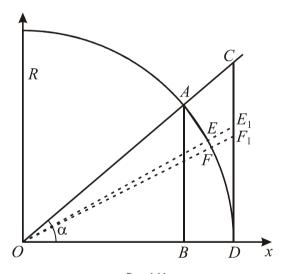


Рис. 4.11 К выводу зависимости $\sin \alpha$ и $tg \alpha$ от α

Непосредственно из определения функций синуса и тангенса:

$$\sin \alpha = |AB|/|OA| = |AB|/R$$
, $tg \alpha = |CD|/|OD| = |CD|/R$. (4.19)

Вспоминая определение радиана, получим, что длина дуги AD равна:

$$\left| \bigcup AD \right| = R \cdot \alpha \,. \tag{4.20}$$

Поскольку перпендикуляр — кратчайшее расстояние, то длина отрезка |AB| меньше длины дуги |AD|. Сложнее обосновать, что длина отрезка |CD| больше длины дуги |AD| [167]. Для этого нужно представить дугу как цепочку, состоящую из бесконечного числа бесконечно малых звеньев EF. Каждому такому звену EF можно сопоставить отрезок E_1F_1 на отрезке CD. Причем $|E_1F_1| > |EF|$. В результате, мы получим, что длина отрезка CD больше длины цепочки, составляющей дугу AD. Таким образом:

$$|AB| < |\cup AD| < |CD|. \tag{4.21}$$

Подставляем (4.21) в формулы (4.19) - (4.20):

$$\sin \alpha < \alpha < tg \alpha . \tag{4.22}$$

Это соотношение уже было получено с помощью электронной таблицы. Разделим неравенство (4.22) на $\sin \alpha$:

$$1 < \frac{\alpha}{\sin \alpha} < \frac{1}{\cos \alpha} \,. \tag{4.23}$$

Теперь воспользуемся правилом: если a > b, то $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$:

$$\cos \alpha < \frac{\sin \alpha}{\alpha} < 1. \tag{4.24}$$

Получилось, что значения функции $\sin \alpha/\alpha$ зажаты между 1 и функцией $\cos \alpha$, которая так же стремится к единице при $\alpha \to 0$. Следовательно, к единице стремится также функция $\sin \alpha/\alpha$. Таким образом, мы получили формулу (4.15) из геометрических соображений [167].

Остается вопрос: какие углы можно считать малыми? Здесь все зависит от точности, с которой нужно получить результат. Обычно принимают, что малыми можно считать углы меньше 0,1 рад. $(5,7^\circ)$. При этом формула (4.12) дает результат с точностью 0,16%. Если не задаваться столь большой точностью, а, например, принять точность 10%, то формулу (4.12) можно применять вплоть до 30° [167].

Формула (4.18) дает большую точность, чем формула (4.12), и вряд ли наши эксперименты позволят обнаружить расхождение с этой формулой при колебаниях вплоть до 90° .

4.1.4. Связь между колебаниями математического и конического маятников при малых углах

Чтобы формула периода колебаний математического маятника для малых колебаний (4.12) не «повисла в воздухе», не представлялась школьникам чем-то недоступным для понимания, ее можно вывести аналитически даже в рамках школьных знаний по математике (при наличии времени и желания учеников).

Для этого потребуется решить одну вспомогательную задачу – найти период *конического маятника* (рис. 4.12) [19 (задача №203), 226].

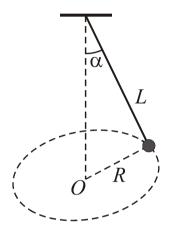


Рис. 4.12 Конический маятник

Если силой сопротивления воздуха пренебречь, то на грузик действуют две силы: сила тяжести mg и сила натяжения нити T. (см. рис. 4.13). Обозначим угловую скорость грузика ω_0 . Его центростремительное ускорение равно $\omega_0^2 R$. Направим ось x по горизонтали, а y — по вертикали. Тогда II закон Ньютона в проекции на оси запишется:

$$ma_x = T \sin \alpha$$
,
 $0 = mg - T \cos \alpha$. (4.25)

Учитывая, что $R = L\sin\alpha$, преобразуем систему уравнений (4.25):

$$m\omega_0^2 L \sin \alpha = T \sin \alpha$$
,
 $mg = T \cos \alpha$. (4.26)

Разделим первое уравнение на $\sin \alpha$, получим выражение для T:

$$T = m\omega_0^2 L. (4.27)$$

Подставляя T во второе уравнение, значение угловой скорости:

$$\omega_0^2 = \frac{g}{L\cos\alpha} \,. \tag{4.29}$$

Период вращения конического маятника равен [167, 226]:

$$T = 2\pi/\omega_0 = 2\pi\sqrt{\frac{L\cos\alpha_0}{g}} \ . \tag{4.30}$$

Школьников может удивить тот факт, что при угле $\alpha=90^\circ$ период равен нулю. Действительно, такая ситуация физически невозможна — нельзя раскрутить маятник так, чтобы угол стал равным 90° . Из системы уравнений (4.26) следует, что натяжение нити равно $T=mg/\cos\alpha$ и в случае $\alpha=90^\circ$ натяжение становится бесконечно большим.

При малых углах $\cos \alpha \approx 1$. Следовательно, период вращения конического маятника равен:

$$T = 2\pi / \omega_0 = 2\pi \sqrt{L/g}$$
, (4.31)

что похоже на формулу (4.12).

Получив период конического маятника, можно вычислить период математического маятника.

В [78, 226] приводится вывод периода колебаний математического маятника, считая их гармоническими. Для этого рассматриваются колебания маятников в двух взаимноперпендикулярных плоскостях. Можно показать, что при определенном сдвиге фазы сумма двух таких колебаний будет представлять собой движение по окружности, т.е. колебание математического маятника в двух взаимноперпендикулярных плоскостях эквивалентно движению конического маятника. Однако при доказательстве принимается априорное утверждение, что колебания -Если колебания не гармонические, приведенные гармонические. TO рассуждения неверны. Действительно, при отклонениях математического маятника на большие углы, сумма двух его колебаний

взаимноперпендикулярных плоскостях эквивалентно движению по кругу. Однако, период обращения конического маятника не равен периоду колебаний конического маятника при больших углах отклонения [4]. Приведем строгий вывод периода колебаний математического маятника при малых колебаниях, не делая априорных утверждений [167].

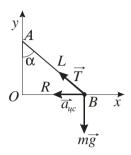


Рис. 4.13 К вычислению периода конического маятника

Для этого сравним движение этих маятников, считая, что углы отклонения обоих маятников малы. Сделаем рисунок — вид на математический маятник сбоку, а под ним вид на конический маятник сверху (рис. 4.14). Пусть длины маятников равны, оба маятника отклонены на угол α_0 , математический маятник колеблется вдоль оси x, и грузики обоих маятников находятся в точке A.

Пусть оба маятника одновременно пришли в движение, и грузик у конического маятника переместился в точку B (рис. 4.14). Найдем координаты x скорости и ускорения обоих грузов.

У конического маятника грузик движется по окружности радиуса $R = L \sin \alpha_0$ с угловой скоростью ω_0 . Следовательно, по определению угловой скорости, угол φ (рис. 4.14) меняется по закону:

$$\varphi = \omega_0 t . \tag{4.32}$$

Отсюда можно найти координату x грузика:

$$x = R\cos\varphi = L\sin\alpha_0\cos\varphi = L\alpha_0\cos(\omega_0 t). \tag{4.33}$$

Скорость грузика конического маятника не меняется и равна $\upsilon = \omega_0 \, R$, центростремительное ускорение a_{uc} также постоянно, направлено к центру и равно (в приближении малых углов):

$$a_{yc} = \omega_0^2 R = \frac{g L \sin \alpha_0}{L \cos \alpha_0} = \frac{g \sin \alpha_0}{\cos \alpha_0} \approx g \alpha_0.$$
 (4.34)

Соответственно, проекция скорости грузика конического маятника на ось x равна:

$$v_{r} = -v\sin\varphi = -v\sin(\omega_{0}t). \tag{4.35}$$

Проекция центростремительного ускорения на ось x равна:

$$a_x = -a_{uc}\cos\varphi = -g\alpha_0\cos(\omega_0 t). \tag{4.36}$$

Выразим проекцию ускорения через координату х:

$$a_x = -a_{uc}\cos\varphi = -g\alpha_0 x/R = -g\alpha_0 x/L\sin\alpha_0 = -gx/L$$
. (4.37)

Теперь найдем проекцию ускорения математического маятника на горизонтальную ось:

$$a_x = -g\sin\alpha\cos\alpha . (4.38)$$

При малых углах $\cos \alpha \approx 1$, следовательно:

$$a_x = -g \sin \alpha \cos \alpha \approx -g \sin \alpha = -gx/L$$
 (4.39)

Получилось, что проекции ускорения на ось x у конического и математического маятника одинаково зависят от координаты [167].

Здесь следует заметить, что у математического маятника есть еще центростремительное ускорение. Но поскольку нас интересует изменение величины проекции скорости:

$$\Delta v_x = \Delta v \cos \alpha = -g \sin \alpha \cdot \Delta t \cdot \cos \alpha \approx -g \sin \alpha \cdot \Delta t = -gx \cdot \Delta t / L$$
, (4.40)

то величина центростремительного ускорения грузика математического маятника нам сейчас не важна.

Сравним движения обоих маятников [167]. Вначале у маятников равны координаты и проекции ускорений на ось x (рис. 4.15). Проекции скоростей на ось x у обоих маятников равны нулю. Поскольку проекции скоростей и ускорений на ось x у обоих маятников одинаковы, то через малое время Δt координаты обоих маятника сместятся вдоль оси x и проекции их скоростей v_x изменились на одну величину. Поскольку координаты x их грузиков одинаковы, то по формулам (4.39 – 4.40) у них снова одинаковые ускорения a_x . Значит, за следующий интервал времени Δt оба маятника одинаково сместятся вдоль оси x, и проекции их скоростей v_x также изменятся на одну и ту же величину.

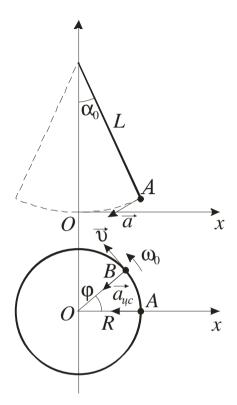


Рис. 4.14 К вычислению периода математического маятника

Получается, что в любой момент времени у обоих маятников будут одинаковые проекции координат, скоростей и ускорений на ось x. Следовательно, они вернутся в точку старта в одно и то же время. Значит, у них одинаковые периоды, что и требовалось доказать.

Обратим внимание, что указанное рассмотрение движение маятников позволяет не только вычислить период, но и получить закон движения математического маятника, т.е. найти зависимость его координаты от времени [167]. Мы получили, что координата x грузика математического маятника меняется так же, как координата x грузика конического маятника. Координату x грузика конического маятника мы уже вычислили (4.33). Следовательно, координата x математического маятника будет изменяться по тому же закону:

$$x = L\alpha_0 \cos(\omega_0 t) = x_0 \cos(\omega_0 t), \qquad (4.41)$$

где $\omega_0 = \sqrt{g/L}$.

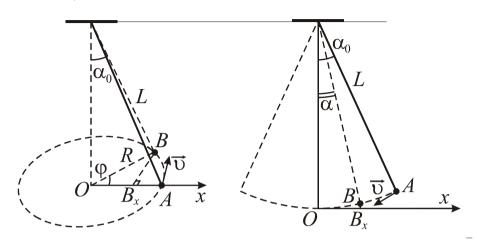


Рис. 4.15 Сравнение колебаний конического (слева) и математического (справа) маятников

Таким образом, мы получили, что координата x математического маятника меняется по *гармоническому* закону. Заметим, что это единственный (или, во всяком случае, самый простой) способ получить закон движения математического маятника без помощи производных.

Кроме того, мы попутно решили еще одну задачу — нашли зависимость скорости грузика математического маятника от времени [167]. Мы получили, что проекции скорости у математического и конического маятников одинаковы. А проекцию скорости конического маятника мы можем вычислить по формуле (4.35). Поскольку угол отклонения математического маятника мы считаем малым, то можем записать для скорости грузика математического маятника:

$$v \approx v_x = -v_0 \sin(\omega_0 t) , \qquad (4.42)$$

где v_0 – максимальная скорость математического маятника.

Очевидно, что максимальная скорость математического маятника равна скорости конического маятника. Угловую скорость конического маятника можно найти по формуле (4.29). В приближении малых углов она составит:

$$\omega_0 = \sqrt{g/L} \ . \tag{4.43}$$

Таким образом, скорость вращения конического маятника равна:

$$v_0 = \omega_0 R = \sqrt{\frac{g}{L}} L \sin \alpha_0 = \sqrt{\frac{g}{L}} x_0. \tag{4.44}$$

Эта же скорость будет максимальной скоростью грузика математического маятника.

4.1.5. Исследование колебаний пружинного маятника

Кроме математического маятника, в школе часто рассматривается пружинный маятник – грузик, подвешенный на пружинке (рис. 4.16) или скользящий без трения по горизонтальному столу или стержню [78, 200, 226].

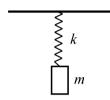
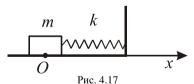


Рис. 4.16 Пружинный маятник

Обычно рассматривается идеальный маятник: пружина подчиняется закону Гука, масса пружинки много меньше массы грузика, сила трения отсуствует. Реальный пружинный маятник раскачивается из стороны в сторону, поэтому во многих учебниках и задачниках изображается горизонтальный пружинный маятник, движущийся без трения (рис. 4.17), хотя, к сожалению, не указывается, почему рассматривается горизонтальный, а не вертикальный маятник [226].



Горизонтальный пружинный маятник

Формула периода колебания пружинного маятника, так же как и математического маятника обычно приводится без строгого вывода [194]. Получим эту формулу, сначала из соображений размерности, затем численно

и потом из сравнения движения пружинного маятника и математического маятника [167].

4.1.5.1. Формула периода колебаний пружинного маятника из соображений размерности

Из соображений размерности период горизонтального пружинного маятника зависит только от k и m (по аналогии с математический маятником будем считать, что период от амплитуды не зависит). Единственное возможное сочетание:

$$T \sim \sqrt{m/k} \ . \tag{4.45}$$

В учебнике приводится формула периода колебаний пружинного маятника [194, 226]:

$$T = 2\pi \sqrt{m/k} \ . \tag{4.46}$$

Безразмерный коэффициент 2π можно получить либо численно, либо аналитически по аналогии с математическим маятником.

4.1.5.2. Численный расчет периода колебаний пружинного маятника

Рассчитаем период с помощью электронной таблицы. Направим ось x как показано на (рис. 4.17). Начало координат совместим с точкой равновесия. В отсутствии силы трения, вдоль оси x действует только сила упругости. Запишем II закон Ньютона в проекции на ось x:

$$ma_x = -kx , (4.47)$$

Отсюда проекция ускорения груза равно:

$$a_x = -kx/m , (4.48)$$

Будем заносить в столбцы:

A – время t.

B – координата x.

C – скорость υ .

D – ускорение a_x .

Начальное смещение примем равным 5 см, жесткость пружины – $k=100~{\rm H/m}$, массу пружины – $m=1~{\rm kr}$.

A2 – начальное время 0 (c);

В2 – начальное смещение 0,05 (м);

C2 – начальная скорость 0 (м/с);

J2 – интервал времени $\Delta t = 0.001$ (c).

L2 – значение k = 100 (H/м);

K2 - m = 1 (кг).

Занесем формулы:

Ячейка	Формула электронной	Математическая формула
	таблицы	
A3	A3=A2+J\$2	$t_{n+1} = t_n + \Delta t$
В3	B3=B2+(C2+C3)*J\$2/2	$x_{n+1} = x_n + (v_{n+1} + v_n) \Delta t / 2$
C3	C3=C2+D2*J\$2	$v_{n+1} = v_n + a_{x,n} \Delta t$
D2	D2=-L\$2*SIN(B2)/K\$2	$a_{x,n} = -kx_n / m$

Откопируем формулы и найдем, когда скорость меняет знак. Это происходит между строчками 630 и 631 [167]. Получилось, что период равен 0,628 с, что совпадает со значением, рассчитанным по формуле (4.46).

4.1.5.3. Вывод формулы периода колебаний пружинного маятника

Найдем период пружинного маятника аналитически. Проведем аналогию с математическим маятником. Ускорение грузика вдоль оси x по формуле (4.48) равно: $a_x = -kx/m$. С другой стороны, мы уже получили формулу (4.39) для математического маятника: $a_x = -gx/L$.

Если мы возьмем математический маятник, такой что: g/L = k/m, то при равных отклонениях маятников, значения проекций ускорений обоих маятников будут одинаковы. Пусть два маятника — математический и пружинный одновременно начнут движение, причем $x_0 = L \sin \alpha = L\alpha$. Поскольку их ускорения вначале одинаковы, то за любой малый промежуток времени Δt скорости будут меняться одинаково. Следовательно, координаты x грузов у обоих маятников будут все время равны. То есть период пружинного маятника будет равен периоду математического маятника: $T = 2\pi \sqrt{L/g}$. А так как у нас по условию g/L = k/m, то период пружинного маятника равен: $T = 2\pi \sqrt{m/k}$, что совпадает с формулой (4.46) из [201, 226].

Подставив в формулу (4.46) m = 1 кг, и k = 100 Н/м, получим период 0.683 с, что совпадает с результатом численного моделирования.

Заметим, что в силу одинаковости ускорения в любой момент времени рассматриваемых маятников, координата грузика пружинного маятника меняется, как и координата грузика математического маятника, по формуле (4.41):

$$x = x_0 \cos(\omega_0 t) , \qquad (4.49)$$

где $\omega_0 = \sqrt{k/m}$.

4.1.5.4. Задачи для самостоятельного исследования

В качестве тем для самостоятельного исследования можно предложить ученикам рассмотреть движение сложных маятников. Некоторые из них изображены на рис. 4.18, другие виды сложных маятников можно найти в сборниках олимпиадных задач [28, 58].

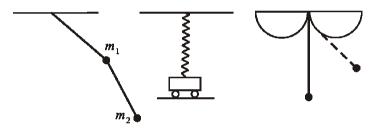


Рис. 4.18 Примеры сложных маятников

Наиболее интересные (с точки зрения автора) варианты сложных маятников будут разобраны ниже.

4.1.6. Исследование колебаний сложного пружинного маятника

Рассмотрим колебания сложного маятника, который представляет собой грузик, подвешенный на легкой пружине, которая может качаться вокруг неподвижной точки (рис. 4.19) [167].

Такой маятник можно сделать, используя пружину от эспандера и грузик, массы много большей, чем масса пружины (использование резинового эспандера представляет более сложную задачу, поскольку для резинового жгута плохо выполняется закон Гука, и нужно учитывать нелинейность зависимости натяжения от удлинения резины). Можно

подвесить грузик на пружине, и предоставить ему возможность колебаться вверх-вниз и из стороны в сторону.

Движение такого маятника не будет периодическим. Рассчитать движение можно с помощью схемы Эйлера в обычных модельных предположениях: будем считать, что пружина подчиняется закону Гука, пружина все время натянута, не изгибается, и что ее масса много меньше массы груза а ее длина много больше размеров грузика, т.е. грузик можно считать материальной точкой.

Задача эта сложна для самостоятельного исследования, поэтому можно рекомендовать на первом этапе помочь школьнику с составлением алгоритма для электронной таблицы [167].

Для расчета движения маятника введем систему координат как показано на рис. 4.19. Пусть длина маятника в нерастянутом состоянии l_0 , жесткость пружины k, масса грузика m. Начало координат, как и для математического маятника, поместим в точку подвеса (рис. 4.19).

На грузик действует сила тяжести и сила упругости со стороны пружины.

$$T = k(l - l_0). (4.50)$$

Длину пружины l мы найдем по формуле:

$$l = \sqrt{x^2 + y^2} \ , \tag{4.51}$$

где х и у – координаты грузика.

Запишем II закон Ньютона в проекции на оси координат:

$$ma_x = -k(l - l_0)\frac{x}{l},$$

$$ma_{y} = -mg - k(l - l_{0})\frac{y}{l}$$
. (4.52)

Здесь у школьников могут возникнуть вопросы [167].

- 1. Почему не учтена центробежная сила? Ответ. Центробежная сила появляется только в неинерциальной системе отсчета, а мы работаем в инерциальной системе отсчета [224].
- Почему vчтено центростремительное ускорение? не Ответ. Центростремительное ускорение вводится, когда тело двигалось ПО окружности, чтобы различить изменение скорости по модулю и по направлению. Поскольку сейчас движение не по окружности, нет смысла рассматривать изменение скорости по направлению. рассматриваем полное ускорения грузика, которое складывается

центростремительного ускорения, не меняющего значения скорости, и тангенциального, определяющего изменения модуля скорости. А полное ускорение грузика определяется из II закон Ньютона.

3. Как расставлены знаки? В проекции силы на ось x стоит знак «—» потому что при растягивании пружины вправо, сила будет действовать в обратном направлении. Перед силой тяжести «mg» стоит знак «—», ведь ось y направлена вверх. Но на первый взгляд кажется, что перед слагаемым « $k(l-l_0)y/l$ » должен стоять знак «+», ведь при растягивании пружины сила направлена вверх. Но следует учесть, что координата y грузика меньше нуля, поэтому в формуле стоит знак «—». «Минус» на «минус» даст «плюс», т.е. в результате значение проекции силы будет положительной.

Уравнения для проекций ускорений примут вид:

$$a_{x} = -\frac{k}{m}(l - l_{0})(x/l),$$

$$a_{y} = -g - \frac{k}{m}(l - l_{0})(y/l).$$
(4.53)

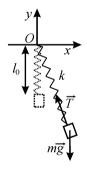


Рис. 4.19 К расчету колебаний сложного пружинного маятника

Перейдем к численным расчетам.

Занесем в столбиы:

A – время t;

B – координаты x;

C – координаты y;

D – проекции скорости v_x ;

E – проекции скорости v_{y} ;

F – длину пружины l;

G –проекции ускорения a_x .

H –проекции ускорения a_{y} .

В качестве начальных параметров возьмем, например, длину пружины 0,3 м, масса маятника 2 кг, после подвешивания он опуститься еще на 20 см. Отклоним маятник на 5 см вниз и на 5 см вбок.

Занесем в электронную таблицу начальные значения:

A2 – начальное время 0 (c);

B2 – начальное смещение x = 0.05 (м);

C2 – начальное смещение y = -0.55 (м);

D2 – начальная скорость $v_{x} = 0$ (м/с);

E2 – начальная скорость $v_{y} = 0$ (м/с).

Теперь заносим параметры маятника в дальние столбцы:

J2 – интервал времени $\Delta t = 0.01$ (c).

K2 – значение g = 9,815 (м/с²);

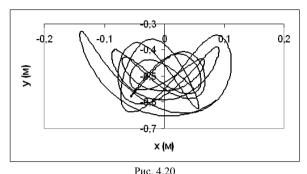
L2 – длина маятника $l_0 = 0.3$ (м);

M2 – отношение жесткости пружины к массе грузика k/m = 50 (H/м). Занесем формулы:

Ячейка	Формула электронной	Математическая формула
	таблицы	
A3	=A2+J\$2	$t_{n+1} = t_n + \Delta t$
В3	=B2+0,5*(D2+D3)*J\$2	$x_{n+1} = x_n + (v_{x,n+1} + v_{x,n}) \Delta t / 2$
C3	=C2+0,5*(E2+E3)*J\$2	$y_{n+1} = y_n + (v_{y,n+1} + v_{y,n}) \Delta t / 2$
D3	=D2+G2*J\$2	$v_{x,n+1} = v_{x,n} + a_{x,n} \Delta t$
E3	=E2+H2*J\$2	$v_{y,n+1} = v_{y,n} + a_{y,n} \Delta t$
F2	=КОРЕНЬ(В2^2+С2^2)	$l = \sqrt{x^2 + y^2}$
G2	=-M\$2*(F2-L\$2)*B2/F2	$a_{x,n} = -(k/m)(l-l_0)(x/l)$
H2	=-K\$2-M\$2*(F2-L\$2)*C2/F2	$a_{y,n} = -g - (k/m)(l - l_0)(y/l)$

Поскольку движение сложного маятника не периодично, то копировать формулы можно до любой строки. Но если поставить цель сравнить результаты с экспериментом, то реальный маятник вряд ли будет качаться более минуты, так что для начала можно копировать формулы до 500-ой строки.

Полученная траектория движения показана на рис. 4.20. Как и можно было ожидать, период не наблюдается, очень похоже на веревку, завязанную хитрым узлом [167].



чис. 4.20 Численный расчет траектории пружинного маятника

Осталось полученную траекторию получить экспериментально. Кроме того, подбирая различные начальные условия, можно получить «красивые» траектории, например, при соотношении: $\sqrt{k/m} = 2\sqrt{g/L}$ (маятник Горелика) [4]

4.1.7. Исследование колебаний двух связанных маятников 4.1.7.1. Численное моделирование колебаний двух связанных маятников

Среди колебательных систем особую группу можно выделить – *связанные маятники* (рис. 4.21) [4]. Массы нитей и пружинки будем считать пренебрежимо малыми. Чуть ниже мы рассмотрим вопрос, как сделать такую конструкцию. Когда грузики находятся в нижних положениях, пружинки не растянуты. Такая, несложная на первый взгляд, система позволяет продемонстрировать много интересных эффектов.

Начать можно с того, что спросить учеников: что произойдет, если качнуть левый маятник, не трогая правый?

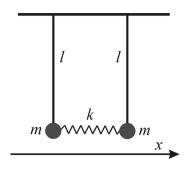


Рис. 4.21 Связанные маятники

Может показаться, что левый груз начнет раскачивать правый, и через какое-то время они будут колебаться с одинаковой амплитудой, при этом из-за трения колебания будут постепенно затухать. Однако эксперимент покажет, что маятники будут поочередно отдавать друг другу энергию, как будет указано ниже [167].

Промоделируем это движение, пренебрегая силой трения, считая углы колебания малыми, а пружины невесомыми и подчиняющимися закону Гука.

Пусть грузик левого маятника отклонился на величину x_1 , а правого – на x_2 (рис. 4.22). Тогда на левый грузик действует сила со стороны правого грузика:

$$F_{1x} = -k(x_1 - x_2). (4.54)$$

В соответствии с III законом Ньютона сила упругости будет действовать на правый груз в противоположенном направлении:

$$F_{2x} = k(x_1 - x_2) = -k(x_2 - x_1). (4.55)$$

Учтем силу тяжести. Горизонтальные проекции сил, действующих на грузы, равны:

$$F_{1x} = -k(x_1 - x_2) - m_1 g x_1 / L;$$

$$F_{2x} = -k(x_2 - x_1) - m_2 g x_2 / L.$$
 (4.56)

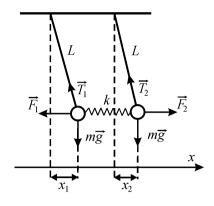


Рис. 4.22 К расчету колебаний двух связанных маятников

Ускорения грузов:

$$a_{1x} = -\frac{k}{m_1}(x_1 - x_2) - \frac{g}{L}x_1;$$

$$a_{2x} = -\frac{k}{m_2}(x_2 - x_1) - \frac{g}{L}x_2.$$
(4.57)

Рассмотрим для простоты случай равных значения масс: $m_1 = m_2 = m$.

$$a_{1x} = -\frac{k}{m}(x_1 - x_2) - \frac{g}{L}x_1;$$

$$a_{2x} = -\frac{k}{m}(x_2 - x_1) - \frac{g}{L}x_2.$$
(4.58)

Для численных расчетов нам потребуется столбцы:

A – времени t;

B – координаты левого грузика x_1 ;

C – координаты правого грузика x_2 ;

D – скорости левого грузика $v_{\scriptscriptstyle 1}$;

E – скорости правого грузика v_2 ;

F – ускорения левого грузика a_1 ;

G – ускорения правого грузика a_2 .

Примем для примера g/L равным 10 (c^{-2}), а k/m равным 1 (c^{-2}).

Поскольку отклонения должны быть малыми, возьмем начальное отклонение 1 (см). Занесем начальные параметры:

- A2 начальное время 0 (c);
- B2 начальное смещение левого грузика $x_1 = 0.01$ (м);
- C2 начальное смещение правого грузика $x_2 = 0$ (м);
- D2 начальная скорость левого грузика $v_1 = 0$ (м/с);
- E2 начальная скорость правого грузика $v_2 = 0$ (м/с).

Теперь заносим параметры маятника в дальние столбцы:

- J2 интервал времени $\Delta t = 0.001$ (c).
- K2 значение g/L = 10 (c⁻²);
- L2 отношение жесткости пружины к массе грузика k/m=1 (c⁻²). Занесем формулы:

Ячейка	Формула электронной таблицы	Математическая формула
A3	=A2+J\$2	$t_{n+1} = t_n + \Delta t$
В3	=B2+(D2+D3)*J\$2/2	$x_{1,n+1} = x_{1,n} + (v_{1,n+1} + v_{1,n}) \Delta t / 2$
C3	=C2+(E2+E3)*J\$2/2	$x_{2,n+1} = x_{2,n} + (v_{2x,n+1} + v_{2x,n}) \Delta t / 2$
D3	=D2+F2*J\$2	$v_{1x,n+1} = v_{1x,n} + a_{1x,n} \ \Delta t$
E3	=E2+G2*J\$2	$v_{2x,n+1} = v_{2x,n} + a_{2x,n} \Delta t$
F2	=-L\$2*(B2-C2)-K\$2*B2	$a_{1x,n} = -(k/m)(x_{1,n} - x_{2,n}) - (g/L)x_{1,n}$
G2	=-L\$2*(C2-B2)-K\$2*C2	$a_{2x,n} = -(k/m)(x_{2,n} - x_{1,n}) - (g/L)x_{2,n}$

Желательно посмотреть движение в течение длительного времени, поэтому будем копировать формулы до строчки №30000.

Построив для левого маятника график зависимости x_1 от t, получим периодическое увеличение и уменьшение амплитуды синусоиды [167]. Рассмотрев зависимость x_2 от t, можно убедиться, что второй маятник ведет себя похожим образом. Такое периодическое изменение амплитуды колебаний называется биениями [4]. Поскольку этот термин ученикам незнаком, учитель сам должен оценить целесообразность его упоминания.

Для наглядности оба графика можно вывести одновременно. Для того, чтобы графики не налезли друг на друга, один из графиков нужно сместить. Для этого достаточно взять свободный столбец, например, Н и занести туда формулу:

Ячейка	Формула таблицы	электронной	Математическая формула
H2	=C2+I\$2		$x'_{2,n} = x_{2,n} + h$

В ячейку I2 занесем величину, на которую нужно сместить графики. В нашем случае это 0,02 (м).

Теперь в электронной таблице можно построить два графика: x_1 от t и x'_2 от t (рис. 4.23). Получается, что вначале левый маятник полностью отдает свою энергию правому и останавливается. При этом правый маятник раскачивается до максимальной амплитуды. Затем правый маятник начинает раскачивать левый, и отдает ему свою энергию, а сам останавливается. И так они поочередно отдают друг другу свою энергию [167].

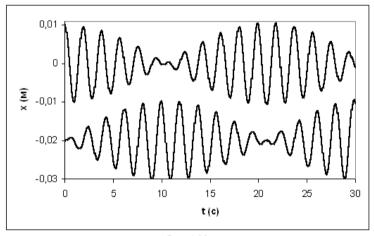


Рис. 4.23 Колебания связанных маятников

Связанные колебания позволяют продемонстрировать, как сильно меняется характер движения в зависимости от начальных условий. Маятники можно заставить колебаться синхронно (синфазно). Для этого нужно вначале отклонить маятники на одну величину, например, положить $x_1 = x_2 = 0.01$ (м) – см. рис. 4.24.

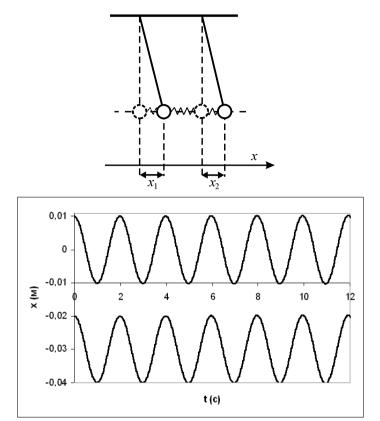


Рис. 4.24 Синфазные колебания связанных маятников

Несложно объяснить, почему так получается. Когда маятники качаются в фазе, то пружина остается все время не натянутой. Следовательно, они просто качаются как два ничем не связанных маятника с периодом $T=2\pi\sqrt{L/g}$. Подставим наши значения, получим: $T=2\cdot 3,14159\cdot \sqrt{0,1}=1,98691$ (c). Численные расчеты дают значение периода колебаний 1,986 с. Это совпадает с теоретическим значением с учетом точности наших расчетов 0,001 с.

Существует второй способ запустить маятники, чтобы они колебались с одной частотой. Если их отклонить в разные стороны на одинаковое расстояние, то в силу симметрии их движение будет одинаковым,

то есть как в зеркале, средняя точка пружины будет неподвижной, как будто в нее вбили гвоздик (рис. 4.25). В этом случае говорят, что маятники движутся в противофазе [4].

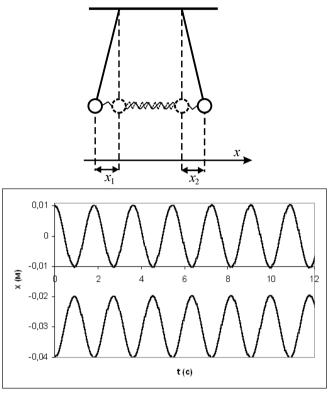


Рис. 4.25 Колебания связанных маятников в противофазе

Расчеты показывают, что у маятников изменился период. Он стал равен 1,813 с. Можно получить формулу для периода в этом случае.

Найдем силу, действующую на отклонившийся от равновесия грузик. Она равна:

$$F_{1x} = -k(x_1 - x_2) - m_1 g x_1 / L. (4.59)$$

Поскольку колебания происходят так, что в любой момент времени:

$$x_1 = -x_2 \,, \tag{4.60}$$

то уравнение (4.59) запишется в виде:

$$F_{1x} = -2kx_1 - m_1 gx_1 / L. (4.61)$$

Ускорение груза:

$$a_{1x} = \frac{F_{1x}}{m} = -\frac{2k}{m}x_1 - \frac{g}{L}x_1. \tag{4.62}$$

Вернемся к выводу формулы периода колебаний математического маятника из сопоставления его движения с коническим маятником. Когда ускорение и координата связаны формулой $a_x = -gx/L$, то период равен $T = 2\pi\sqrt{L/g}$ (4.31). Соответственно, в нашем случае период равен [4, 167]:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{1}{\frac{2k}{m} + \frac{g}{L}}}.$$
 (4.63)

Для наших начальных условий: g/L = 10 (c⁻²), k/m = 1 (c⁻²):

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{1}{\frac{2k}{m} + \frac{g}{L}}} = 2.3,14159 \cdot \sqrt{\frac{1}{2+10}} = 1,8138 \text{ (c)}.$$

Численные расчеты дают 1,813 с, что совпадает с теоретическим значением.

Таким образом, мы получили несколько видов (мод) колебаний связанных маятников: биения и два вида колебаний с одной частотой (собственных колебаний). В качестве самостоятельного задания можно предложить школьникам исследовать колебания связанных маятников с грузами разной массы.

4.1.7.2. Экспериментальная проверка

Чтобы экспериментально проверить проведенные расчеты достаточно взять два небольших грузика (например, рыболовные грузила) и подвесить их на бифилярных подвесах (рис. 4.26). Масса соединительного груза (можно взять скрепку) должна быть много меньше масс самих маятников [167].

Докажем, что при малых смещениях возвращающая сила будет пропорциональна расстоянию между грузиками. Найдем натяжение нити.

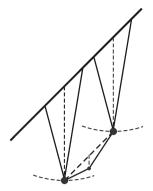


Рис. 4.26 Маятники, связанные с помощью грузика

Прежде всего, заметим, что грузик не может висеть строго вертикально, поскольку есть сила со стороны нити. Но поскольку масса грузика m много больше массы грузика m_0 , то это отклонение будет незначительным, и мы для простоты расчетов будем считать нить вертикальной (рис. 4.27).

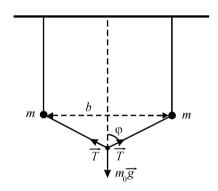


Рис. 4.27 К расчету натяжения нити

На грузик m_0 действует сила тяжести и две силы натяжения нити. Силы натяжения компенсируют друг друга в горизонтальном направлении, а в вертикальном направлении силы натяжения равны силе тяжести:

$$m_0 g = 2T \cos \varphi \,. \tag{4.64}$$

Отсюда получаем натяжение нити:

$$T = \frac{m_0 g}{2\cos\varphi} \,. \tag{4.65}$$

Далее, поскольку расстояние между грузиками велико, то при небольших колебаниях угол φ будет меняться незначительно. Поэтому в первом приближении можно пренебречь изменением угла φ .

На этом приближении лучше остановиться подробнее. У учеников может возникнуть чувство, что сделаны очень грубые предположения. Сделаем оценку изменения угла φ [167]. Пусть висят два грузика на расстоянии b=20 см (рис. 4.28). Отклоним теперь первый грузик на расстояние $x_1=1$ см, а второй – на $x_2=2$ см. Найдем расстояние b_1 между ними.

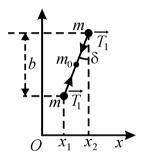


Рис. 4.28 К расчету натяжения нити

По теореме Пифагора: $b_1 = \sqrt{b^2 + (x_2 - x_1)^2} = \sqrt{20^2 + 1^2} = \sqrt{401} = 20,025$ (см). Таким образом, удлинение составит незначительную величину – менее 0,3 мм. Соответственно, незначительным будет изменение угла φ [167].

Найдем возвращающую силу. Спроецируем силу натяжения нити на горизонтальную плоскость (рис. 4.28). Проекция равна $T_1 = T \sin \varphi$. Поскольку угол φ практически не меняется, то не меняется и проекция силы натяжения на горизонтальную плоскость. Найдем проекцию силы натяжения на ось x:

$$T_{x} = T_{1} \sin \delta = T \sin \varphi \cdot \sin \delta . \qquad (4.66)$$

Учитывая, что угол δ мал:

$$T_x = T\sin\varphi \cdot \sin\delta = T\sin\varphi \frac{x}{h}. \tag{4.67}$$

С учетом (4.65):

$$T_x = \frac{m_0 g x \sin \varphi}{2b \cos \varphi} = \frac{m_0 g tg \varphi}{2b} x. \tag{4.68}$$

Таким образом, получилось, что действительно, возвращающая сила пропорциональна x. То есть, такая висячая конструкция равносильна пружине с коэффициентом жесткости:

$$k = \frac{m_0 g \ tg\varphi}{2h}. (4.69)$$

При проведении эксперимента не следует брать угол φ близким к 90°, иначе нить будет натянуться слишком сильно, и не будет выполняться условие, что угол φ меняется мало. Брать слишком малый угол также плохо. Тогда маленький груз на длинной нити будет сам колебаться как математический маятник, а это приведет к изменению натяжения нити. Оптимально взять угол φ примерно равным 60° .

Несмотря на простоту в изготовлении, такая конструкция позволяет экспериментально проверить все расчеты, относящиеся к колебаниям двух связанных маятников [167].

4.1.8. Исследование колебаний трех связанных маятников

Еще больше возможностей для исследования предоставляет система из трех связанных маятников (рис. 4.29) [4]. Формулы для ускорения грузиков будут похожи на (4.62), но на центральный грузик будут действует уже не одна, а две пружинки (или две нити с маленькими грузиками).

Силы, действующие на крайние грузики можно записать по аналогии с формулами (4.60) - (4.61):

$$F_{1x} = -k(x_1 - x_2) - mgx_1 / L;$$

$$F_{3x} = -k(x_3 - x_2) - mgx_3 / L.$$
(4.70)

Сила, действующая на средний грузик, равна:

$$F_{2x} = -k(x_2 - x_1) - k(x_2 - x_3) - mgx_2 / L$$
. (4.71)

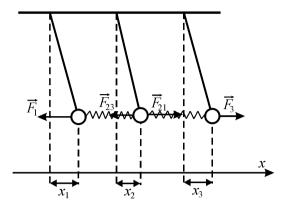


Рис. 4.29 Три связанных маятника

Ускорения грузов:

$$a_{1x} = -\frac{k}{m}(x_1 - x_2) - \frac{g}{L}x_1;$$

$$a_{2x} = -\frac{k}{m}(x_2 - x_1) - \frac{k}{m}(x_2 - x_3) - \frac{g}{L}x_2;$$

$$a_{3x} = -\frac{k}{m}(x_3 - x_2) - \frac{g}{L}x_3.$$
(4.72)

Для расчета движения трех маятников нужно создать электронную таблицу с 13 столбцами:

A – времени t;

B – координаты левого грузика x_1 ;

C – координаты среднего грузика x_2 ;

D – координаты правого грузика x_3 ;

E – скорости левого грузика v_1 ;

F – скорости среднего грузика v_2 ;

G – скорости правого грузика v_3 ;

H – ускорения левого грузика a_1 ;

I – ускорения среднего грузика a_2 ;

J – ускорения правого грузика a_3 .

И еще три ячейки для параметров:

K2 – интервал времени $\Delta t = 0.001$ (c).

L2 – значение g/L = 10 (c⁻²);

M2 – отношение жесткости пружины к массе грузика k/m = 1 (c⁻²).

Далее нужно задать малое отклонение маятников, например, одинаково отклонить три грузика на 0,01 м. Начальные параметры нужно занести в ячейки:

A2 – начальное время 0 (c);

B2 – начальное смещение левого грузика $x_1 = 0.01$ (м);

C2 – начальное смещение среднего грузика $x_2 = 0.01$ (м);

D2 – начальное смещение правого грузика $x_3 = 0.01$ (м);

E2 – начальная скорость левого грузика $v_1 = 0$ (м/с);

F2 – начальная скорость среднего грузика $v_2 = 0$ (м/с).

G2 – начальная скорость правого грузика $v_3 = 0$ (м/с).

Осталось занести формулы:

Ячейка	Формула электронной таблицы	Математическая формула
A3	=A2+K\$2	$t_{n+1} = t_n + \Delta t$
В3	=B2+0,5*(E2+E3)*K\$2	$x_{1,n+1} = x_{1,n} + (v_{1,n+1} + v_{1,n}) \Delta t / 2$
C3	=C2+0,5*(F2+F3)*K\$2	$x_{2,n+1} = x_{2,n} + (v_{2x,n+1} + v_{2x,n}) \Delta t / 2$
D3	=D2+0,5*(G2+G3)*K\$2	$x_{3,n+1} = x_{3,n} + (v_{3x,n+1} + v_{3x,n}) \Delta t / 2$
E3	=E2+H2*K\$2	$v_{1x,n+1} = v_{1x,n} + a_{1x,n} \ \Delta t$
F3	=F2+I2*K\$2	$v_{2x,n+1} = v_{2x,n} + a_{2x,n} \Delta t$
G3	=G2+J2*K\$2	$v_{3x,n+1} = v_{3x,n} + a_{3x,n} \Delta t$
H2	=-M\$2*(B2-C2)-L\$2*B2	$a_{1x,n} = -(k/m)(x_{1,n} - x_{2,n}) - (g/L)x_{1,n}$
I2	=-M\$2*(C2-B2)-	$a_{2x,n} = -(k/m)(x_{2,n} - x_{1,n}) -$
	M\$2*(C2-D2)-L\$2*C2	$-(k/m)(x_{2,n}-x_{3,n})-(g/L)x_{2,n}$
J2	=-M\$2*(D2-C2)-L\$2*D2	$a_{3x,n} = -(k/m)(x_{3,n} - x_{2,n}) - (g/L)x_{3,n}$

Расчеты показывают, что маятники колеблются синфазно с периодом 1,986 с, что прекрасно согласуется с формулой (4.31) [167].

Затем рассмотрим случай, когда центральный маятник неподвижен, а крайние колеблются в противофазе, т.е. навстречу друг другу (рис. 4.30). Для этого нужно занести в ячейки:

$$C2 = 0$$
; $D2 = -0.01$.

При этом период колебаний уменьшится и составит 1,894 с [167]. Получим по аналогии с формулой (4.63) формулу для периода колебаний трех связанных маятников в противофазе. В соответствии с уравнениями (4.72) ускорение крайнего маятника равно: $a_{1x} = -\frac{k}{m}(x_1 - x_2) - \frac{g}{L}x_1$. При колебаниях в противофазе $x_2 = 0$. Следовательно, ускорение крайнего левого (и правого) маятника равно:

$$a_x = -\frac{k}{m}x - \frac{g}{L}x. \tag{4.73}$$

Отсюда мы получаем выражение для периода колебаний маятников в противофазе:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{1}{\frac{k}{m} + \frac{g}{L}}} \tag{4.74}$$

Подставляем наши данные – $g/L = 10 (c^{-2}), k/m = 1 (c^{-2})$:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{1}{\frac{k}{m} + \frac{g}{L}}} = 2 \cdot 3,14159 \sqrt{\frac{1}{1+10}} = 1,8944 \text{ (c)},$$

что прекрасно согласуется с численными расчетами.

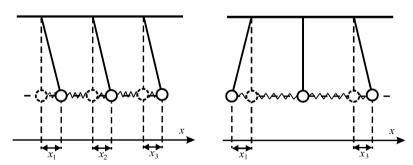


Рис. 4.30

Колебания трех связанных маятников в фазе (слева) и в противофазе (справа)

Существует третий способ привести маятники в движение так, чтобы они все колебались с одной частотой [4]. Найти его непросто. Поэтому лучше предложить ученикам найти этот способ самостоятельно, и лишь затем дать ответ. Нужно отклонить два крайних грузика на одинаковые углы α , а

средний грузик – в обратную сторону на угол 2α (см. рис. 4.31).

Найдем период получившихся колебаний. Занесим в ячейки:

$$C2 = -0.02$$
; $D2 = 0.01$.

Получается, что все маятники колеблются с одинаковым периодом 1,743 с.

Найдем период таких колебаний аналитически. По формуле (4.72) левый маятник движется с ускорением:

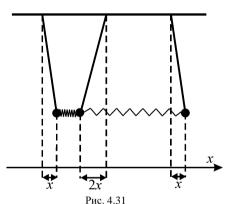
$$a_{1x} = -\frac{k}{m}(x_1 - x_2) - \frac{g}{L}x_1. \tag{4.75}$$

В начальный момент времени:

$$x_2 = -2x_1 \text{ if } x_3 = x_1. \tag{4.76}$$

Поскольку маятники качаются с одинаковыми периодами, то эти соотношения будут выполняться все время. Следовательно:

$$a_{1x} = -\frac{k}{m} 3x_1 - \frac{g}{L} x_1. {(4.77)}$$



Колебания связанных маятников

Найдем ускорение среднего грузика. Из системы уравнений (4.72) оно равно:

$$a_{2x} = -\frac{k}{m}(x_2 - x_1) - \frac{k}{m}(x_2 - x_3) - \frac{g}{L}x_2.$$
 (4.78)

Подставляя соотношения (4.77), имеем:

$$a_{2x} = -\frac{k}{m}(x_2 + \frac{x_2}{2}) - \frac{k}{m}(x_2 + \frac{x_2}{2}) - \frac{g}{L}x_2 = -\frac{k}{m}3x_2 - \frac{g}{L}x_2.$$
 (4.79)

Получается, что ускорение среднего грузика все время в два раза больше ускорения крайних грузиков. Однако, поскольку центральный грузик проходит вдвое больший путь, то периоды у них получаются одинаковыми и равными (по аналогии с формулой (4.63)) [167]:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{1}{\frac{3k}{m} + \frac{g}{L}}} \ . \tag{4.80}$$

Подставляя наши данные – $g/L = 10 (c^{-2})$, $k/m = 1 (c^{-2})$, получим:

$$T=2\pi\sqrt{\frac{1}{\frac{3k}{m}+\frac{g}{L}}}=2\cdot 3,14159\sqrt{\frac{1}{3+10}}=1,7426$$
 с, что совпадает с численными

расчетами.

Кроме этого, интересно рассчитать, как будет вести себя система, если качнуть только один крайний маятник. Можно задать этот вопрос ученикам для самостоятельного исследования, поскольку догадаться до ответа, не проводя вычислительного или натурного эксперимента, слишком сложно [167].

Для численного расчета колебаний, когда отклонили один крайний маятник, занесем в ячейки:

$$B2 = 0.01$$
; $C2 = 0$; $D2 = 0$.

Получаются колебания с периодически меняющейся амплитудой как показано на рис. 4.32.

Система из трех связанных маятников позволяет провести много исследований, при этом численные расчеты несложно проверить экспериментально, а часть из них можно сравнить с теоретическими вычислениями. Таким образом, мы продемонстрировали, что связанные маятники предоставляет широкое поле для исследовательской деятельности [167]. Ниже мы наметим основные направления возможных исследований (конкретных тем можно придумать намного больше — это уже входит в компетенцию научных руководителей).

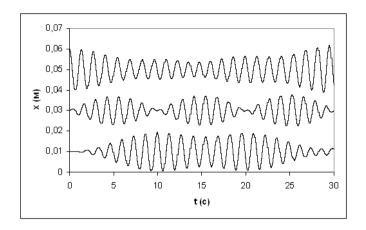


Рис. 4.32 Колебания связанных маятников: вверху колебания первого грузика, в центре - второго, снизу - третьего

4.1.9. Задачи для самостоятельного исследования

- 1. Увеличение числа маятников. Можно предложить школьникам рассчитать движения четырех и более связанных маятников. Например, рассмотреть четыре связанных маятника их можно запустить четырьмя способами, чтобы они колебались с одной частотой. Задача заключается в том, чтобы найти эти способы. Затем полученные расчеты можно будет проверить экспериментально. Можно также рассмотреть пять, шесть или больше связанных маятников, подобрать для них начальные условия, чтобы они совершали гармонические колебания с одной частотой, однако опыт показывает, что просто механическое усложнение задачи не вызывает интереса у школьников [167].
- 2. Исследование движения системы маятников с грузиками разных масс. Их нетрудно реализовать экспериментально подвесить грузик другой массы. Интерес к таким колебаниям вызван тем, что он позволяет моделировать колебание атомов в молекулах. Правда, для большей схожести с колебаниями атомов в молекуле, нужно рассмотреть колебания не математических, а связанных пружинных маятников, лежащих на столе без трения (рис. 4.33.)

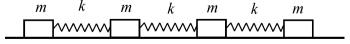


Рис. 4.33 Связанные пружинные маятники

В этом случае не нужно учитывать силу тяжести, т.е. в формулах (4.70)-(4.71) останутся только силы упругости:

$$F_{1x} = -k(x_1 - x_2);$$

$$F_{2x} = -k(x_2 - x_1) - k(x_2 - x_3);$$

$$F_{3x} = -k(x_3 - x_2) - k(x_3 - x_4) \dots$$
(4.81)

3. Можно также рассмотреть вертикальные связанные маятники – несколько грузиков, висящих на пружинках, как показано на рис. 4.34.

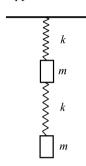


Рис. 4.34 Вертикальные связанные маятники

Их движение также сложно предугадать заранее. Однако эксперимент с ними затруднен, поскольку через некоторое время такая система начинает раскачиваться из стороны в сторону.

4. Увеличив число маятников до 10 и более, можно рассчитывать распространения колебаний. Для расчетов, придется использовать много столбцов. И хотя в электронных таблицах столбцы можно копировать, такие задачи лучше решать с помощью языков программирования. Интересна эта таким образом онжом моделировать задача тем, что процесс распространения упругих волн. Реальные упругие волны в струне и др. средах распространяются слишком быстро, чтобы за ними можно было уследить с помощью школьного оборудования. Система маятников позволит наблюдать эти процессы в реальном времени [167].

Распространение волн предоставляет огромное число задач для исследования. Например, можно рассчитать [167]:

- а) затухание при распространении колебаний какая часть энергии дойдет от первого маятника до 10-го, т.е. нужно найти амплитуду колебания 10-го маятника, когда до него дойдет волна;
- b) отражение от более плотной среды например, сделать грузик у пятого

маятника в два раза тяжелее или в 2 раза легче остальных, как это повлияет на амплитуду колебаний 10-го маятника;

- с) условие возбуждения волны: если привести в движение не один маятник, а первые два, как это изменит амплитуду колебания 10-го маятника;
- d) скорость распространения колебаний как зависит скорость волны от массы грузиков и жесткости пружин (результаты можно сравнить с теоретической зависимостью скорости упругой волны от плотности среды и модуля Юнга);
- е) можно исследовать условие возникновения и распространения одиночной волны – солитона.

Указанные выше задачи можно решить как для системы связанных маятников, так и для системы грузиков, соединенных пружинками на горизонтальном столе. Последнее более напоминает распространение волн в упругой среде: звуковых волн в стержне, сейсмических волн в земной коре и т.д. Разумеется, можно придумать еще много тем. Кроме того, для большей реалистичности можно промоделировать затухание колебаний, о чем подробнее пойдет речь ниже.

4.2. Исследование движения в вязкой среде

4.2.1. Определение круга задач, разбираемых при изучении темы вязкое трение (сопротивление среды)

Практически все движения, рассматриваемые в школьных задачах, происходят в воздухе или в воде (исключением является разве что рассмотрение движения спутников). Однако сила вязкого трения почти никогда не учитывается. При этом даже в профильном курсе тема «вязкое трение» рассматривается вскользь. Обычно говорится, что при малых скоростях сила трения (сопротивления) пропорциональна скорости тела, а при больших – квадрату скорости. Однако при этом не обсуждается, какие скорости считать «малыми» и как вычислить коэффициент пропорциональности [78, 200].

Такое положение дел существует по нескольким причинам. Вопервых, в большинстве случаях, сила трения (сопротивления) воздуха намного меньше других сил, действующих в системе, и ей можно пренебречь. Во-вторых, расчеты движений тел с учетом силы вязкого трения чрезвычайно сложны и могут быть проведены аналитически лишь для узкого круга задач.

Таким образом, задачи, связанные с измерением силы трения (сопротивления) среды удовлетворяют указанным выше критериям тем для исследовательских работ: они не могут быть решены простыми аналитическими способами, многие из них имеют известное решение методами высшей математики, многие задачи могут быть реализованы экспериментально, и многие задачи могут быть решены численно.

Остановимся на последовательности изложения материала. Она обусловлена тем, в каких условиях читается курс: как элективный (факультативный) курс в течение учебного года или как недельный курс в летней школе.

Если курс читается в течение учебного года с большим числом часов, то тема вязкого трения может быть продолжением изложенного выше курса. При этом могут быть рассмотрены следующие задачи [160]:

- вертикальное падение тел в воздухе;
- полет тела, брошенного под углом к горизонту;
- затухающие колебания маятника (пружинного или математического);
- (ламинарное) движение тел в вязкой жидкости.

Особенностью этой темы является то, что указанные задачи могут излагаться независимо друг от друга в порядке, который может выбрать сам учитель.

Особенности чтения курса в летней школе рассмотрим в следующем параграфе.

4.2.2. Постановка задачи учета сопротивления воздуха на примере опыта Галилея

Если курс читается в летней школе и на него отводится 7–10 занятий, то его удобно начать как раз с темы вязкого трения. Для того чтобы поддерживать интерес к курсу можно использовать нехитрый прием: сначала поставить задачу, которая могла бы быть интересной школьникам, а затем ее решать в течение курса.

В качестве такой задачи можно предложить анализ знаменитого эксперимента Галилея на Пизанской башне, предварив его живым описанием происходящих событий [160].

В один прекрасный день 1590 года в университете старинного итальянского города Пиза царило оживление. Еще бы, известный профессор Галилео Галилей обещал спрыгнуть со знаменитой Пизанской башни. Посмотреть на такое чудо собралась изрядная толпа: студенты, профессора и просто зеваки. В назначенный час Галилей действительно появился на башне, но прыгать с нее не стал, а объявил, собрал всех здесь, чтобы публично произвести опыт, ниспровергающий учение Аристотеля о законах движения тел. Аристотель утверждал, что скорость падения тела тем больше, чем оно тяжелее. Галилей пришел к выводу, что все тела падают одинаково быстро. Учение Аристотеля господствовало к тому моменту почти две тысячи лет, и объявить о его ошибочности было в то время неслыханной дерзостью. Для подтверждения своей правоты Галилей в присутствии собравшейся толпы одновременно бросил с башни тяжелое пушечное ядро и легкую мушкетную пулю. Пизанская башня уже тогда была сильно наклонена, поэтому можно было не беспокоиться, что стены могут помешать падению. Зрители на площади с замиранием смотрели на полет тел, некоторые даже чтобы точнее земле, **УЛОВИТЬ** «Одновременно, Галилей прав!» – закричали одни. «Нет, ядро все же упало раньше!» - кричали другие...

Прежде всего, отметим, что существуют сомнения, что Галилей такой эксперимент вообще проводил, во всяком случае, в такой постановке [205]. Аргументы скептиков таковы. До нашего времени дошли основные труды Галилея [31, 32], и в них Галилей не ссылается на этот эксперимент.

Во-вторых, в такой постановке Галилей не мог ни подтвердить, ни опровергнуть Аристотеля, поскольку Аристотель утверждал, что при падении тел одного размера и одинаковой формы тяжелые тела падают быстрее легких. Для опровержения теории Аристотеля нужно было бросать одинаковые шары. И, действительно, по другой версии этой легенды [116]

Галилей бросал четыре шара равного диаметра: золотой, свинцовый, мраморный и восковый, причем восковый шар прилетел заметно позже. Еще по одной версии были брошены два шара равного диаметра: чугунный и деревянный [51]. При этом неясно, идет ли речь об одном и том же эксперименте или Галилей проводил свои эксперименты многократно.

Третий аргумент заключается в том, что о бросании Галилеем тел с Пизанской башни написал в своих воспоминаниях ученик Галилея Вивиани (1622–1703), причем написал об этом через много лет после смерти Галилея. Сам он во время описываемого события еще не родился, а видимо, знал о произошедшем от учителя.

Но, с другой стороны, нет оснований не доверять Вивиани. Его рассказ полон подробностей: например, один из знакомых Галилея, чтобы привлечь побольше зрителей, сделал, как сейчас говорят, рекламный ход – он пустил слух, что в полдень профессор Галилей прыгнет с Пизанской башни. Его выдумка удалась – на такое зрелище собралось множество зевак. Кроме того, существуют свидетельства, что позднее ученики Галилея провели много подобных экспериментов в разных городах, в том числе ученик Галилея Винченцо Раньери бросал тела с Пизанской башни [107].

Впрочем, для нас не так уж важно, проводил Галилей эксперимент или нет – легенда об этом эксперименте есть практически во всех учебниках физики и ученики знают о нем. Для нас важно другое: чем должен был закончиться эксперимент, если он был проведен?

Обычно школьники уверены, что тела должны были упасть одновременно, ведь оба тела падали с ускорением свободного падения g. Но ведь Галилей не откачивал воздух перед Пизанской башней, поэтому тела падали 6 воздухе. Столь уж очевидно, что сила сопротивления воздуха мала?

Прежде чем проводить детальные расчеты, можно начать с качественного анализа задачи. Можно сделать разумное предположение, что сила сопротивления пропорциональна площади сечения тела, говоря точнее, площади максимального сечения, перпендикулярного скорости движения тела. Обычно это предположение принимается школьниками без возражений. Действительно, если отпустить лист бумаги, держа его горизонтально, то он будет падать медленно, а если держать его вертикально, когда площадь сечения практически равна нулю, то лист упадет быстрее.

Запишем II закон Ньютона в проекции на вертикальную ось (пусть для определенности ось направлена вверх):

$$ma = -mg + F_c. (4.82)$$

Ускорение падающего тела:

$$a = -g + F_c / m. (4.83)$$

Далее можно провести следующие рассуждения: если диаметр ядра, например, в 10 раз больше пули, то его площадь в 100 раз больше, а объем больше в 1000 раз. Следовательно, и масса ядра больше в 1000 раз. Получается, что слагаемое F_c/m при равных скоростях для ядра в 10 раз меньше, чем для пули, т.е. сопротивление воздуха окажет влияние на ускорение ядра в 10 раз меньше, чем на ускорение пули. Таким образом, получается, что ядро упадет быстрее пули.

Полученный результат обескураживает школьников. Выходит, что Галилей своим знаменитым экспериментом ничего не доказал и *не мог доказать*. По Аристотелю ядро должно было упасть быстрее, и по современным представлениям о законах движения оно должно упасть быстрее. Становится непонятным, в чем был смысл этого эксперимента и почему он попал в учебник по физике.

Здесь приходится останавливаться и детально обсуждать точность проводимого эксперимента. Важно не только, одновременно ли упали ядро и пуля или нет, но и насколько ядро опередило пулю. Если на сотую секунду, то толпа на площади этого просто бы не заметила. Отсюда вытекает необходимость рассчитать время падения ядра и пули. Начнем с того, как определять величину вязкого трения.

4.2.3. Определение величины вязкого трения (сопротивления среды)

В механике рассматривают два принципиально различных типа движения тела в жидкости или газе: *паминарное* (от латинского «lamina» – «тонкий слой»), не образующее вихри и *турбулентное* или вихревое (от латинского «turbo» – «вихрь») [4, 146, 156, 160, 163, 168, 183].

При малых скоростях движения тела в жидкости или газе является ламинарным и основную роль в замедлении движения играет вязкое трение. Его механизм заключается в том, что при движении тела в среде, оно раздвигает среду, которая смыкается за телом. При этом прилегающий к телу тонкий слой жидкости или газа трется о тело, и разгоняется им до скорости, практически равной скорости тела (рис. 4.35, слева). Этот слой, в свою очередь, разгоняет соседний с ним слой, и, таким образом, получается последовательность слоев (отсюда и название «lamina»), которые трутся друг о друга и движутся с постепенно уменьшающимися скоростями: от скорости тела до нулевой скорости около стенок (если падение происходит в комнате или другом ограниченном пространстве) или на бесконечности (т.е. если стенки достаточно далеко, так что движение среды незаметно). Взаимное влияние слоев и создает вязкое трение, пропорциональное скорости тела [4]:

$$\overline{F}_{mpehus} = -\alpha \overline{v}, \qquad (4.84)$$

где α – коэффициент пропорциональности силы вязкого трения.

При увеличении скорости тела слои уже не успевают смыкаться за телом, слоистая структура жидкости или газа разрушается, и образуются вихри (рис. 4.35, в центре). Получается, что тело не только разгоняет слои жидкости или газа, но и увлекает вихри за собой. При этом разгоняется гораздо больше жидкости или газа, чем в случае ламинарного обтекания. В этом случае принято говорить уже не о вязком трении, а о сопротивлении среды, при этом сила сопротивления будет пропорциональна квадрату скорости:

$$F_{\text{сопротивления}} = -\beta v^2, \qquad (4.85)$$

где β – коэффициент пропорциональности силы сопротивления.

Следует заметить, что в разных учебниках терминология может немного различаться, и иногда вязкое трение также называют силой сопротивления среды [78].

При анализе формулы (4.85) У учеников может возникнуть вопрос: почему в формуле (4.85) сила стоит без вектора? Важно подчеркнуть, что было бы неверно записать формулу (4.85) в виде: $\overline{F}_{conpomueления} = -\beta \overline{v}^2$, поскольку скалярное произведение двух векторов — величина скалярная. Правильная запись формулы (4.85) в векторном виде — это произведение вектора скорости на скалярную величину — модуль скорости:

$$\overline{F}_{\text{сопротивления}} = -\beta \overline{v} | \overline{v} |$$
 (4.86)

Для определения характера движения тела в вязкой среде используется параметр, называемый числом Рейнольдса Re [4]:

$$Re = \frac{\rho v L}{\eta}, \qquad (4.87)$$

где ρ – плотность среды, v – скорость тела, L – характерные размеры тела (в нашем случае – диаметр шарика), η – вязкость. Вязкость зависит от рода вещества и от температуры. Ее значение можно посмотреть в таблицах физико-химических величин (см., например, [202]). Для воздуха при комнатной температуре она составляет 1,8·10⁻⁵ кг/(м·c), для воды – $0.82 \cdot 10^{-3}$ кг/(м·c), для глицерина – 2.9 кг/(м·c).

При Re меньше 10 движение шарообразных тел можно считать ламинарным. Значение коэффициента трения, возникающего при ламинарном движении шара, определяется формулой Стокса [4].

$$\alpha = 6\pi R\eta , \qquad (4.88)$$

где R — радиус шара.

Поскольку эта тема сложна для понимания, нужно много раз упоминать условия применимости формул. В частности, нужно подчеркнуть, что ламинарное движение при числах Re меньше 10 наблюдается только у тел обтекаемой формы: шарообразной, каплеобразной или напоминающей профиль самолетного крыла. Если двигать, например, кубик или диск (рис. 4.35, справа), то вихри будут образовываться даже при очень маленьких скоростях.

При увеличении числа Re движение приобретает турбулентный (вихревой) характер. Конечно, нельзя указать конкретное значение числа Re, при котором движение перестает быть ламинарным, просто с увеличением числа Re формула Стокса будет описывать движение все менее точно. При числах Re больших 100 движение носит существенно турбулентный характер.

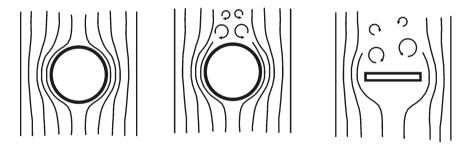


Рис. 4.35 Ламинарное (слева) и турбулентное (в центре и справа) обтекание тела

Точной формулы для описания движения тела при наличии вихрей не существует. В этом случае расчет силы сопротивления среды основывается на учете количества среды, увлекаемой телом при движении. При числах ${\rm Re}$ от 10^2 до примерно 10^5 можно пользоваться приближенной формулой [4]:

$$F_{conpomugzehug} = C_x S \rho v^2/2, \qquad (4.89)$$

где S — площадь сечения движущегося тела плоскостью перпендикулярной направлению движения, а C_x — коэффициент лобового сопротивления, зависящий от формы тела (целесообразно обратить внимание учеников, что сила сопротивления в этом случае уже не зависит от вязкости η). В интервале чисел Re от 10^2 до 10^5 для шара C_x можно принять примерно равным 0,45. Именно неточность этого коэффициента внесет нам основную погрешность в

последующих вычислениях. Соответственно коэффициент сопротивления воздуха β в формуле (4.86) равен:

$$\beta = C_x S \rho / 2. \tag{4.90}$$

Следует обратить внимание, что формула (4.90) является приблизительной, а значение коэффициента лобового сопротивления C_x было получено на основе экспериментов в аэродинамических трубах [4].

Каким же был характер обтекания воздухом у ядра и пули при падении с Пизанской башни? Оценим число Re в этом случае. Примем диаметр дробинки 1 см. При скорости падения 10 см/с (а такую скорость при падении она наберет примерно за одну сотую секунды) число Re будет порядка 50, т.е. много больше 10. Следовательно, движение воздуха вокруг дробинки будет турбулентным уже через одну сотую секунду полета.

Когда же можно наблюдать ламинарное обтекание движущихся в воздухе тел, чтобы пользоваться линейной зависимостью сопротивления воздуха от скорости? Только при движении небольших (меньше сантиметра) тел со скоростью не более сантиметра в секунду. Такими телами, например, являются капельки воды в тумане, что будет подробнее разобрано ниже. Для них справедлива формула Стокса.

Поскольку обычно приходится наблюдать движение тел в воздухе со скоростями больше 1 см/с, то для изучения ламинарного обтекания можно взять другую среду. Можно ли в качестве такой среды взять воду? Вязкость воды почти в 100 раз больше воздуха [202], но плотность больше плотности воздуха почти в 1000 раз, поэтому число Re в воде при той же скорости пули будет больше. Для наблюдения ламинарного движения лучше брать более вязкие жидкости, например, глицерин.

4.2.4. Схема Эйлера при известной зависимости ускорения от скорости, анализ опыта Галилея

При создании алгоритма для расчета движения по схеме Эйлера нужно иметь в виду, что в соответствии с формулами (4.89), ускорение будет зависеть не от координаты, а от скорости.

Перейдем к составлению алгоритма по схеме Эйлера [168]. Из уравнений (4.89), получим ускорение тел:

$$a = -g + \frac{C_x S \rho}{2m} v^2 = -g + \frac{\beta}{m} v^2. \tag{4.91}$$

Будем заносить в столбцы:

A — время t;

B – координата x;

C – скорость υ ;

D – ускорение a.

Начнем с отсутствия сопротивления воздуха, т.е. $\beta = 0$. В ячейки E2-G2 будем заносить параметры:

E2 – интервал времени $\Delta t = 0.001$ (c);

F2 – коэффициент $\beta/m = 0$;

G2 – ускорение свободного падения g = 9.815 (м/с²).

Высота Пизанской башни равна 55 м. Скорее всего, Галилей сбрасывал ядро не с самого верха, а с одной из анфилад, но примем, что тела пролетели почти 55 м.

Занесем начальные значения:

A2 – начало отчета по времени t = 0 (c);

B2 – начальная координата $x_0 = 55$ (м);

C2 – начальная скорость $v_0 = 0$ (м/с).

Теперь занесем в ячейки формулы:

Ячейка	Формула электронной таблицы	Математическая формула
A3	=A2+E\$2	$t_{n+1} = t_n + \Delta t$
В3	=B2+0,5*(C2+C3)*E\$2	$x_{n+1} = x_n + 0.5(v_n + v_{n+1})\Delta t$
C3	=C2+D2*E\$2	$v_{n+1} = v_n + a_n \Delta t$
D2	=-G\$2+F\$2*C2*C2	$a_n = -g + \beta v_n^2 / m$

Остается откопировать формулы в нижележащие ячейки и получить время движения тела. Расчеты показывают, что в отсутствии сопротивления воздуха при h=55 м координата x меняет знак между 3349 и 3350 строками, ближе к нулю значение в 3350 строке (B3350 = -0,0087). Время падения считаем из ячейки A3350 = 3,448 (c).

Теоретическое значение времени падения равно:

$$t = \sqrt{2h/g} \ . \tag{4.92}$$

При h = 55 м время падения составляет 3,3477 с, что прекрасно совпадает с рассчитанным значением.

Проверив работу схемы в отсутствии сопротивления воздуха, перейдем к расчету падения ядра и пули. Для этого нужно знать их размер и массы. Размеры можно узнать из книги Галилея 1638 г. «Беседы и

математические доказательства, касающиеся двух новых отраслей науки, относящиеся к механике и местному движению» (далее «Беседы...») [32].

При наличии времени можно дать ученикам краткую историческую справку о трудах Галилея. Два своих основных труда; «Беседы...» и «Диалог...» Галилей писал не от первого лица, а в виде беседы трех лиц. Симпличио – убежденный последователь Аристотеля. Сальвиати выступает против некоторых положений физики Аристотеля, а Сагредо - слушатель, стремящийся познать истину, хотя он не принимает явно чью-либо сторону в споре, но симпатизирует Сальвиати. На чьей стороне автор, из текста не видно, так что читатель сам может выбрать, чьи аргументы ему больше нравятся – последователя Аристотеля или его противника. Такая форма лиалога позволила Галилею избежать конфликта с Церковью. В 1632 г. он издает «Диалог о двух главнейших системах мира, Птоломеевой и Коперниковой». В этой книге Галилей излагает устройство мира по Копернику, но при этом лишь обсуждает его учение, не утверждая, что оно Так он смог, с одной стороны, донести до гелиоцентрическую систему Коперника, с другой, - сделать неясным, является он сторонником учения Коперника или противником. В конечном счете, это спасло Галилея от костра [205].

В ходе первого дня беседы Сагредо говорит:

«Но я, синьор Симпличио, не производивший никаких опытов, уверяю вас, что пушечное ядро весом в сто, двести и более фунтов не опередит и на одну пядь мушкетной пули весом меньше полуфунта при падении на землю с высоты двухсот локтей» [32, с. 164–165].

В тексте есть некоторая неясность: если Сагредо не проводил опыта, то почему он так уверен в его результате? С точки зрения современного естествоиспытателя нужно было бы провести эксперимент, но во времена Галилея было другое отношение к эксперименту: рассуждения и ссылка на авторитет Аристотеля, Пифагора и др. казались важнее, чем результаты эксперимента [84]. Поэтому вряд ли слова Сагредо можно считать намеком на проведенный Галилеем в Пизе опыт, тем более, что высота 200 локтей – примерно 100 метров не соответствует размеру Пизанской башни (55 метров). Но мы можем принять указанные в «Беседах...» массы тел.

Здесь возникает вопрос: как перевести фунт в килограммы? Английский фунт равен 0,45 кг, а русский фунт – 0,41 кг. Вряд ли Галилей пользовался русским или английским фунтом. Во времена Галилея в Европе широко применялся тройский или аптекарский фунт, который в настоящее время принят равным 0,3732 кг. Строго говоря, для наших целей неважно, каким фунтом пользовался Галилей, примем за основу тройский фунт. Тогда стофунтовое ядро имеет массу 37,3 кг, а полуфунтовая пуля – 0,1865 кг. Будем считать ядро железным и цельнолитым. Вычислим радиус ядра по формуле:

$$R = \sqrt[3]{3V/4\pi} = \sqrt[3]{3m/4\pi \,\rho_{Fe}} \ . \tag{4.93}$$

Плотность железа равна $7.9 \cdot 10^3$ кг/м 3 [202]. Значит, сто фунтовое ядро имеет радиус 10.4 см. Можно обратить внимание учеников, что они, несомненно, видели в военных музеях ядра такого размера.

Примем плотность воздуха равной $1,25 \text{ кг/м}^3$, тогда для ядра коэффициент β/m равен:

$$\beta/m = C_x S \rho/2m = 0.4 \cdot 3.14159 \cdot (0.104)^2 \cdot 1.25/(2 \cdot 37.3) = 0.23 \cdot 10^{-3} \text{ m}^{-1}.$$

Поскольку в те времена пули отливали в виде шариков, аналогично рассчитаем радиус полуфунтовой мушкетной пули при той же плотности. Он составляет 17.8 мм. Для пули коэффициент β/m равен:

$$\beta/m = C_x S \rho/2m = 0.4 \cdot 3.14159 \cdot (0.0178)^2 \cdot 1.25/(2 \cdot 0.1865) = 1.33 \cdot 10^{-3} \text{ m}^{-1}.$$

Как и следовало ожидать, у пули коэффициент β/m больше, чем у ядра.

Подставим в электронную таблицу вычисленные значения β/m для ядра и пули, и проанализируем возможный исход опыта Галилея.

Ядро с высоты 55 м будет падать 3,355 с, а пуля — 3,389 с. Следовательно, ядро падает менее чем на сотую долю секунды больше, чем оно падало бы в отсутствии воздуха. Разность во времени падения ядра и пули составляет менее 0,05 с. Трудно сказать, можно заметить отставание на 0,05 с или нет. Зрителей было много. Кто хотел, чтобы тела упали одновременно, мог счесть, что они упали одновременно, а кто хотел, чтобы раньше упало ядро, мог увидеть и это. Сегодня этот вопрос можно было бы решить с помощью фотофиниша по аналогии с тем, как это делают в спорте, чтобы узнать, кто из спортсменов пришел первым: делают снимок, на котором видно, кто первый, кто второй. Но в те времена фотокамер не было.

Обратим внимание, что расстояние между телами совсем не так мало, как думает Сагредо. Ядро летит до земли 3,355 с, пуля к этому времени находится на высоте 1,12 м, что намного больше пяди (пядь – расстояние между концами большого и указательного пальца, когда они разведены, примерно 15–20 см.). Такое большое расстояние получилось, поскольку скорости тел около земли велики. Посмотрим значения скоростей в таблице. В отсутствие воздуха скорость обоих тел в момент удара была бы 32,6 м/с. Скорость ядра в момент удара о землю 32,6 м/с, пуля к этому времени разгоняется до 31,4 м/с. При такой скорости даже за 0,05 с ядро проходит вполне заметное расстояние.

В качестве самостоятельного упражнения можно предложить ученикам рассчитать разницу во времени падения тел, если бы Галилей бросал ядро и такого же размера деревянный шар (одна из версий легенды). Примем радиус обоих шаров равным 10,4 см, плотность дерева ρ_1 – 800

кг/м³. Тогда масса деревянного шара составила: $\rho_1 \cdot (4/3) \cdot \pi R^3 = 800 \cdot 4/3 \cdot 3,14159 \cdot (0,104)^3 = 3,77$ (кг), а коэффициент $\beta/m = C_x S \rho/2m = 0,4 \cdot 3,14159 \cdot (0,104)^2 \cdot 1,25/(2 \cdot 3,77) = 2,25 \cdot 10^{-3} \,\mathrm{m}^{-1} - \mathrm{B} \ 10$ раз больше, чем у ядра. Время падения деревянного шара получается равным 3,417 с, всего на 0,06 с больше, чем у ядра, что тоже трудно заметить. При этом деревянный шар отстал бы от ядра на 1,9 м.

Если бы Галилей взял шарик для пинг-понга (радиус 1,88 см, масса – 1,75 г), у которого коэффициент $\beta/m = 0,16$ м⁻¹, в 1000 раз больше, чем у ядра, то такой шарик падал бы с Пизанской башни 7,57 с – в два раза больше, чем ядро. Этого просто нельзя не заметить.

Таким образом, использование схемы Эйлера, которую можно реализовать с помощью электронной таблицы, мы смогли проанализировать знаменитый опыт Галилея и оценить разницу во времени падения тел. Рассмотрим другие возможные исследовательские задачи, связанные с вертикальным падением тел в вязкой среде.

4.2.5. Вертикальное падение тела в вязкой среде, установившаяся скорость

Для наглядности построим зависимости скорости от времени для тел с разными значениями коэффициента β/m : ядра, деревянного шара, шарика для пинг-понга, а также для идеального случая, когда сопротивления воздуха нет (рис. 4.36).

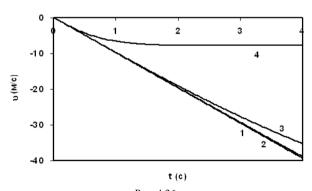


Рис. 4.36.

Зависимость скорости падающего тела от времени:
1 – в отсутствии сопротивления воздуха; 2 – чугунное ядро,
3 – деревянное ядро, 4 – шарик для пинг-понга

При наличии времени и желания школьников можно сравнить проведенные расчеты с теоретическими формулами. Ввиду их сложности, формулы приходится давать без вывода. В случае, когда сила трения пропорциональна квадрату скорости ($F = \beta v^2$), зависимости скорости и пути от времени при падении тела без начальной скорости выражаются формулами [183]:

$$v(t) = \sqrt{\frac{mg}{\beta}} th\left(\sqrt{\frac{\beta g}{m}} \cdot t\right), \quad h(t) = \frac{m}{\beta} \ln ch\left(\sqrt{\frac{\beta g}{m}} \cdot t\right), \tag{4.94}$$

где ch и th – гиперболические косинус и тангенс соответственно:

$$ch(x) = \frac{\exp(x) + \exp(-x)}{2}, \ th(x) = \frac{\exp(x) - \exp(-x)}{\exp(x) + \exp(-x)}.$$
 (4.95)

Далее можно в электронную таблицу внести значения для этих формул и сравнить полученные результаты с расчетами.

Заметим, что зависимости для ядра и для идеального случая просто сливаются в одну линию, а график с шариком для пинг-понга переходит в горизонтальную линию. Так происходит, потому что падающее в воздухе или другой среде тело не может разгоняться до бесконечности [4, 224]. Его скорость ограничена некоторым значением, называемым установившейся скоростью. Это значение соответствует случаю, когда сила сопротивления воздуха равна силе тяжести:

$$g = F_c / m = \beta v^2$$
. (4.96)

Отсюда можно получить значение установившейся скорости:

$$v = \sqrt{g/\beta} \ . \tag{4.97}$$

У каждого тела свое значение установившейся скорости. Исходя из приведенных выше данных, можно рассчитать, что у шарика для пинг-понга установившаяся скорость равна $\sqrt{9,815/0,16} = 7,832$ (м/c).

При обсуждении установившейся скорости ученикам можно напомнить обычно известный им факт, что когда парашютист прыгает с самолета, его скорость сначала возрастает, затем, через некоторое время после раскрытия парашюта становится постоянной, и не меняется вплоть до приземления.

Заметим, что ядро тоже стремится к установившейся скорости, но установившаяся скорость у нее будет значительно больше. По формуле (4.97) легко получить, что ядро с выбранными нами размерами разгонится до 180

м/с, но чтобы это произошло, нужно больше времени. Можно откопировать в электронной таблице больше строк и убедиться в этом.

Стоит отметить, что нельзя строго указать через какое время падающее тело достигает установившейся скорости, поскольку скорость будет стремиться к установившейся подобно тому, как график зависимости y=1/x. будет стремиться к оси x, но не коснется ее. Поскольку мы работаем с некоторым приближением, то можно сказать, что шарик для пинг-понга достигает установившейся скорости с точностью 5% за 1,5 с, и с точностью 1% через 2 с после старта.

Для подтверждения расчетов можно провести эксперимент с одновременным падением двух тел, с помощью фотофиниша найти величину отставания и сравнить с расчетами. Для удобства одно из тел нужно брать с малым коэффициентом β , так чтобы пренебречь сопротивлением воздуха. Для этого можно воспользоваться свинцовым рыболовным грузилом или стальным шариком. В качестве второго тела можно взять деревянный или пластилиновый шарик. В условиях летней школы можно воспользоваться балконом, при этом нужно соблюдать правила техники безопасности. В учебном году можно использовать стремянку. Важно следить, чтобы при падении шарики рикошетом не отскочили в зрителей, для этого следует использовать демпфер в виде тряпок или пенопласта.

В качестве темы для исследовательской работы можно исследовать сопротивление воздуха в зависимости от формы тела или типа парашюта [146, 156, 160, 163, 168].

Чтобы экспериментально наблюдать установившуюся скорость при падении тел в воздухе, можно воспользоваться воздушным шариком. Учитывая, что у шарика не очень сферичная форма можно, используя несколько шариков, выполнить исследование как сопротивление воздуха зависит от формы шарика. При выполнении расчетов нужно обязательно учесть наличие силы Архимеда воздуха, которую мы не учитывали в предыдущих расчетах.

Полезно обратить внимание учеников, что в формуле (4.89) сила сопротивления не зависит от вязкости среды η . Возникает вопрос: почему так? Разве шарик не разгоняет слои воздуха? Ответ заключается в том, что когда число Re больше 100, то сопротивление определяется не тем, как разгоняются слои жидкости или газа, а тем, сколько жидкости или газа с вихрями увлечет за собой движущиеся тело.

Для примера соотношения сил вязкого трения и сопротивления воздуха можно оценить силу сопротивления воздуха, когда число Re велико, например, для падающей с Пизанской башни мушкетной пули, когда она подлетают к земле. Пусть пуля имеет радиус 2 см и разгоняется до 32 м/с.

Тогда: число Re = $\rho v L/\eta = 1,25 \cdot 32 \cdot 0,02/(1,8 \cdot 10^{-5}) = 4 \cdot 10^4$, т.е. намного больше 10.

Сила сопротивления воздуха по формуле (4.89.) составит:

$$F_c = C_x S \rho v^2 / 2 = 0.4 \cdot 3.14159 \cdot (0.02)^2 \cdot 1.25 \cdot (32)^2 / 2 = 0.32 \text{ (H)}.$$

Сила трения по формуле Стокса равна (4.88):

$$F = 6\pi R\eta v = 6.3,14159.0,02.1,8.10^{-5}.32 = 2,2.10^{-4}$$
 (H).

То есть получается, что в данной задаче сила, рассчитанная по формуле Стокса в 1000 раз меньше силы сопротивления воздуха, рассчитанной по формуле (4.89). При изучении материала полезно многократно повторять школьникам правило использования числа Re. При малых скоростях, когда Re<10, нужно пользоваться формулой Стокса для ламинарного обтекания, а при больших, когда Re принимает значения от 10^2 до примерно $3\cdot 10^5$, нужно уже использовать формулу (4.89) для турбулентного (вихревого) обтекания. Рассмотрим условия, когда можно наблюдать ламинарное обтекание и пользоваться формулой Стокса.

4.2.6. Вертикальное падение тела, ламинарное движение 4.2.6.1. Нахождение объектов для наблюдения ламинарного лвижения

Ламинарное движение в воздухе можно наблюдать только для очень маленьких тел, например для капель тумана. Оценим скорость оседания тумана.

Примем радиус капельки тумана равным 0,001 мм. При установившемся движении сила тяжести уравновешена силой вязкого трения, то есть:

$$mg = \alpha v = 6\pi R\eta v. \tag{4.98}$$

Отсюда находим установившуюся скорость:

$$v = \frac{mg}{6\pi R\eta} = \frac{4/3\pi R^3 \rho_B g}{6\pi R\eta} = \frac{2R^2 \rho_B g}{9\eta}.$$
 (4.99)

Подставляя плотность воды $\rho_{\scriptscriptstyle B}=1000$ кг/м³, вязкость воздуха — 1,8·10·5 кг/(м·с), получим:

$$v = \frac{2R^2 \rho_B g}{9 \, \eta} = \frac{2 \cdot (10^{-6})^2 \cdot 10^3 \cdot 9,815}{9 \cdot 1.8 \cdot 10^{-5}} = 0,12 \, (\text{mm/c}). \tag{4.100}$$

Получается, что мельчайшие частицы тумана падают, пролетая один метр более чем за 8 тыс. секунд, то есть примерно за два с половиной часа, что соответствует реальным наблюдениям оседания тумана в отсутствии потоков воздуха.

Оценим число Re для такой капельки:

Re =
$$\frac{\rho v R}{\eta} = \frac{1,25 \cdot 1,2 \cdot 10^{-4} \cdot 10^{-6}}{1,8 \cdot 10^{-5}} \approx 10^{-5}$$
, (4.101)

то есть намного меньше 10. Таким образом, использование формулы Стокса, для капелек тумана оправдано.

В качестве проверки усвоения материала можно предложить задачу для самостоятельного решения: при каком размере капелек тумана можно пользоваться формулой Стокса [168].

Задача сводится к нахождению размера капельки, для которой число Re будет равно 10. Подставим скорость из (4.99) в (4.87):

$$10 = \text{Re} = \frac{\rho v R}{\eta} = \frac{\rho R}{\eta} \frac{2R^2 \rho_B g}{9\eta} = \frac{2R^3 \rho \rho_B g}{9\eta^2}.$$
 (4.102)

Следовательно:

$$R^{3} = \frac{90 \eta^{2}}{2 \rho \rho_{B} g} = \frac{45 \cdot (1.8 \cdot 10^{-5})^{2}}{2 \cdot 1.25 \cdot 10^{3} \cdot 9.815} = 1.2 \cdot 10^{-12} \approx 10^{-12} \text{ (M}^{3}).$$
(4.103)

Отсюда $R = 10^{-4}$ (м), то есть формула Стокса применима для нахождения установившейся скорости падения капелек меньше десятой доли миллиметра.

4.2.6.2. Зависимость скорости от времени при ламинарном движении

Воспользуемся электронной таблицей и построим графики зависимости скорости тела от времени при ламинарном обтекании (сила сопротивления среды пропорциональна скорости). Графики в целом похожи на аналогичные графики, когда сила сопротивления пропорциональна квадрату скорости. различных коэффициентах трения (рис. 4.37). При $\alpha m = 0.01 \, \mathrm{c}^{-1}$ график практически не отличается от прямой линии (при выбранном масштабе осей), т.е. не отличается от графика равноускоренного движения тела. При меньших значениях αm графики при выбранном масштабе практически сливаются в одну линию. При увеличении αm до $10 \, \mathrm{c}^{-1}$ видно, что тело достигает установившейся скорости. Значение установившейся

скорости при ламинарном движении можно вычислить так же, как и при турбулентном движении. Запишем II закон Ньютона:

$$mg - \alpha v_0 = 0 \implies v_0 = \frac{mg}{\alpha}$$
 (4.104)

Если бы мы задали больший промежуток времени наблюдения, то мы бы обнаружили, что к асимптоте стремятся все графики.

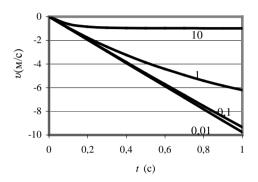


Рис. 4.37 Зависимость скорости от времени при различных коэффициентах трения; цифрами у кривых указаны значения α/m (c⁻¹)

При наличии времени и желания школьников можно сравнить проведенные расчеты с теоретическими формулами. Ввиду их сложности, формулы приходится давать без вывода [4, 183]. Изменение координаты и скорости падающего без начальной скорости тела в случае линейной силы трения описывается формулами:

$$\upsilon = \frac{g}{\gamma} \big[1 - \exp(-\gamma t) \big], \ h = h_0 - \frac{g}{\gamma^2} \big[-1 + \gamma t + \exp(-\gamma t) \big], \ \ \varepsilon \partial e \ \gamma = \frac{\alpha}{m} \ .$$

Можно подставить эти формулы в свободные столбцы электронной таблицы и убедиться, что численные расчеты совпадают с теоретическими.

Для проведения эксперимента с ламинарным обтеканием можно использовать машинные масла с большой вязкостью или глицерин, вязкость которого при комнатной температуре составляет $-2.9~\mathrm{kr/(m\cdot c)}$, а плотность $-1.27\cdot10^3~\mathrm{kr/m}^3$.

Для экспериментов можно взять шарики от подшипников, детского бильярда и т.п. Поскольку вязкость высокая, то шарики достаточно быстро достигнут установившейся скорости. Следует иметь в виду, что формула

Стокса выводилась для тела движущегося вдали от границ среды. Поэтому шарик должен падать по центру сосуда, а радиус сосуда должен быть много больше радиуса шарика. Кроме того, шарик следует отпускать с помощью пинцета после того, как он полностью погружен в глицерин, а не бросать, когда он находится над поверхностью, поскольку удар о поверхность исказит картину движения. Также, нужно учесть силы Архимеда.

Следует иметь в виду, что вязкость глицерина сильно зависит от температуры [202]. Кроме того, она сильно уменьшается при разбавлении глицерина водой. При добавлении к литру глицерина всего 100 мл воды, вязкость глицерина уменьшатся вдвое – с 2,9 кг/(м·с) до 1,4 кг/(м·с) [168].

Остается заметить, что один из стандартных способов определения вязкости жидкостей как раз основан на измерении установившейся скорости падения в них шариков .

4.2.7. Использование численных расчетов в качестве эвристического метода для решения олимпиадных задач

Как уже говорилось выше, курс решения задач численными методами может быть совмещен с курсом решения задач по физике повышенной сложности. В этом случае рассмотрение задач, связанных с вязкостью воздуха можно начать с задачи Всесоюзной олимпиады по физике 1970 г. [187], относящуюся к свободному падению тел.

«Мяч подброшен вертикально вверх. Что больше: время подъема или время падения?»

С первого взгляда это очень простая задача. Она разбирается практически во всех школьных учебниках [78, 200, 224], где показывается, что время полета время полета тела вверх будет равно времени его падению и вычисляется по формуле:

$$t_{no\partial bema} = \frac{v_0}{g} . {4.105}$$

При этом тело поднимется на высоту:

$$h = v_0 t_{nobema} - \frac{g t_{nobema}^2}{2} = \frac{v_0^2}{g} - \frac{v_0^2}{2g} = \frac{v_0^2}{2g}.$$
 (4.106)

Остается вопрос: как такая простая задача попала на всесоюзную олимпиаду? Дело в том, что формула (4.106) получена в предположении, что

сопротивления воздуха нет. Каков будет ответ, если его учесть? В этом случае задача из очень простой становится очень сложной. Попробуем решить ее численно.

Мы можем воспользоваться предыдущим алгоритмом, но нужно внести некоторые изменения. При падении тел сила сопротивления была направлена все время вверх. Когда же мяч летит вверх, то сила сопротивления направлена вниз. Поэтому нужно силу сопротивления записать через модуль, как в формуле (4.86). Тогда формула в электронной таблице будет выглядеть следующим образом:

Ячейка	Формула электронной	Математическая формула
	таблицы	
D2	=-G\$2-F\$2*C2*ABS(C2)	$a_n = -g - \beta v_n v_n / m$

Зададим коэффициент β/m равным 0,01 (м⁻¹). Тогда время подъема равно 1,813 с, а падения — 1,92 с. Можно взять коэффициент β/m равным 0,001 (м⁻¹). Время подъема и падения получатся соответственно 2,01 с и 2,025 с. Можно попробовать другие значения, но результат будет один: время подъема всегда меньше времени падения (кроме случая $\beta=0$, когда время подъема равно времени падения).

Конечно, на Всесоюзных олимпиадах пользоваться компьютерами было нельзя (да и персональных компьютеров тогда еще не было.) Но проведенный домашний анализ позволил получить нам ответ, а, зная ответ, уже легче решить задачу аналитически.

Перейдем к аналитическому решению задачи [168].

Поскольку метод с применением схемы Эйлера оказался продуктивным, то попробуем рассмотреть движение тела, разбив его на множество равных малых интервалов времени Δt .

Запишем II закон Ньютона в проекции на вертикальную ось (для удобства — чтобы работать с положительными значениями ускорений, ось направим вниз). Когда тело летит вверх, сила тяжести и сила сопротивления воздуха F_1 направлены вниз:

$$ma_1 = mg + F_1$$
. (4.107)

Когда же тело летит вниз, сила сопротивления воздуха ${\it F}_2$ направлена вверх:

$$ma_2 = mg - F_2. (4.108)$$

Получается, что ускорение при подъеме тела:

$$a_1 = g + F_1 / m (4.109)$$

всегда больше g, а ускорение при падении:

$$a_2 = g - F_2 / m . (4.110)$$

по модулю всегда меньше g, и соответственно, меньше, чем a_1 .

Возникает загвоздка, что начальные скорости мяча при подъеме и падении мяча различны. Но ее можно решить с помощью следующего приема. Представим, что мы записали подъем мяча на видеопленку, а затем прокручиваем эту пленку наоборот. А падение мяча мы смотрим в нормальном режиме. То есть, что из верхней точки траектории высотой h одновременно с нулевой начальной скоростью стартуют два тела с ускорениями a_1 и a_2 , причем $a_1 > a_2$. Понятно, что скорость первого тела будет всегда больше скорости второго, и оно пройдет путь h быстрее. Таким образом, получилось, что время движения вверх меньше времени движения вниз, причем результат не зависит от величины силы сопротивления воздуха, главное, чтобы сила сопротивления была направлена против движения.

Мы решили задачу олимпиады. Заметим, что сборнике [187] приведено другое, на наш взгляд, более сложное решение. К сожалению, наши рассуждения позволяют лишь определить больше или меньше времени тело двигалось вверх или вниз, но не дают ответа, насколько больше. Это можно сделать либо с помощью высшей математики, либо численными методами.

4.2.8. Баллистические траектории

Использование электронной таблицы предоставляет возможности для исследования вида траекторий полета тел, брошенных под углом горизонту. Заметим, что такие траектории называются баллистическими (от греческого «βαλλω» – бросаю, кидаю). Нахождение баллистических траекторий, возможно, является старейшей задачей военной механики. Она была актуальна и в античности, когда использовали машины катапульты, И непрерывно средневековой Европе, когда появились пушки. Вычисление баллистических задачей, решавшейся на первой была первой вычислительной машине ENIAC (Electron Numerical Integrator and Calculator), которая была создана во время Второй мировой войны в США.

Возникает вопрос: существенна ли сила сопротивления воздуха, ведь коэффициент β/m у камня мал? Следует учесть, что, хотя коэффициент

 β/m мал, скорость метания может быть велика. Оценим для примера силу сопротивления воздуха при выстреле из пневматической винтовки в тире. Примем скорость пули 100 м/с, масса пули типа «Диабло» равна 0,224 г, диаметр — 4,5 мм [168]. Хотя форма пули не строго сферическая, примем коэффициент C_x равным 0,4 [4]. По формуле (4.89) сила сопротивления равна: $F = C_x S \rho v^2/2 \approx 0,04$ (H).

На первый взгляд, величина небольшая, но сравним ее с весом пули – $mg \approx 0.002$ (H). Получается, что сила сопротивления воздуха в 20 раз превышает силу тяжести! Поэтому некоторое недоумение вызывают задачи, когда силой сопротивления воздуха при выстреле предлагают пренебречь. после выстрела можно, скорее, пренебречь силой тяжести, действующей на пулю, чем силой сопротивления воздуха. Конечно ядро или снаряд тяжелее пули, но и скорость у них несравненно больше, для она больше огнестрельного пижудо скорости звука, поэтому сопротивления воздуха существенна и для пушечного ядра и артиллерийского снаряда.

Рассчитаем траекторию полета брошенного под углом к горизонту тела. Нужно особенно отметить, что если задача расчета вертикального падения тела при наличии сопротивления воздуха, хотя и выходит за рамки школьной программы, но все же имеет решение методами высшей математики, то полет тела под углом к горизонту является классическим примером задачи, не решаемой в аналитическом виде [4].

4.2.8.1. Расчет траектории при отсутствии сопротивления воздуха

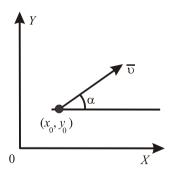


Рис. 4.38. Полет тела под углом к горизонту

Начать решение задачи имеет смысл с самой простой модели — без учета силы сопротивления воздуха [78, 200, 224].

Пусть тело стартует со скоростью υ_0 под углом α к горизонту (рис. 4.38). Найдем параметры траектории и время движения.

Вертикальная составляющая скорости равна $\upsilon_{0y}=\upsilon_0\sin\alpha$, а горизонтальная – $\upsilon_{0x}=\upsilon_0\cos\alpha$. Как мы уже вычисляли, время подъема тела равно времени падения (4.105) и

$$\text{составляет } t = \frac{v_{0y}}{g} = \frac{v_0 \sin \alpha}{g} \; .$$

Отсюда время полета равно:

$$t_{nonema} = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}.$$
 (4.111)

Вдоль горизонтальной оси на тело никакие силы не действуют, следовательно, оно будет лететь равномерно прямолинейно, и за это время пролетит расстояние:

$$L = v_0 \cos \alpha (2v_0 \sin \alpha) / g = (2v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha) / g$$
. (4.112)

Заметим, что в формуле (4.112) для дальности полета в равной степени присутствуют как функция синус, так и функция косинус. Отсюда следует, что дальности полета тел, брошенных под углами α и $90^\circ - \alpha$, одинаковы. поскольку: $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$, а $\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$.

Отметим, что траектория полета с углом меньшим 45° называется настильной, а с углом большим 45° – навесной (рис. 4.39).

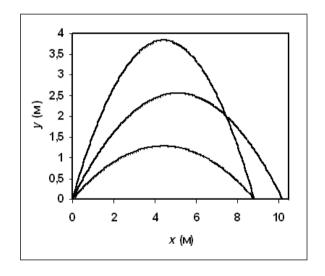


Рис. 4.39. Настильная (30°), навесная (60°) и оптимальная (45°) траектории; начальная скорость – 10 м/с, сопротивления нет

Вспоминая формулу двойного угла: $2\sin \alpha \cos \alpha = \sin 2\alpha$, получим, что дальность полета равна:

$$L = \frac{2v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}.$$
 (4.113)

Максимальное значение синуса равно единице при угле 90°. Следовательно, максимальная дальность полета равна:

$$L_{\max} = v_0^2 / g , \qquad (4.114)$$

и достигается при угле броска 45° [78, 200, 224].

Здесь можно остановиться и задать ученикам вопрос, не показывает ли опыт другое? Действительно, когда ученики на уроках физкультуры бросают на дальность мяч, то максимальная дальность получается, когда мяч брошен под углом немного меньше 45° . У школьников обычно возникает разумное предположение, что угол нужно уменьшать из-за сопротивления воздуха. Проверим эту гипотезу. Составим алгоритм для расчета полета тела под углом к горизонту по схеме Эйлера, рассчитаем траекторию полета для различных значений коэффициента β [168].

Запишем ІІ-ой закон Ньютона с учетом силы сопротивления воздуха:

$$\overline{ma} = m\overline{g} + \overline{F}_{conpomus_{\pi}} = m\overline{g} - \beta \overline{v} | \overline{v} |. \tag{4.115}$$

Рассмотрим проекции ускорений на оси х и у:

$$a_x = -\beta v_x v/m$$
, $a_y = -g - \beta v_y v/m$, (4.116)

где v – модуль скорости тела.

При проведении расчетов нам потребуются уже не четыре столбца как для вертикального полета, а восемь:

A – время t,

B – координата x,

C – скорость v_r ,

D – координата у,

E – скорость v_{v} ,

F – полная скорость υ ,

G – ускорение a_r ,

H – ускорение a_{v} .

Возьмем реальные начальные условия. Примем, что школьник способен метнуть мяч со скоростью 10 м/с, а угол броска возьмем 45°. Тогда проекции начальной скорости мяча будут равны $v_{0x} = v_{0y} = v_0 \sqrt{2}/2 = 7,07$ м/с. С целью проверки правильности расчетов имеет смысл начинать со случая, когда сопротивления воздуха нет ($\beta = 0$).

Занесем начальные параметры (в единицах СИ).

I2 – интервал времени Δt : 0,001;

J2 – коэффициент β : 0;

K2 – ускорение свободного падения g: 9,815;

A2 – начало отчета времени: 0;

B2 — начальная координата x(0): 0;

C2 – начальная проекция скорости $v_x(0)$: 7,07;

D2 – начальная координата y(0): 0;

E2 – начальная проекция скорости $v_v(0)$: 7,07.

Далее заносим формулы в ячейки А3–Е3, F2–Н2:

Ячейка	Формула электронной	Математическая формула
	таблицы	
A3	=A2+I\$2	$t_n = t_{n-1} + \Delta t$
В3	=B2+C2*I\$2	$x_n = x_{n-1} + v_{x,n-1} \Delta t$
C3	=C2+G2*I\$2	$\upsilon_{x,n} = \upsilon_{x,n-1} + a_{x,n-1} \Delta t$
D3	=D2+E2*I\$2	$y_n = y_{n-1} + v_{y,n-1} \Delta t$
E3	=E2+H2*I\$2	$v_{y,n} = v_{y,n-1} + a_{y,n-1} \Delta t$
F2	=КОРЕНЬ(С2*С2+Е2*Е2)	$\upsilon_n = \sqrt{\upsilon_{x,n}^2 + \upsilon_{y,n}^2}$
G2	=-J\$2*C2*F2	$a_{x,n} = -\beta v_{x,n} \cdot v_n / m$
H2	=-K\$2-J\$2*E2*F2	$a_{y,n} = -g - \beta v_{y,n} \cdot v_n / m$

Остается только откопировать формулы в нижележащие ячейки.

Время полета получается равным 1,441 с, а дальность полета — 10,189 м. Расчеты по формулам (4.111) и (4.113) дают соответственно $2\cdot7,07/9,815=1,4406$ с и 10,1885 м [168]. Таким образом, теоретические и численные расчеты совпадают в пределах нашей погрешности. Возможно, школьники скажут, что они могут бросить мяч дальше 10 м, что вполне вероятно ввиду грубой оценки начальной скорости мяча.

Получив электронную таблицу для расчетов, можно исследовать зависимость дальности полета от угла. Для удобства можно предусмотреть внесение значений начальной скорости и угла в электронную таблицу. Будем заносить в ячейки:

L2 – начальная скорость броска v_0 : 10;

M2 – начальный угол броска α_0 в градусах: 45;

N2 – начальный угол броска α_0 в радианах.

Осталось занести формулы:

Ячейка	Формула электронной	Математическая формула
	таблицы	
N2	=M2*3,14159/180	$\alpha_0(pa\delta) = \alpha_0(zpa\delta) \cdot \pi/180$
C2	=L2*COS(N2)	$v_{x,0} = v_0 \cos \alpha_0$
E2	=L2*SIN(N2)	$v_{y,0} = v_0 \sin \alpha_0$

Заметим, что это формулы не нужно копировать.

При угле броска 44° дальность броска составляет 10,186 м, а при 46° – 10.184 м. Если школьники сами не захотят проверить углы 44.9° и 45.1° , то можно предложить им это сделать. Получается, что при угле 44.9° дальность полета 10,193 м, т.е. больше, чем при угле 45°, что, на первый взгляд, противоречит теоретическим расчетам [168]. Здесь опять следует напомнить, что численные методы приближенные и не дадут вам абсолютно точного значения. Мы достигли точности, выше которой определение оптимального угла броска будет невозможным, поскольку мы неточно лальность полета. Лля vвеличения точности оптимального угла нужно задать меньше интервал времени. предложить школьникам самостоятельно уменьшить интервал времени в 10 раз и рассчитать дальность броска при углах 45° и 44,9°.

4.2.8.2. Расчет траектории с учетом сопротивления воздуха

Далее можно приступить к расчетам баллистических траекторий с учетом силы сопротивления воздуха. Вычислим для примера коэффициент β/m для теннисного мяча. Его масса 58 г, а диаметр – 66 мм, соответственно радиус – 33 мм [168]. Коэффициент β/m у теннисного мяча равен:

 $\beta/m = C_x S \rho/2m = 0,4 \cdot 3,14159 \cdot (0,033)^2 \cdot 1,25/2/0,058 = 0,015 \,\mathrm{m}^{-1}$. Больше, чем у мушкетной пули, но меньше, чем у шарика для пинг-понга. Подставляя в предыдущую электронную таблицу, мы получим, что дальность полета при угле броска 45° составляет 9,125 м, на целый метр меньше, чем в отсутствии сопротивления воздуха. Для определения оптимального угла составим таблицу.

Угол броска (град)	45	44	43	42
Дальность полета (м)	9,125	9,129	9,119	9,101

Результат не впечатляет. Получается, что оптимальный угол броска $-44^{\circ}\pm1^{\circ}$. Разницу между углами 44° и 45° трудно заметить «на глаз». Почему же опыт показывает, что теннисный мяч летит дальше при броске под углом заметно меньше 45° ?

Полезно дать возможность школьникам самим выдвинуть гипотезы. Опыт показывает, что гипотезы бывают самыми разными. Среди разумных гипотез — соображения эргономики: может быть дело в том, что бросать под углами $35^{\circ}-40^{\circ}$, проще, чем под углом 45° , просто так устроена у человека рука. Но, скорее всего, большинство с такой гипотезой не согласится — что они могут с таким же успехом бросить мяч под углом 45° .

Если школьники не догадаются сами, можно им подсказать, что они проводили расчеты для тела, брошенного с *поверхности* земли. А мяч они бросают с высоты своего роста плюс длина согнутой руки, т.е. с высоты примерно два метра [168].

Зададим начальную высоту два метра, занеся в ячейку D2 значение «2», положим пока коэффициент β/m равным нулю. Составим таблицу зависимости дальности полета от угла броска.

Угол броска (град)	45	41	40	39	38	35
Дальность полета (м)	11,901	12,022	12,027	12,015	12,001	11,878

Оптимальный угол бросания мяча получился равным $40^{\circ}\pm1^{\circ}$, что уже вполне заметная величина.

Теперь учтем силу сопротивления воздуха. Снова составим таблицу зависимости дальности полета от угла броска с высоты два метра при $\beta/m=0.015~{\rm m}^{-1}.$

Угол броска (град)	45	41	40	39	38	37
Дальность						
полета (м)	10,647	10,791	10,805	10,811	10,810	10,796

Оптимальный угол бросания мяча – $39^{\circ}\pm1^{\circ}$.

Таким образом, получилось, что при бросании теннисного мяча с начальной скоростью 10~м/c оптимальный угол броска $39^\circ \pm 1^\circ$. Уменьшение оптимального угла броска происходит по двум причинам, есть сопротивление воздуха и мяч бросается не с нулевой высоты. При этом

основную роль играет не сопротивление воздуха, а то, что мяч бросают с некоторой высоты [168].

Остается предложить школьникам провести самостоятельно эксперимент: бросить мяч или учебную гранату с поверхности земли (из окопа). Скорее всего, максимальная дальность будет достигнута при броске под углом 45°. Это опровергнет гипотезу, что изменение оптимального угла связано с устройством человеческой руки, хотя в некоторых случаях, возможность сделать хороший замах играет существенную роль.

Рассчитаем баллистические траектории по схеме Эйлера для полета тела при различных коэффициентах β/m . Возьмем начальную скорость 10 м/с. Пусть мяч бросают под углом 45°, зададим коэффициент β/m равным 0, 0,01, 0,03, 0,1, 0,3 и 1,0 м⁻¹ (рис. 4.40).

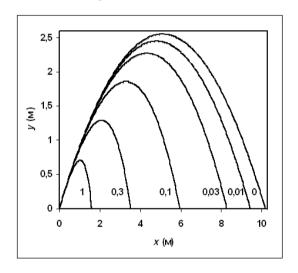


Рис. 4.40. Баллистические траектории, цифрами у кривых указаны значения коэффициента K (м $^{-1}$)

Верхняя траектория соответствует полету тела в отсутствие силы трения. По мере увеличения коэффициента β , время, высота и дальность полета тела уменьшаются, траектория приобретает несимметричный вид: угол, под которым тело падает, становится больше угла, под которым тело бросили [168].

Далее рассчитаем баллистические траектории, когда тело бросают под различными углами. Расчет для теннисного мяча не произведет

впечатления – у него слишком мал коэффициент β/m и баллистические кривые будут очень близки к идеальным параболам. Расчет для шарика для пинг-понга может быть тоже не очень интересным. То, что сопротивление воздуха существенно для шарика для пинг-понга известно из повседневного опыта. Достаточно посмотреть, как его сдувает ветер. Лучше рассчитать траекторию для больших скоростей, тогда сила сопротивления воздуха будет более заметной. Рассчитаем для примера баллистическую траекторию для мушкетной пули. Чтобы можно было пользоваться формулой (4.89), возьмем начальную скорость меньше скорости звука – 300 м/с. Коэффициент β у мушкетной пули был вычислен выше $-1,33\cdot10^{-3}\,\mathrm{m}^{-1}$ [168]. Чтобы наглядно несимметрична получившаяся баллистическая представить, насколько кривая, имеет смысл построить на том же графике траекторию полета тела, брошенного под тем же углом 45° , но с меньшей скоростью в отсутствии сопротивления воздуха, так, чтобы точки старта и финиша совпали. Дальность полета составляет – 1266 м, начальную скорость можно найти из формулы (4.113):

$$v_0 = \sqrt{\frac{Lg}{\sin 2\alpha}} = \sqrt{1266 \cdot 9,815} = 111,5$$
 м/с. Подставив в электронную таблицу,

мы получим возможность сравнить формы баллистической траектории и параболы (рис. 4.41).

Из электронной таблицы можно найди угол, под которым пуля падает на землю. Для этого нужно рассчитать отношение проекций скоростей:

$$tg \ \varphi = \frac{v_y}{v_x} = \frac{74,09}{19,45} = 3,81.$$
 (4.117)

С помощью той же электронной таблицы находим угол: arctg(3,81) = 1,31 (рад) = $75,3^{\circ}$. Можно обратить внимание школьников, что если увеличить угол стрельбы, то пули или ядра будут падать почти вертикально [168].

При наличии времени можно дать краткую историческую справку. Форму траектории полета ядра изучал в XIV в. Альберт Саксонский. Он описал траекторию полета пушечного ядра, исходя из теории импетуса (первоначального толчка). «Пушечное ядро, получив большой импетус, сначала летит по прямой линии. По мере ослабевания импетуса, собственная тяжесть ядра заставляет его устремляться к центру Земли, поэтому траектория изгибается, и, когда импетус полностью кончится, то ядро вертикально устремляется вниз...» [227].

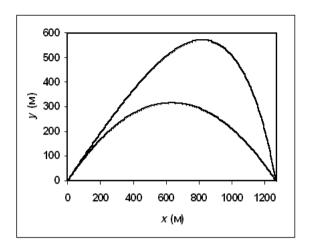


Рис. 4.41. Баллистическая (сверху) и идеальная траектории, угол броска 45° .

Если подойти к этому тексту с ограниченными знаниями, что тела летят по параболе, то можно посчитать эти наблюдения полной ерундой. Но, исследовав формы баллистических траекторий, можно только удивиться точности наблюдения ученого XIV в. Можно обратить внимание школьников как это знание использовали в средние века. Если стрелять по крепости под малыми углами по настильным траекториям, то пули и ядра не могут достать защитников крепости непосредственно за стеной. Если же стрелять по навесным траекториям, то падающие почти вертикально ядра даже вблизи стены не дадут защитникам покоя.

В целом, это расчеты актуальны и для современной артиллерии, хотя скорости снарядов, конечно, превышают скорость звука. Пушки дальнобойной артиллерии наклоняют под углами меньше 45° — так больше дальность стрельбы. С другой стороны, гаубицы для поражения целей, находящихся за высокими укреплениями или углубленных в землю, стреляют под углами больше 45° . В результате сопротивления воздуха угол падения снаряда оказывается больше угла выстрела, приближаясь к вертикальному падению.

4.2.8.3. Анализ гипотезы Галилея

При наличии времени можно проверить одну из гипотез Галилея. Галилей предложил но, к сожалению (а может, как мы увидим ниже, и к счастью), не осуществил эксперимент, который описан в книге «Диалог о двух главнейших системах мира, Птоломеевой и Коперниковой» (1632 г.). В ходе обсуждения проблемы свободного падения тел Сальвиати говорит:

«...я считал бы бесспорным, что если одним ядром выстрелить <горизонтально> из пушки, а другому дать упасть с той же высоты отвесно вниз, то оба они достигнут земли в одно и то же мгновение, хотя первое пройдет расстояние, быть может, в десять тысяч локтей, а второе – только в сто...» [31, с. 254].

Рассмотрим справедливость этого утверждение с учетом сопротивления воздуха.

Будем считать «локоть» равным 0,55 м, тогда сто локтей составит 55 м, — это высота Пизанской башни. Но тогда получается, что воображаемая пушка стреляла с высоты 55 м и дальность полета ядра составила 5,5 км. Простейший анализ показывает невозможность такого выстрела. С высоты 55 м ядро будет падать чуть больше трех секунд, следовательно, исходная скорость ядра даже в отсутствии сопротивления воздуха должна была быть более полутора километра в секунду, что, представляется нереальным для пушек того времени. Если же учесть сопротивление воздуха, то начальная скорость должна быть еще больше.

Поэтому для анализа возьмем другие начальные условия: пусть высота башни будет 55 м, а начальная скорость ядра — 300 м/с. Одновременно ли упадут ядра?

Коэффициент β/m для ядра мы уже считали $-0.23\cdot10^{-3}$ м⁻¹, время падения в отсутствие воздуха тоже считали -3.3477 с, время вертикального падения с учетом сопротивления воздуха тоже вычисляли -3.355 с. Подставим в электронную таблицу, начальную высоту -55 м, скорость -300 м/с, угол -0. Ядро улетит на расстояние 932 м, коснувшись земли через 3,467 с. Получается, что вылетевшее из пушки ядро летит на 0,11 с дольше, чем тоже ядро, падающее вертикально [168].

Разница времен падения и полета была бы больше, если бы Сальвиати выстрелил бы с такой же скоростью из мушкета.

Коэффициент β/m для мушкетной пули мы вычисляли выше — $1,33\cdot10^{-3}$ м⁻¹. Результаты расчетов для ядра и пули для наглядности занесем в таблицу.

Тело	$K = 10^{-3} (\text{M}^{-1})$	Время падения (c)	Время полета (c)	Дальность полета (м)
ядро	0,23	3,355	3,467	932
пуля	1,33	3,389	3,851	699

Получается несколько неожиданный результат. Время полета пули будет больше, чем ядра, но улетит пуля на меньшее расстояние. Разница во времени вертикального падения пули и пули, вылетевшей из мушкета, составляет почти полсекунды. Так что может, и хорошо, что Галилей не ставил этого опыта, его результат мог бы поколебать уверенность в независимости времени падения тела от его горизонтальной скорости. Тогда, возможно, Галилей не опубликовал «Диалога...».

Остается заметить, что если бы сила сопротивления воздуха была пропорциональна не квадрату скорости, а скорости тела, то время падения тела не зависело бы от значения горизонтальной проекции начальной скорости, в чем можно предложить школьникам убедиться самостоятельно [168].

При наличии времени и желания школьники могут проверить расчеты экспериментально, воспользовавшись цифровой камерой и игрушечным пистолетом.

4.2.8.4. Аналитическое решение задачи броска с возвышенности в отсутствии сопротивления воздуха

При наличии времени для проверки расчетов по схеме Эйлера можно предложить аналитически решить задачу о нахождении оптимального угла полета при броске с высоты h_0 в отсутствии сопротивления воздуха аналитически. Эта задача приводится в сборниках задач повышенной сложности [19 (№45), 59 (№ 1.3.13), 199 (№1.278)], она не простая, но у школьников 9-го класса достаточно знаний для ее решения.

Начать нужно со вспомогательной задачи.

Задача.

Пусть на возвышении стоит катапульта, которая должна поразить цель на расстоянии L. Пусть скорость вылета камня равна υ_0 , а высота возвышенности (вместе с высотой катапульты) равна h_0 . Под каким углом нужно метнуть камень, чтобы поразить цель?

Для решения воспользуемся формулами для движения тела,

брошенного под углом к горизонту (4.105)–(4.112). Вдоль оси x движение будет равномерным, а вдоль оси y – равноускоренным:

$$x = v_{0x} t = v_0 t \cos \alpha;$$

$$y = h_0 + v_{0y} t - gt^2 / 2 = h_0 + v_0 t \sin \alpha - gt^2 / 2.$$
(4.118)

Поскольку время полета нас сейчас не интересует, то выразим время из первого уравнения: $t = x/(v_0 \cos \alpha)$, и подставим во второе:

$$y = h_0 + x \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} - x^2 \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} = h_0 + x tg \alpha - x^2 \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha}.$$
 (4.119)

Получается квадратный трехчлен, что еще раз подтверждает, что траектория движения — парабола, поскольку зависимость типа $y = Ax^2 + Bx + C$ задает параболу.

По условию, камень должен поразить цель на расстоянии L, т.е. когда он достигнет поверхности и его координата y будет равна нулю, координата x при этом должна быть равна L:

$$0 = h_0 + L tg\alpha - \frac{L^2 g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha}.$$
 (4.120)

Получилось уравнение относительно α .

До уравнения (4.120) школьники могут додуматься самостоятельно, но вряд ли они смогут его решить. На этом этапе им полезно дать подсказку: пусть они преобразуют выражение $1+tg^2\alpha$.

$$1 + tg^{2}\alpha = 1 + \frac{\sin^{2}\alpha}{\cos^{2}\alpha} = \frac{\cos^{2}\alpha + \sin^{2}\alpha}{\cos^{2}\alpha} = \frac{1}{\cos^{2}\alpha}.$$
 (4.121)

Теперь становится понятно, как избавится от функции «косинус» в (4.120):

$$0 = h_0 + L tg\alpha - \frac{L^2 g}{2v_0^2} \frac{1}{\cos^2 \alpha} = h_0 + L tg\alpha - \frac{L^2 g}{2v_0^2} (1 + tg^2\alpha) =$$

$$= h_0 - \frac{L^2 g}{2v_0^2} + L tg \alpha - \frac{L^2 g}{2v_0^2} tg^2 \alpha.$$
 (4.122)

Получается квадратное уравнение относительно $tg\alpha$. Преобразуем к более знакомому виду:

$$tg^{2}\alpha - \frac{2v_{0}^{2}}{Lg}tg\alpha - h_{0}\frac{2v_{0}^{2}}{L^{2}g} + 1 = 0.$$
 (4.123)

Теперь можно записать решение квадратного уравнения [19, 59]:

$$tg\alpha = \frac{v_0^2}{Lg} \pm \sqrt{\frac{v_0^4}{L^2g^2} + h_0^2 \frac{2v_0^2}{L^2g} - 1} = \frac{v_0^2 \pm \sqrt{v_0^4 + 2v_0^2gh_0 - L^2g^2}}{Lg}. (4.124)$$

Проанализируем полученный ответ. Прежде всего, заметим, что при $h_0=0\,$ формула (4.124) примет вид:

$$tg\alpha = \frac{v_0^2 \pm \sqrt{v_0^4 - L^2 g^2}}{Lg}.$$
 (4.125)

Если величина под корнем (дискриминант) отрицательна, т.е. $v_0^{\ 4} < L^2 g^2$, то решения не существует. Этот результат мы уже получили раньше — мы доказали, что при броске с поверхности земли максимальная дальность полета равна: $L = v_0^{\ 2} / g$.

При $L = v_0^2 / g$ существует единственный корень:

$$tg\alpha = \frac{v_0^2 \pm \sqrt{v_0^4 - L^2 g^2}}{Lg} = \frac{v_0^2}{Lg} = 1.$$
 (4.126)

Этот результат мы также получили раньше. Максимальная дальность полета достигается при угле броска 45° , т.е. при $tg\alpha=1$.

Если же величина выражения под корнем положительна, т.е. $\upsilon_0^{\ 4} > L^2 g^2$, то существуют два решения. Этот результат мы тоже получили раньше, если бросить тела под углами α и $90^\circ - \alpha$, то тела улетят на одинаковые расстояния.

Далее можно перейти к анализу формулы (4.124) для броска тела с высоты h_0 . Здесь тоже три случая. Если расстояние L мало, так что $L^2g^2 < v_0^4 + 2v_0^2gh_0$, то выражение под корнем больше нуля, и существует два угла, под которым можно метнуть тело, чтобы поразить цель. Если расстояние L велико, так что $L^2g^2 > v_0^4 + 2v_0^2gh_0$, то выражение под корнем меньше нуля, и цель не может быть поражена ни при каком угле метания камня. Значит, максимальная дальность метания камня $L_{\rm max}$ соответствует третьему случаю: когда существует единственное решение и значение под

корнем равно нулю: $L_{\max}^2 g^2 = v_0^4 + 2 v_0^2 g h_0$, т.е. максимальная дальность полета камня равна:

$$L_{\text{max}} = \frac{\sqrt{v_0^4 + 2v_0^2 g h_0}}{g} = \frac{v_0}{g} \sqrt{v_0^2 + 2g h_0} . \tag{4.127}$$

и достигается при угле броска, который можно найти из формулы (4.124) [19 (№45), 59 (№ 1.3.13), 199 (№1.278)]:

$$tg\,\alpha_{\text{max}} = \frac{v_0^2}{L_{\text{max}}g} = \frac{v_0}{\sqrt{v_0^2 + 2gh_0}}.$$
 (4.128)

Получив формулу, мы можем проверить результаты численного расчета для бросания тела с высоты 2 м со скоростью 10 м/с. У нас получилось, что оптимальный угол броска равен $40^{\circ}\pm1^{\circ}$, а дальность – 12,027 м.

Подставим наши данные в формулы (4.127) и (4.128)

$$L_{\text{max}} = \frac{v_0}{g} \sqrt{v_0^2 + 2gh_0} = \frac{10}{9,815} \sqrt{10^2 + 2 \cdot 9,815 \cdot 2} = 12,024 \text{ (M)}; \tag{4.129}$$

$$tg\alpha_{\text{max}} = \frac{v_0}{\sqrt{v_0^2 + 2gh_0}} = \frac{10}{\sqrt{10^2 + 2.9,815 \cdot 2}} = 0,847;$$
 (4.130)

$$arctg(0,847) = 0,703 \text{ (рад)} = 40,2^{\circ}.$$
 (4.131)

Численные расчеты прекрасно совпали с аналитическими.

4.2.9. Исследование экспоненциального затухания при горизонтальном движении

Хотя в школьной программе число e не выводится, во «взрослой» физике затухающие движения описываются с помощью экспонент [4]. Поэтому при наличии времени можно получить экспоненциальное затухание для простого движения.

Для этого лучше рассмотреть горизонтальное движение тела в вязкой среде. Горизонтальное движение тела проще вертикального, поскольку сила тяжести не влияет на скорость тела. Получим аналитическую формулу для движения, когда сила сопротивления пропорциональна скорости. Эти задача весьма сложна как для аналитического решения, так и для экспериментальной проверки. Поэтому ее лучше выносить в конец темы

движение тела в вязкой среде.

4.2.9.1. Численное решение задачи горизонтального движения Задача

Пусть лодка горизонтально движется в вязкой среде, причем сила сопротивления среды пропорциональна скорости движения $F = -\alpha v$, где $\alpha > 0$. Вначале скорость лодки равна v_0 . Какое максимальное расстояние может пройти лодка? [66] Дополнительный вопрос: как скорость лодки зависит от времени?

Прежде всего, заметим, что у школьников может возникнуть вопрос: почему спрашивается про максимальное расстояние, а не просто расстояние от старта до остановки? Это станет ясно чуть позже.

Поскольку движение происходит с переменным ускорением:

$$a = -\alpha v/m, \qquad (4.132)$$

то задачу придется решать численно. Подобную задачу мы решали — это падение тел с Пизанской башни. Эта задача даже проще, поскольку нет ускорения свободного падения, нужно только заменить формулу для силы сопротивления. Нам потребуются столбцы:

A – время t;

B – координата x;

C – скорость υ ;

D – ускорение a.

В ячейки E2-G2 будем заносить параметры.

E2 – интервал времени $\Delta t = 0,001$ (c);

 $F2 - \alpha/m$.

Возникает вопрос о начальных значениях. Поскольку эксперимента мы не ставили, можно для простоты взять α/m равным 1 с⁻¹, начальную скорость – 1 м/с. Занесем начальные значения:

A2 – начало отчета по времени t = 0 (c);

B2 – начальная координата $x_0 = 0$ (м);

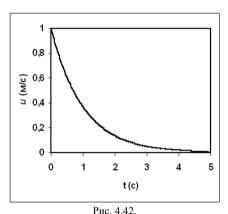
C2 – начальная скорость $v_0 = 1$ (м/с).

Занесем в ячейки формулы:

Ячейка	Формула электронной	Математическая формула
	таблицы	
A3	=A2+E\$2	$t_{n+1} = t_n + \Delta t$
В3	=B2+0,5*(C2+C3)*E\$2	$x_{n+1} = x_n + 0.5(v_n + v_{n+1})\Delta t$

C3	=C2+D2*E\$2	$v_{n+1} = v_n + a_n \Delta t$
D2	=-F\$2*C2	$a_n = -v_n \cdot \alpha / m$

Построим график зависимости скорости от времени. Как и следовало ожидать, скорость стремится к нулю (рис. 4.42).



Зависимость скорости от времени при движении в вязкой среде

Построим зависимость координаты от времени (рис. 4.43). Получается, что лодка будет стремиться к значению координаты один метр, но достигнет его лишь в бесконечности. Именно поэтому в условии спрашивалось про максимальное расстояние, ведь лодка за конечное время проплывет расстояние меньше метра. Таким образом, ответ к задаче: лодка сможет проплыть не более метра [168].

4.2.9.2. Получение последовательности, сводящейся к «первому замечательному пределу» (первая попытка аналитического решения задачи движения лодки)

Предупреждение. Данный параграф сложен для понимания, и его можно рекомендовать только для очень сильных школьников, прекрасно усвоивших предыдущий материал.

Попробуем вычислить скорость лодки через время t. Разобьем это время на N малых равных интервалов времени $\Delta t = t/N$. Будем считать, что движение на каждом из них равномерное. Тогда по формуле (4.132) за время

первого интервала скорость приобретет значение:

$$v_1 = v_0 - a_0 \ \Delta t = v_0 - \frac{\alpha}{m} v_0 \ \Delta t = v_0 \left(1 - \frac{\alpha}{m} \Delta t \right).$$
 (4.133)

За время второго интервала скорость станет равной:

$$v_2 = v_1 - a_1 \Delta t = v_1 - \frac{\alpha}{m} v_1 \Delta t = v_1 \left(1 - \frac{\alpha}{m} \Delta t \right) = v_0 \left(1 - \frac{\alpha}{m} \Delta t \right)^2. \tag{4.134}$$

За время третьего интервала скорость станет равной:

$$v_3 = v_2 - a_2 \Delta t = v_2 - \frac{\alpha}{m} v_2 \Delta t = v_2 \left(1 - \frac{\alpha}{m} \Delta t \right) = v_0 \left(1 - \frac{\alpha}{m} \Delta t \right)^3.$$
 (4.135)

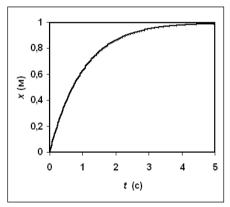


Рис. 4.43. Зависимость координаты от времени при движении в вязкой среде

Обычно, «сильные» школьники уже после третьего шага понимают, что имеют дело с геометрической прогрессией. За время t, т.е. за N интервалов скорость станет равной [168]:

$$v_{N} = v_{N-1} - a_{N-1} \Delta t = v_{N-1} \left(1 - \frac{\alpha}{m} \Delta t \right) = v_{0} \left(1 - \frac{\alpha}{m} \Delta t \right)^{N} = v_{0} \left(1 - \frac{\alpha}{m} \frac{t}{N} \right)^{N}. (4.136)$$

Далее необходимо устремить Δt к нулю, т.е. N к бесконечности. Но возникает проблема. С одной стороны, в скобке получается единица, а единица в любой степени дает единицу. С другой стороны, показатель стремится к бесконечности, а любое положительное число меньше 1, при

возведении в бесконечную степень стремится к 0. Так что же получится в ответе: 0 или 1?

В математике подобный предел называют «неопределенность типа единица в степени бесконечность». Для анализа полезно воспользоваться электронной таблицей.

Примем α/m равным 1 с $^{-1}$, t равным 1 с, и попросим электронную таблицу рассчитать значение $\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$ при разных n. При этом будем

увеличивать n не по единице, а удвоением.

Будем заносить в столбцы:

$$A$$
 – величину n ;

$$B$$
 – значение $\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$.

Занесем формулы:

Ячейка	Формула электронной таблицы	Математическая формула
A3	A3=2*A2	$n_2 = 2n_1$
B2	B2=(1-1/A2)^A2	$\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$

Уже к 50 строке у чисел становится больше 20 цифр, причем первые 15 значащих цифр перестают меняться. Получается, что через время t=1 с скорость тела равна весьма странному числу: 0,36787944117144 м/с.

На этом этапе можно открыть ученикам секрет, что в математике хорошо известно число e, обратное тому, которое они получили: 1/0.36787944117144...=2.7182818285...

Школьникам также можно рассказать, что в математике число e вводится как «первый замечательный предел», т.е. как предел последовательности $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ при $n\to\infty$ [117]. Школьники могу воспользоваться электронной

(п)

таблицей и убедиться, что этот предел действительно равен 2,718281828...

Целесообразно сказать школьникам, что это число настолько важно в математике, что в электронной таблицах и в любых языках программирования есть функции под названием «экспонента», которая определяется как степень числа e:

$$\exp(x) = e^x. \tag{4.136}$$

Теперь школьники могут убедиться, что скорость в данной задаче убывает по экспоненте, т.е.

$$v = v_0 e^{-\frac{\alpha}{m}t} = v_0 \exp\left(-\frac{\alpha}{m}t\right),\tag{4.137}$$

что и будет ответом на дополнительный вопрос: как изменяется скорость лодки при линейной зависимости силы трения от скорости. Если бы школьники умели интегрировать, они бы без труда нашли закон движения (зависимость пройденного пути от времени):

$$L = v_0 \frac{m}{\alpha} \left(1 - \exp\left(-\frac{\alpha}{m}t\right) \right). \tag{4.138}$$

Однако заметим, что для нахождения ответа на вопрос о максимальном пути, который может пройти лодка, не нужно уметь интегрировать и даже не нужно знать число e. Она может быть решена аналитически с помощью нахождения инварианта, что мы сейчас подробно разберем.

4.2.9.3. Аналитическое решение задачи движения лодки (без нахождения закона движения)

Предыдущий параграф сложен для понимания и может быть опущен, поскольку аналитическое решение задачи возможно без введения числа e.

Знание экспоненты необходимо для описания закона убывания скорости от времени. Следовательно, если бы спрашивалось аналитически найти зависимость координаты от времени, то мы бы не смогли решить эту задачу. Но нас не спрашивают про время движения (не считая дополнительного вопроса). Попытаемся *обойти* эту зависимость. Вспомним задачу с Ахиллесом и конем. Мы находили соотношения (инварианты), в которые не входило время. Попробуем здесь сделать что-то в том же роде [94, 157].

Если школьники не догадаются сами, то можно дать им подсказку: построить в электронной таблице зависимость скорости от координаты. Получается прямая линия (рис. 4.44).

Далее «сильные» школьники уже догадываются как решается эта задача. Рассмотрим малый интервал времени Δt . Пусть к этому времени скорость лодки стала равна υ . За малое время Δt система проходит путь:

$$\Delta L = v \cdot \Delta t . \tag{4.139}$$

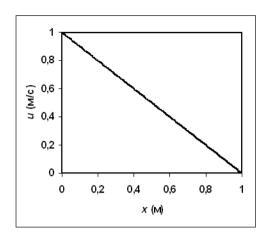


Рис. 4.44. Зависимость координаты от времени при движении в вязкой среде

С другой стороны, за это же время ее скорость меняется на величину:

$$\Delta v = a \cdot \Delta t = -\frac{\alpha}{m} v \cdot \Delta t . \tag{4.140}$$

Исключая из системы уравнений Δt , имеем:

$$\Delta v = -\frac{\alpha}{m} v \cdot \Delta t = -\frac{\alpha}{m} v \cdot \Delta L / v = -\frac{\alpha}{m} \cdot \Delta L. \tag{4.141}$$

Таким образом, получается, что изменение скорости однозначно связано с пройденным путем. Поскольку скорость изменится от v_0 практически до нуля, то координата изменится на величину:

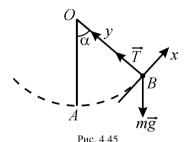
$$x = \frac{m}{\alpha} \cdot v_0. \tag{4.142}$$

Таким образом, тело пройдет путь не более mv_0/α [66, 168]. Заметим, что полученный ответ совпадает с численным расчетом.

4.2.10. Моделирование затухающих колебаний маятника

В качестве темы исследовательской работы можно предложить исследовать затухающие колебания. Рассмотрим простейший пример затухания математического маятника в воздухе [4, 168].

Выберем оси координат как для обычного математического маятника (рис. 4.45).



К расчету движения математического маятника

Только раньше ускорение вдоль оси x определялось только проекцией силой тяжести (проекция силы натяжения равна нулю):

$$a_{x} = -g\sin\alpha . (4.143)$$

Теперь же у нас появилась сила сопротивления воздуха, и ускорение будет равно:

$$a_x = -g\sin\alpha - \beta v|v|/m. \tag{4.144}$$

Следует обратить внимание учеников, что запись с модулем скорости необходима для учета того факта, что маятник может двигаться как налево, так и направо, и сила сопротивления должна препятствовать движению в обе стороны.

Для численного моделирования в столбцы электронной таблицы будем заносить значения:

A – времени;

B – угла отклонения α ;

C – угловой скорости ω ;

D – скорости движения по окружности υ ;

E – тангенциального ускорения a_x .

Чтобы затухания были заметны, возьмем коэффициент β/m равным 0,16 (м⁻¹) (как у шарика для пинг-понга). Занесем:

```
A2 – начальное время 0 (c);
```

D2 – начальная скорость 0 (м/с);

J2 – интервал времени $\Delta t = 0{,}001$ (c);

K2 – коэффициент $\beta/m = 0.16$ (м⁻¹);

L2 – длина маятника L=1 (м);

M2 – значение g = 9.815 (м/c²).

Занесем формулы:

Ячейка	Формула электронной таблицы	Математическая формула
A3	=A2+J\$2	$t_{n+1} = t_n + \Delta t$
В3	=B2+0,5*(C2+C3)*J\$2	$\alpha_{n+1} = \alpha_n + 0, 5(\omega_{n+1} + \omega_n) \Delta t$
C3	=D3/L\$2	$\omega_n = \upsilon_n / L$
D3	=D2+E2*J\$2	$\upsilon_{n+1} = \upsilon_n + a_{x,n} \Delta t$
E2	=-M\$2*SIN(B2)-K\$2*D2*ABS(D2)	$a_{x,n} = -g\sin\alpha_n - \beta v_n v_n /m$

Получается убывающая кривая, похожая на «синусоиду» (рис. 4.46) [168]. Заметим, что, строго говоря, эта функция не является периодичной, но при малом затухании колебания называют квазипериодичными от латинского «квази» — «как бы». Можно выделить условный период — время одного качания маятника, т.е. когда маятник возвращается в положения максимального отклонения. Можно измерять период как время между прохождения положения равновесия, но при этом следует помнить, что за период маятник дважды проходит через положение равновесия.

Найдем «период». Из электронной таблицы следует, что он равен — 2,007 с. Теоретическое значение: $T=2\pi\sqrt{L/g}=2\cdot 3,14159\sqrt{1/9,815}=2,005$ (с), что близко к расчетному значению. Увеличивая коэффициент β/m , можно убедиться в том, что «синусоида» убывает быстрее (рис. 4.47). Этот факт не удивителен. Можно обратить внимание, что период увеличивается, хотя и не сильно. Получается, что период зависит не только от угла отклонения, но и от сопротивления воздуха [4].

B2 — начальный угол 0,1 (рад);

C2 – начальная угловая скорость 0 (рад/с);

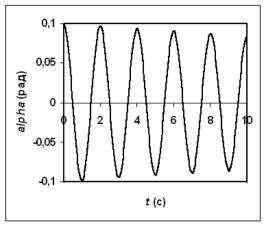


Рис. 4.46 Затухающие колебания маятника

Расчеты можно проверить экспериментально. При проведении эксперимента следует иметь в виду, что затухание вызвано не только силой сопротивлением воздуха, но и деформацией нити в месте крепления, поэтому коэффициент β/m должен быть достаточно большим. Лучше следует брать шарик для пинг-понга или воздушный шарик. Период можно измерять с помощью секундомера или цифровой камеры.

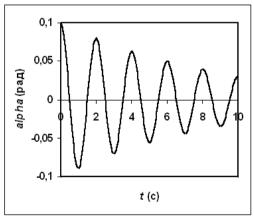


Рис. 4.47 Затухающие колебания маятника

Можно в качестве грузика взять стальной шарик и наблюдать его движение в глицерине. Если коэффициент β/m достаточно большой, то колебания вообще не возникнут (рис. 4.48) [168].

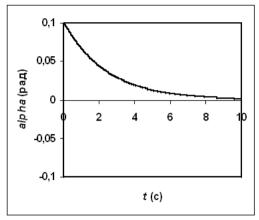


Рис. 4.48 Затухающие колебания маятника в глицерине

Можно предложить школьникам самостоятельно определить при каких условиях начнутся колебания, а при каких – их не будет. Для изменения коэффициента β/m можно разводить глицерин водой или брать масла с разной вязкостью.

4.2.11. Возможные направления исследовательских работ

В 4-й главе было показано как с помощью простейшего численного метода, который может быть реализован с помощью электронной таблицы (без применения языков программирования), можно изучать весьма сложные виды движений: различные виды колебаний, распространения волн, учитывать сопротивление среды. Кроме того, была представлена методика ознакомления школьников с функцией «экспонента», с которой они еще не раз встретятся при дальнейшем обучении в техническом или естественнонаучном вузе.

Опираясь на изученный материал, можно предложить школьникам большой спектр исследовательских работ [168]:

 исследование зависимости силы сопротивления воздуха от формы тела (здесь для школьников будет неожиданным резкое уменьшение силы сопротивления для тел каплевидной формы по сравнению с телами сферической формы, так же неожиданным будет то, что у тел каплевидной формы при падении острым концом вниз сила сопротивления будет больше, чем при падении тупым концом вниз [4, 224]);

- исследование баллистических траекторий (в том числе можно исследовать движение «крученных» мячей, где будет действовать дополнительная сила, которая в первом приближении может быть получена из уравнения Бернулли)
- исследование затухающих колебаний сложных маятников, описанных в середине главы, учет затухания сделает задачи более реалистичными и более точно описывающими экспериментальные данные;
- исследование затухающих колебаний связанных маятников и затухающих волн (для школьников окажется неожиданным, что если первые 99 связанных маятников колеблются без затухания, а 100-ый с затуханием, что волна отразится от этого маятника, а добиться отсутствие отраженной волны является сложной задачей, (ее важность очевидна для тех, кто хотел бы незаметно проплыть, не будучи обнаруженным вражескими сонарами);
- исследование зависимости силы сопротивления от свойств среды, например, вязкости глицерина от температуры, количества добавленной воды и др., вязкость можно измерять по времени падения шариков или путем увлечения неподвижного цилиндра, диска или пластины, подобно тому, как это делал Ньютон [4];
- исследование ламинарных потоков, (потребуется формула Пуазеля [4]);
- после ознакомления с законами динамики вращательного движения можно исследовать крутильные колебания, гироскопы и волчки;
- после ознакомления с законами молекулярной физики и термодинамики на основе численного интегрирования можно рассчитывать КПД различных циклов и моделировать работу тепловых машин;
- после ознакомления с законами электромагнетизма, можно рассчитывать картины силовых линий электрических и магнитных полей, рассчитывать силы взаимодействия токов, движения заряженных частиц; сложные электрические цепи с нелинейными элементами;
- после ознакомления с законами оптики можно рассчитывать оптические системы, включая толстые линзы и дифракционные элементы [159, 162, 166, 170].

Разумеется, можно придумать еще множество задач, как на основе экспериментов, описанных в литературе [11. 40, 44, 47, 113, 135, 136, 198,], так (что гораздо более ценно) и на основе собственных наблюдений школьника.

Заключение

Используя численные методы, можно преодолеть одну из основных возникающих при проведении исследовательских работ со школьниками – слабость их математического аппарата. Применения метолов позволяет как планировать обрабатывать эксперименты, так и проводить самостоятельные исследования на основы численных экспериментов. При этом нужно иметь в виду, что число расчетные задачи менее интересны, чем задачи, связанные с проведением Чрезвычайно важно отметить. экспериментов. что лля исследовательских способностей необходимо, чтобы школьник компетентен в используемых алгоритмах, поскольку демонстрационных программ сейчас много, но они во многом несут недостатки «меловой» физики, не позволяя школьнику понять, насколько сделанные программой расчеты относятся к реальному миру.

Еще раз обратим внимание, что предложенная схема знакомства школьников с численными методами была разработана автором для факультативных занятий со школьниками, которые хотели бы больше узнать о физике, но при этом:

- не имеют ярко выраженного интереса к определенной проблеме (то есть вначале занятий тема исследовательской работы еще не может быть сформулирована);
- школьник не владеет языками программирования, и начинать нужно с электронных таблиц, которые могут быть освоены в пределах одного занятия.

Если школьник уже знает, чем ему хотелось бы заниматься, то знакомство с численными методами можно провести за одно-два занятия, а далее углубляться в тонкости расчетов (сходимость и пр.) в процессе работы над задачей. Если школьник владеет языками программирования или готов их изучать, то число возможных задач становится намного больше — можно исследовать более сложные колебательные системы, состоящие из большого числа элементов [167], законы статистической физики [172], волновой оптики [170] и др. Еще раз подчеркнем, что исследовательские работы 2-го и 3-го уровней — это путешествие в неизвестное и давать точные указания о методике их выполнения невозможно [103, 104, 223], а лучше оставить это на усмотрение научного руководителя.

Поэтому автор будет рад, если научным руководителям исследовательских работ школьников окажутся полезными любые выдержки из этой книги. Вопросы, предложения и пожелания можно отправлять автору по адресу: phys-school@rambler.ru с пометкой в Subject «Галилей».

Список литературы

- 1. Абасов З.А. Проектирование и организация групповой работы учащихся на уроке. // Наука и школа, 2009, №6, с. 36-37.
- 2. Аванесов В.С. Президент США объявил о реформе образования. // Исследовательская работа школьников, 2010, №2, с. 13-16.
- 3. Алехина Т.Н., Силина Л.И. Управление исследовательской деятельностью учащихся в процессе обучения физике в профильных классах. // Физика в школе. 2009, №1, с. 15-18.
- 4. Алешкевич В.А., Деденко Л.Г., Караваев В.А. Механика: Учеб. для студ. вузов. М: Изд. центр «Академия», 2004. 480 с.
- 5. Алиев Р., Насиров М., Туланова Б., Базаров А. Изучение электрического поля на компьютере с использованием анимации и численных методов. // Физика в школе. 2011, №1, с. 40-43.
- 6. Аллен К.У. Астрофизические величины. M.: Мир. 1977. 448 c.
- 7. Альбицкая Н.Е. Технологии развития навыков исследовательской деятельности одарённых школьников. // Исследовательская работа школьников, 2010, №1, с. 90-96.
- Андреева Н.В. Конструирование фронтальных исследований. // Физика. 2010, №16, с.16-18.
- 9. Андреенко Ю.А. Метод размерностей как доступный способ формирования у обучаемых общеобразовательной школы представлений о путях построения единой физики. // Наука и школа, 2009, №6, с. 37-38.
- Анцупов И.А. Компьютерное моделирование как метод исследования.
 // Физика в школе. 2008, №2, с. 29-34.
- 11. Арнольд В.И. Математическое понимание природы. М.: МЦНМО, 2009. 144 с.
- 12. Басманова А.В. Научно-исследовательская работа по развитию творческих способностей учащихся. // Учитель в школе. 2010, №4, с. 97-100.
- 13. Белов А.В. Метод линеаризации в решении задач. // Физика в школе. 2008, №3, с. 33-36.
- 14. Белоцерковский О.М. Численное моделирование в механике сплошных сред. М.: Физматлит, 1994. 448 с.
- 15. Богуславский М.В. Документ, которого ждали. // Народное образование. 2010, №1, с. 17-23.
- Борисов Ю.А. От проекта до заявки на открытие один шаг. // Физика, 2010, №16, с. 44-46.

- 17. Браверманн Э.М. Мыслительная сфера учащихся: что и как развивать на занятиях по физике. // Всероссийский съезд учителей физики в МГУ. Труды. М.: МГУ, 2011, с. 321-323.
- 18. Бурсиан Э.В. 100 задач для решения на компьютере. СПб.: МиМ. 1997. 225 с/
- 19. Буховцев Б.Б., Кривченков В.Д., Мякишев Г.Я., Сараева И.М. Сборник задач по элементарной физике. М.: Наука, 1974. 416 с.
- 20. Бушина Т.А., Николаев В.И. Графики в курсе физики как учебное средство. // Всероссийский съезд учителей физики в МГУ. Труды. М.: МГУ, 2011, с. 337-338.
- 21. Бушина Т.А., Николаев В.И. О дидактических ресурсах графиков в курсе физики. // Всероссийский съезд учителей физики в МГУ. Труды. М.: МГУ, 2011, с. 338-339.
- 22. Быховский Я.С. Мобильные технологии для школьных исследований. // Школьные технологии, 2008, №5, с. 82-84.
- 23. Валеева Е.Х., Власова Ю.Ю., Монахов С.В. Образование в контексте приоритетов долгосрочного социально-экономического развития Российской Федерации. // Педагогика. 2009, №7, с. 3-10.
- 24. Валуйская О.А. ИКТ-поддержка проектной и исследовательской деятельности учащихся. // Всероссийский съезд учителей физики в МГУ. Труды. М.: МГУ, 2011, с. 186-188.
- 25. Васильева И.В. Формирование исследовательской компетентности обучающегося при изучении физики в основной школе. // Всероссийский съезд учителей физики в МГУ. Труды. М.: МГУ, 2011, с. 345-347.
- 26. Волкова Л.А. Виды, алгоритмы и принципы школьных учебных исследований. // Исследовательская работа школьников, 2009, №4, с. 17-22.
- 27. Волохов А.Ю., Королев Д.Ю. Из опыта организации учебноисследовательской работы учащихся в московской гимназии на югозападе №1543. // Всероссийский съезд учителей физики в МГУ. Труды. – М.: МГУ, 2011, с. 193-194.
- 28. Всероссийские олимпиады по физике. 1992 2004. / Под. ред. С.М. Козела, В.П. Слободянина. М.: Вербум-М, 2005. 534 с.
- 29. Гальперин П.Я. Лекции по психологии. Учебное пособие для студентов вузов. М.: Высшая школа, 2002. 400 с.
- 30. Газарян Р.М., Петросян В.Г. Решение задач на нахождение множества точек на плоскости, обладающих заданными свойствами, с помощью компьютера. // Информатика и образование. 2010, №8 с. 22-27.
- 31. Галилей Галилео. Избранные труды. т. 1. М.: Наука, 1964 640 с.
- 32. Галилей Галилео. Избранные труды. т. 2. М.: Наука, 1964 571 с.

- 33. Гамезо М.В., Петрова Е.А., Орлова Л.М. Возрастная и педагогическая психология: Учеб. пособие для студентов всех специальностей педагогических вузов. М.: Педагогическое общество России, 2003. 512 с.
- 34. Глазкова К.Р., Живодробная С.А. Возможности уроков-исследований для развития умения моделирования. // Физика в школе. 2008, №5, с. 31-33.
- 35. Гликман И.З. Размышления о старой и новой школе. // Инновации в образовании. 2010, №1, с. 107-120.
- 36. Гольдфарб Н.И. Сборник вопросов и задач по физике. М.: Высшая школа, 1973. 352 с.
- 37. Гордон Г.В. Использование компьютерных моделей при проведении факультативных занятий по физике. // Физика в школе. 2011, №1, с. 12-18.
- 38. Гормакова Л.Д. Совершенствование механизма организации и управления инновационной деятельностью в образовательном учреждении. // Исследовательская работа школьников, 2009, №3, с. 27-34.
- 39. Грачев А.В., Погожев В.А., Боков П.Ю. Физика. 9 класс. М.: Вентана-Граф, 2010. 336 с.
- 40. Громыко Г.Г. Демонстрационные опыты по физике. Н. Новгород: $B\Gamma$ ИПА, 2002. 98 с.
- 41. Грязнов А.Ю., Рыжиков С.Б. Новый компьютерный тренажер лабораторных работ по физике для средней школы. // Сборник трудов IX международной учебно-методической конференции "Современный физический практикум". г. Волгоград. М.: Издательский дом Московского физического общества, 2006, с. 161.
- 42. Гулд X., Тобочник Я. Компьютерное моделирование в физике. Часть 1.-M: Мир, 1990.-349 с.
- 43. Гулд X., Тобочник Я. Компьютерное моделирование в физике. Часть 2. М: Мир, 1990. 400 с.
- 44. Гулиа Н.В. Удивительная физика. О чем умолчали учебники. М.: Изд. НЦЭНАС, 2005. 416 с.
- 45. Гурина Р.В. Исследовательские лабораторные работы с использованием компьютера. // Физика в школе. 2011, №1, с. 43-46.
- 46. Гусева Л.А. Реализация метода проектов: школьная конференция "фестиваль идей". // Всероссийский съезд учителей физики в МГУ. Труды. М.: МГУ, 2011, с. 207-208.
- 47. Даминов Р.В. Физический эксперимент. Это просто! Казань: Центр инновац. технол., 2002. 129 с.

- 48. Данилова Л.Н. Одаренные школьники: обучение в германоязычных странах. // Народное образование, 2010, №1, с. 220-223.
- 49. Дахин А.Н. "В Калифорнии я лучше понял особенности российского образования". // Школьные технологии. 2006, №1, с. 26-33.
- 50. Дьюдени Г.Э. Пятьсот двадцать головоломок. M.: Mир, 1975. 342 с.
- 51. Дягилев Ф.М. Из истории физики и жизни ее творцов. М.: Просвещение, 1986. 255 с.
- 52. Емельянова И.Е. Аспекты организации исследовательского занятия с одарёнными детьми. // Исследовательская работа школьников, 2010, №2, с. 37-44.
- 53. Еремеева А.И., Цицин Ф.А. История астрономии. М.: МГУ, 1989. 348 с.
- 54. Ерохина Р.Я. Школьная конференция как способ реализации метода проектов. // Физика, 2010, №18, с. 21-25.
- 55. Ефлов В.Б. Математическое моделирование в задачах турнира юных физиков. // Всероссийский съезд учителей физики в МГУ. Труды. М.: МГУ, 2011, с. 409-410.
- 56. Жильцова О.А., Кузнецова Е.В., Пшеничная Г.Ф., Самоненко Ю.А. Возможности организации проектно-исследовательской деятельности учащихся в средней школе. // Школьные технологии, 2008, №6, с. 100-103.
- 57. Завада В.Ф. Из опыта организации научно-исследовательской деятельности учащихся лицея № 15, г. Саров. // Всероссийский съезд учителей физики в МГУ. Труды. М.: МГУ, 2011, с. 191-193.
- 58. Задачи московских физических олимпиад. Под. ред. С.С. Кротова. М.: Наука, 1988. 192 с.
- 59. Задачи по физике: Учебное пособие. Под. ред. О.Я. Савченко. СПб.: Изд. "Лань", 2001. 368 с.
- 60. Зайцева Н.В. Перспективные направления поддержки одаренных детей. // Народное образование, 2010, №3, с. 26-28.
- 61. Зарубина И.Н., Зарубин Н.П. Исследование сложений колебаний с помощью Excel. // Информатика и образование. 2010, №4, с. 52-54
- 62. Зарубина И.Н, Зарубин Н.П. Исследование столкновений с помощью электронных таблиц. // Информатика и образование. 2011, №2, с. 72-75.
- 63. Зачесова Е.В. Написание текстов: рекомендации юным авторам учебных исследований и их руководителям. // Школьные технологии. 2006, №5, с. 105-111.
- 64. Зеленская Е.В. Поэтапная организация учебной проектной деятельности учащихся. // Школьные технологии. 2009, №5, с. 122-127.

- 65. Зильберберг Н.И. Этапы включения школьников в исследовательскую деятельность. // Школьные технологии. 2008, №5, с. 76-81.
- 66. Зильберман А.Р. Школьные физические олимпиады. М.: МЦНМО, $2009.-256\ c.$
- 67. Иванова Н.Ю. Исследовательская деятельность младших школьников как средство повышения интереса и мотивации к изучению физики. // Всероссийский съезд учителей физики в МГУ. Труды. М.: МГУ, 2011, с. 410-412.
- 68. Игонина Е.М. Проектная и исследовательская деятельность членов научного общества учащихся "Лидер" в условиях сельского лицея. // Всероссийский съезд учителей физики в МГУ. Труды. М.: МГУ, 2011, с. 228-229
- 69. Ильина Р.В. проектно-исследовательская деятельность обучающихся по физике как средство формирования ключевых образовательных компетенций. // Всероссийский съезд учителей физики в МГУ. Труды. М.: МГУ, 2011, с. 203-205.
- 70. Инишева О.В. Единство учебной и внеучебной работы по физике в СУНЦ УРГУ залог успешности учащегося и учителя. // Всероссийский съезд учителей физики в МГУ. Труды. М.: МГУ, 2011, с. 184-186.
- 71. Казакова Ю.В. Организация внеурочной исследовательской деятельности учащихся по физике в современных условиях. // Всероссийский съезд учителей физики в МГУ. Труды. М.: МГУ, 2011. с. 215-216.
- 72. Калиткин Н.Н. Численные методы. М.: Наука, 1978 512 с.
- 73. Капранова И.М. Развитие творческой одаренности школьников через научно-исследовательскую деятельность. // Исследовательская работа школьников, 2010, №2, с. 45-50.
- 74. Кармазин С.В. Использование графиков при решении экспериментальных и псевдоэкспериментальных задач по физике. // Всероссийский съезд учителей физики в МГУ. Труды. М.: МГУ, 2011, с. 229-231.
- 75. Карпов А.О. Три модели обучения. // Педагогика, 2009, №8, с. 14-26.
- 76. Карпов А.О. Теория научного образования: современные проблемы. // Исследовательская работа школьников, 2010, №1, с. 7-25.
- 77. Касьянов В.А. Физика. 10 класс. М.: Дрофа. 2003. 416 с.
- 78. Кикоин И.К., Кикоин А.К. Физика: Учеб. для 9 кл. общеобразоват. учрежд. М.: Просвещение, 1998. 191 с.
- 79. Ким В.С. Научное и учебное моделирование в физическом эксперименте. // Наука и школа. 2010, №4, с. 30-34.

- 80. Кларин М.В. Характерные черты исследовательского подхода: обучение на основе решений проблем. // Школьные технологии. 2004(?), №1(?), с. 11-24.
- 81. Кларин М.В. Развитие критического и творческого мышления. // Школьные технологии. 2004(?), №2(?), с. 3-11(?-нет конца статьи).
- 82. Ковалева С.Я. Об исследовательской и проектной деятельности учащихся. // Физика, 2010, №18, с. 3-4.
- 83. Козырева Н.А. Исследовательская деятельность школьников: подходы и возможности. // Всероссийский съезд учителей физики в МГУ. Труды. М.: МГУ, 2011, с. 195-196.
- 84. Койре А. Очерки истории философской мысли. М.: Прогресс, 1985. 288 с.
- 85. Колесов А.В. Использование проектных технологий в современном образовании. // Исследовательская работа школьников, 2009, №3, с. 23-26.
- 86. Коломин В.И. Компетентностный подход в профессиональной подготовке учителя физики. // Наука и школа, 2008, №1, с. 5-7.
- 87. Королева Е.В. Формирование новой интеллектуальной элиты России // Исследовательская работа школьников, 2009, №2, с. 5-6
- 88. Королева Е.В. Инновационное образование основа устойчивого инновационного развития экономики России. // Исследовательская работа школьников, 2009, №2, с. 5-6
- 89. Королева Е.В. Проектно-исследовательская деятельность учащихся как средство формирования и развития инновационного мышления генератора инноваций. // Исследовательская работа школьников, 2010, №1, с. 5-6.
- 90. Косихина О.С., Крутский А.Н. Понятие о психодидактике. // Физика в школе. 2010, №3, с. 30-34.
- 91. Котельникова Я.А. Некоторые особенности организации и оформления исследовательской работы учащихся // Исследовательская работа школьников, 2009, №1, с. 49-61
- 92. Кравец В.В. Эксперимент в естественных науках. // Физика в школе. 2009, №1, с. 22-25.
- 93. Краевский В.В. Методологические характеристики научного исследования. // Народное образование, 2010, №5, с. 135-143.
- 94. Красин М.С. Решение сложных и нестандартных задач по физике. Эвристические приемы поиска решений. М.: ИЛЕКСА, 2009. 360 с.
- 95. Крысанова О.А. Структура и содержание инновационной деятельности учителя физики в современной школе. // Наука и школа. 2010, №3, с. 45-48.

- 96. Кудрявцева О.Б. Роль внеклассной работы в исследовательском обучении. // Всероссийский съезд учителей физики в МГУ. Труды. М.: МГУ, 2011, с. 233-236.
- 97. Куклина И.Д. Применение электронных таблиц при изучении приближенных методов вычисления интеграла. // Информатика и образование. 2010, №9, с. 94-96.
- 98. Кушнарева Н.Ю. От исследовательской деятельности на уроке к индивидуальной исследовательской работе ученика. // Исследовательская работа школьников, 2010, №2, с. 30-36.
- 99. Лебедев В.В. Исследовательская компетентность педагога: технология мыследеятельности. // Наука и школа. 2010, №1, с. 29-35.
- 100. Лебедева Н.А. Интерес к научным исследованиям нужно прививать в школе. // Всероссийский съезд учителей физики в МГУ. Труды. М.: МГУ, 2011, с. 208-210.
- 101. Леонтович А.В. Моделирование исследовательской деятельности учащихся: практические аспекты. // Школьные технологии, 2006, №6, с. 89-98.
- 102. Леонтович А.В. Современная практика дополнительного образования детей // Исследовательская работа школьников, 2008, №3, с. 6-18
- 103. Леонтович А.В. Принципы системного построения исследовательской деятельности в образовательной системе // Исследовательская работа школьников, 2009, №3, с. 13-22.
- 104. Леонтович А.В. Не смейтесь над Фарадеем // Лицейское и гимназическое образование, 2010, №10, с. 32-33.
- 105. Леонтович А.В. Исследовательская деятельность школьников: международные проекты. // Народное образование. 2010, №3, с. 253-258.
- 106. Лобышев В.И. Исследовательская работа учащихся необходимый элемент образования. // Всероссийский съезд учителей физики в МГУ. Труды. М.: МГУ, 2011, с. 200-201.
- 107. Льоцци М. История физики. М.: Мир, 1970. 463 с.
- 108. Лымарева Н.А. Физика. 9-11 классы: проектная деятельность учащихся. Волгоград: Учитель, 2008. 187 с.
- 109. Мазничевская Л.И. Уроки на тему: «применение простейших статистических понятий для решения практических задач с помощью электронных таблиц». // Информатика и образование. 2011, №2, с. 61-71.
- 110. Майер Р.В. Информационные технологии и физическое образование. Глазов: ГГПИ, 2006. 64 с.

- 111. Майер В.В., Вараксина Е.И., Демьянова О.И. Повышение интереса к физике при изучении математического маятника. // Физика в школе. 2009, №3, с. 37-39.
- 112. Майер В.В., Демьянова О.И. Опыты по записи колебаний маятников. // Физика в школе. 2009, №3, с. 39-41.
- 113. Маковецкий П.В. Смотри в корень. М.: Наука, 1991. 350 с.
- 114. Макотрова Г.В. Формирование учебно-исследовательской культуры учащихся. // Физика в школе. 2009, №8, с. 36-38.
- 115. Маланцева О. Исследование детской одарённости за рубежом // Исследовательская работа школьников, 2009, №3, с. 5-12.
- 116. Маракуев Н.Н. Галилей. Его жизнь и ученые труды. М: 1907.
- 117. Математический энциклопедический словарь. / Гл. ред. Ю.В. Прохоров. М.: Сов. энциклопедия, 198. 847 с.
- 118. Матросов В.Л. Новый учитель для новой российской школы. // Педагогика, 2010, №5, с. 3-9.
- 119. Медведев Д.А. "Главная задача современной школы это раскрытие способностей каждого ученика". // Народное образование. 2010, №1, с. 11-13.
- 120. Мельникова И.Ю. Экспериментальные задания по физике как средство развития исследовательских и творческих способностей учеников. // Физика, 2010, №18, с. 13-20.
- 121. Меньшикова Е.А. О психолого-педагогической природе любопытства и любознательности у детей. // Исследовательская работа школьников, 2008, №3, с. 26-31
- 122. Михайлов Е.А., Рыжиков С.Б. Проведение проектноисследовательских работ со старшеклассниками на примере решения классической задачи гравитационного линзирования. // Всероссийский съезд учителей физики в МГУ. Труды. - М.: МГУ, 2011, с. 241-243.
- 123. Москвина А.В. Способен ли ученик сделать научное открытие? // Школьные технологии. 2004, №1, с. 219-228.
- 124. Мухина В.С. Психологический смысл исследовательской деятельности для развития личности. // Школьные технологии. 2006, №2, с. 19-31.
- 125. Наливайко В.П. Об опыте организации исследовательской деятельности учащихся. // Физика в школе. 2009, №1, с. 18-22.
- 126. Неграш А.С. Анализ размерностей физических величин и подобие физических явлений как метод развития мышления при обучении физике. // Всероссийский съезд учителей физики в МГУ. Труды. М.: МГУ, 2011, с. 332-334.
- 127. Никитин А.В., Слободянюк А.И., Шишаков М.Л. Компьютерное моделирование физических процессов. М.: БИНОМ, 2011. 679 с.

- 128. Никифоров В.В. «Компьютерный эксперимент» в курсе физики средней школы: будем осторожны. // Физика в школе. 2008, №7, с. 6-8.
- 129. Новиков А.М. О предмете педагогики. // Педагогика, 2010, №6, с. 8-14.
- 130. Оборотова Е.А. Исследовательские методы обучения на уроках физики в школе // Исследовательская работа школьников, 2008, №4, с. 66-70
- 131. Обухов А. Социокультурное взаимодействие в системе исследовательской деятельности учащихся. // Народное образование. 2002, №2, с.129-132.
- 132. Осипенко Л.Е., Слободянюк А.И., Лавриненко А.В. Сказка про горячий чай или как наладить исследовательскую работу в школе. // Физика в школе. 2009, №1, с. 26-35.
- 133. Остапенко А.А. И ещё раз о знаниях, умениях и навыках или поможет ли этимология разрешить извечную дидактическую путаницу? // Школьные технологии. 2010, №1, с. 183-184.
- 134. Пентин А.Ю. Исследовательская и проектная деятельности: сущность и форма. // Новые ценности образования. 2006, вып. 1-2, с. 36-41.
- 135. Перельман Я.И. Занимательная физика. Книга первая. М.: Наука, 1971. 216 с.
- 136. Перельман Я.И. Занимательная физика. Книга вторая. М.: Наука, 1971. 264 с.
- 137. Перышкин А.В., Третьяков Н.П. Физика: Учебное пособие для средних специальных учебных заведений. М.: Трудрезервиздат, 1955. 436 с.
- 138. Петросян В.Г. Решение задач по физике с помощью компьютера. Монография. М.: Прометей, 2004. 160 с.
- 139. Пивоваров С.С., Зеленин С.П. Образовательная среда одаренных старшеклассников и организация процесса обучения физике. // Всероссийский съезд учителей физики в МГУ. Труды. М.: МГУ, 2011, с. 212-214.
- 140. Пигалицын Л.В. Наши успехи за рубежом: международный конкурс научных и инженерных работ школьников. // Физика, 2010, №18, с. 35-37.
- 141. Пигалицын Л.В. Проектная и учебно-исследовательская деятельность школьников залог успеха российской науки XXI века. // Всероссийский съезд учителей физики в МГУ. Труды. М.: МГУ, 2011, с. 201-203.
- 142. Плескова И.А. Проектная и исследовательская деятельность учащихся на уроках физики и во внеурочное время. // Всероссийский съезд учителей физики в МГУ. Труды. М.: МГУ, 2011, с. 244-246.
- 143. Полат Е.С. Метод проектов: история и теория вопроса. // Школьные технологии, 2006, №6, с. 43-47.

- 144. Полякова Е.П. Использование методов исследования на уроках физики. // Всероссийский съезд учителей физики в МГУ. Труды. М.: МГУ, 2011, с. 246-248.
- 145. Полякова С.А. Раннее изучение физики. // Всероссийский съезд учителей физики в МГУ. Труды. М.: МГУ, 2011, с. 399-401.
- 146. Прозаровская Л.А., Ханжина Е.В. Вопросы содержания факультативного курса "Физические основы прыжка с паршаютом". // Всероссийский съезд учителей физики в МГУ. Труды. М.: МГУ, 2011, с. 249-252.
- 147. Пурышева Н.С., Вяжеевская Н.Е., Чаругин В.М. Физика. 9 класс. М.: Дрофа, 2007. 285 с.
- 148. Путеводитель юного исследователя. / Научно-образовательный центр ИПФ РАН. Н. Новгород: Нижегородский гуманитарный центр, 2007. 92 с.
- 149. Разумовский В.Г. Творческие задачи по физике в средней школе. М.: Просвещение, 1966. 156 с.
- 150. Разумовский В.Г. Подготовка современного школьника по физике: проблема повышения качества обучения. // Физика в школе. 2000, №3, с. 3-6.
- 151. Разумовский В.Г. Проблемы обучения физике и опыт зарубежной школы. // Физика в школе. 2009, №8, с. 9-18.
- 152. Разумовский В.Г. Майер В.В., Стрелков В.М. Экспериментальное изучение фотоэффекта на основе научного метода познания. // Физика в школе. 2010, №2, с. 38-51.
- 153. Ращиков В.И., Рошаль А.С. Численные методы решения физических задач. С.Пб.: Лань, 2005. 208 с.
- 154. Рудой Ю.Г. Размышления о лицее "Вторая школа". // Физика в школе. 2008, №3, с. 30-33.
- 155. Рыжиков С.Б. Два аспекта применения компьютера в преподавании физики на примере решения одной классической задачи. // Труды VII международной конференции "Физика в системе современного образования". СПб. 2003. т.1. с. 116-118.
- 156. Рыжиков С.Б. Простой опыт, демонстрирующий квадратичный характер зависимости силы сопротивления воздуха от скорости. // Труды VIII международной учебно-методической конференции "Современный физический практикум", М., 2004, с. 86.
- 157. Рыжиков С.Б. Беседы и компьютерные расчеты, касающиеся нескольких занимательных задач механики. ч.1. Как Ахиллес и черепахи играли в догонялки. М.: МГДД(Ю)Т, 2007. 76 с.

- 158. Рыжиков С.Б. Использование табличного процессора MS Excel для решения физических задач повышенной сложности. // Информатика и образование. 2007, №10, с. 73-78.
- 159. Рыжиков С.Б. Компьютерное моделирование образования радуги. // Материалы VI Международной научно-методической конференции "Физическое образование: проблемы и перспективы", М.: Школа будущего, 2007, ч.2., с. 168-170.
- 160. Рыжиков С.Б. Классический опыт Галилея в век цифровой техники. Учебное пособие. М.: МЦНМО. 2008. 64 с.
- 161. Рыжиков С.Б. Беседы и компьютерные расчеты, касающиеся нескольких занимательных задач механики. ч.2. Как Кеплер и Ньютон превращали окружности в эллипсы. Учебное пособие. М.: МГДД(Ю)Т, 2008. 76 с.
- 162. Рыжиков С.Б. Навыки исследователя формируются на школьной скамье. // Вестник МГУ, сер. 20 (педагогическая), 2008, №2, с. 65-71.
- 163. Рыжиков С.Б. Измерение силы сопротивления воздуха. // Физика в школе. 2008. №3, с. 37-40.
- 164. Рыжиков С.Б. Использование электронных таблиц для проверки законов Кеплера. // Информатика и образование. 2008. №8, с. 71-76.
- 165. Рыжиков С.Б. Демонстрация "эффекта бабочки" на примере численного моделирования прохождения астероида №99942 (Апофис) вблизи Земли. // Тезисы докладов научной конференции Ломоносовские чтения, секция физики, 2008, с. 169-170.
- 166. Рыжиков С.Б., Рыжикова Ю.В. Физический эксперимент по оптике в условиях летней школы. // Труды международной конференции "Современный физический практикум". Астрахань. 2008, с. 256-257.
- 167. Рыжиков С.Б. Беседы и компьютерные расчеты, касающиеся нескольких занимательных задач механики. ч.3. Как Галилей и Шерлок Холмс извлекли пользу из умения наблюдать. Учебное пособие. М.: МГДД(Ю)Т, 2009. 100 с.
- 168. Рыжиков С.Б. Беседы и компьютерные расчеты, касающиеся нескольких занимательных задач механики. ч.4. Как Галилей бросал ядра с Пизанской башни. Учебное пособие. М.: МГДД(Ю)Т, 2009. 80 с.
- 169. Рыжиков С.Б., Рыжикова Ю.В. Особенности проведения практических занятий по механике с учащимися 7-9 классов в условиях летней школы. // Материалы X международной конференции "Физика в системе современного образования". С-Петербург. 2009. с. 119.
- 170. Рыжиков С.Б. Расчет дифракционных картин от простейших объектов с применением численного моделирования в 9 классе средней школы. // Материалы IX Международной научно-методической конференции

- «Физическое образование: проблемы и перспективы развития» М.: МПГУ, 2010, Ч. 3, с. 92-94.
- 171. Рыжиков С.Б. Проектно-исследовательские работы как способ развития интереса к физике у школьников 7-9 классов. // Всероссийский съезд учителей физики в МГУ. Труды. М.: МГУ, 2011, с. 205-207.
- 172. Рыжиков С.Б. Развитие представлений о статистическом характере физических законов у школьников 7-11 классов в процессе выполнения проектно-исследовательских работ с использованием компьютерного моделирования. // Школа будущего. 2011. №1, с.46-52.
- 173. Рябов Ю.А. Движение небесных тел. М.: Наука, 1988. 240 с.
- 174. Савенков А.И. Одаренные дети в детском саду и школе: Учеб. пособие для студ. высш. пед. учеб. заведений. М.: Академия, 2000. 232 с.
- 175. Савенков А.И. Педагогические основы исследовательского подхода к обучению. Учебное пособие. М.: Ось-89, 2006. 480 с.
- 176. Савенков А.И. Психологические основы исследовательского обучения школьников. // Школьные технологии, 2008, №1, с. 11-20.
- 177. Савенков А.И. Психология детской одаренности. Учебное пособие. М.: Генезис, 2009. 440 с.
- 178. Савенков А.И. Педагогическая психология. Учебник. М.: Академия. 2009. т. 1. 416 с.
- 179. Савенков А.И. Педагогическая психология. Учебник. М.: Академия. 2009. т. 2. 240 с.
- 180. Самарский А.А. Введение в численные методы: Учеб. пособие для вузов. СПб.: Лань, 2005. 288 с.
- 181. Самоненко Ю.А. Современные обучающие технологии в преподавании физики. // Всероссийский съезд учителей физики в МГУ. Труды. М.: МГУ, 2011, с. 318-320.
- 182. Самсонова Л.В. Проектная деятельность учащихся на уроках физики. // Всероссийский съезд учителей физики в МГУ. Труды. М.: МГУ, 2011, с. 198-200.
- 183. Семенов М.В., Рыжиков С.Б., Якута А.А. Некоторые замечания к решению задачи о падении тела в воздухе. // Труды международной конференции "Проблемы физического образования в средней и высшей школе" Рязань. 2002 с. 133-134.
- 184. Семенова И.Ю. Некоторые формы творческой внеурочной работы по физике: опыт работы в советском районе г. Новосибирска. // Всероссийский съезд учителей физики в МГУ. Труды. М.: МГУ, 2011, с. 210-212.

- Слепцов А.И. Методика включения учащихся в научно исследовательскую деятельность. – Новосибирск: Изд. НИПКиПРО, 2007. – 52 с.
- 186. Слепцова Р.Р. Обучение учащихся навыкам исследовательской работы. // Всероссийский съезд учителей физики в МГУ. Труды. М.: МГУ, 2011, с. 343-345.
- 187. Слободецкий И.Ш., Орлов В.А. Всесоюзные олимпиады по физике: Пособие для учащихся 8-10 кл. сред. школы. М: Просвещение, 1982. 256 с.
- 188. Сидорчук Т.А. Проблемные ситуации и творческие задания как средство формирования исследовательских навыков обучающихся. // Исследовательская работа школьников, 2009, №3, с. 35-39.
- 189. Софронова Е.А. Организация проектной деятельности на уроках физики. // Всероссийский съезд учителей физики в МГУ. Труды. М.: МГУ, 2011, с. 264-266.
- 190. Суербаев А.Х. Экспериментально исследовательские умения учащихся по физике и их развитие в системе дополнительного образования. Монография. Оренбург: Изд-во ОГПУ, 2009. 280 с.
- 191. Сульянова М.М. Метод проектов в преподавании физики. // Физика, 2010, №18, с. 5-6.
- 192. Суханов М.Б., Суханова А.Г. Определение коэффициентов нелинейных зависимостей методом наименьших квадратов в OpenOffice.org Calc. // Информатика и образование. 2010, №3, с. 105-107.
- 193. Теория и методика обучения физики в школе: Общие вопросы: Учеб пособие для студ. высш. пед. учеб. заведений. / Под ред. С.Е. Каменецкого, Н.С. Пурышевой. М.: Изд. центр "Академия", 2000. 368 с.
- 194. Теория и методика обучения физики в школе: Частные вопросы: Учеб пособие для студ. высш. пед. учеб. заведений. / Под ред. С.Е. Каменецкого. М.: Изд. центр "Академия", 2000. 384 с.
- 195. Тихонова И.В. Организация работы научного общества учащихся. // Всероссийский съезд учителей физики в МГУ. Труды. М.: МГУ, 2011, с. 254-256.
- 196. Трополева О.Л. Создание центров поддержки физико-технического образования как реализация инновационной структуры сетевого взаимодействия ученики вузы. // Всероссийский съезд учителей физики в МГУ. Труды. М.: МГУ, 2011, с. 190-191.
- 197. Тяглова Е.В. Методика апробации результатов исследовательской деятельности учащихся. // Школьные технологии. 2007, №1, с. 103-118.

- 198. Уокер Дж. Физический фейерверк. М.: Мир, 1988. 298 с.
- 199. Физика: 3800 задач для школьников и поступающих в вузы. М.: Дрофа, 2000. 672 с.
- 200. Физика: Механика. 10 класс. Под ред. Г.Я. Мякишева М.: Дрофа. 2002. 496 с.
- 201. Физика: Учеб. для 10 кл. с углубл. изучением физики. / Под ред. А.А, Пинского, О.Ф. Кабардина. М.: Просвещение, 2005. 332 с.
- 202. Физические величины: Справочник. / Под ред. И.С. Григорьева, Е.З. Мелихова. М.: Энергоатомиздат, 1991. 1232 с.
- 203. Филатов Е.Н. О системе оценивания знаний в школе для одаренных детей. // Школьные технологии. 2008, №2, с. 149-152.
- 204. Фирсова М.М. Исследовательская деятельность учащихся гимназии. // Педагогика, 2003, №8, с. 26-31.
- 205. Хаммэль Ч. Дело Галилея. М.: Триада, 1998. 360 с.
- 206. Хвольсон О.Д. Курс физики. т. 1. М.: Гос. тех.-теор. изд., 1933. 656 с.
- 207. Хоютанова М.И. Исследовательская работа школьников: проблемы, подходы, перспективы. // Всероссийский съезд учителей физики в МГУ. Труды. М.: МГУ, 2011, с. 388-391.
- 208. Хуторской А.В. Метод Сократа. // Школьные технологии. 2008, №6, с. 26-31.
- 209. Хуторской А.В. Система обучения Аристотеля. // Школьные технологии. 2009, №1, с. 24-28.
- 210. Хуторской А.В. "Великая дидактика" Коменского. // Школьные технологии. 2009, №6, с. 64-76.
- 211. Хуторской А.В. Естественное воспитание и обучение Ж.-Ж. Руссо. // Школьные технологии. 2010, №1, с. 75-83.
- 212. Хуторской А.В. Система обучения М.В. Ломоносова. // Школьные технологии. 2010, №4, с. 86-88.
- 213. Черныш Г.Н. Обучение через науку и творческое проектирование. //Всероссийский съезд учителей физики в МГУ. Труды. М.: МГУ, 2011, с. 259-260.
- 214. Чечель И. Метод проектов: субъективная и объективная оценка результатов. // Директор школы. 1998, №4, с. 3-10.
- 215. Чичигина О.А., Полякова М.С. // Интерактивные компьютерные демонстрации для изучения статистических основ термодинамики. // Всероссийский съезд учителей физики в МГУ. Труды. М.: МГУ, 2011, с. 218-219.
- 216. Чудов В., Кокшарова Н., Лаврушко О. Проектно-исследовательская деятельность школьника. // Народное образование, 2005, №1, с. 133-140.

- 217. Чупрова Н.А. Методические рекомендации по организации исследовательской работы школьников. // Исследовательская работа школьников, 2010, №2, 51-56.
- 218. Шатилова В.П. Учебно-исследовательская деятельность учащихся 5 классов. // Всероссийский съезд учителей физики в МГУ. Труды. М.: МГУ, 2011, с. 260-262.
- 219. Шишкин Ф.Т. Компетентция и компетентность как ключевые понятия компетентностного подхода в образовании. // Наука и школа, 2008, №4, с. 5-8.
- 220. Шиян Н.В., Шиян А.А. Метод проектов в физическом образовании. //Физика в школе. 2005. №5. с. 33-36.
- 221. Шиян О.А. Исследовательский метод обучения учителей в США. // Новые ценности образования. 2006, вып. 1-2, с. 265-271.
- 222. Шмачилина С.В. Мониторинг исследовательской культуры старшеклассника. // Народное образование, 2010, №2, с. 139-144.
- 223. Шноль Д.Э. О типологии исследовательских работ школьников // Исследовательская работа школьников, 2009, №1, с. 44-48.
- 224. Элементарный учебник физики: Учеб. пособие. В 3 т. / Под ред. Г.С. Ландсберга: Т. 1.-M.: Наука, Физматлит, 1995.-608 с.
- 225. Элементарный учебник физики: Учеб. пособие. В 3 т. / Под ред. Г.С. Ландсберга: Т. 2. М.: Наука, Физматлит, 1995. 480 с.
- 226. Элементарный учебник физики: Учеб. пособие. В 3 т. / Под ред. Г.С. Ландсберга: Т. 3. М.: Наука, Физматлит, 1995. 656 с.
- 227. Энциклопедия для детей. (Том 16) Физика. Ч. 1. М.: Мир энциклопедий Аванта+, 2000. 448 с.
- 228. Янюшкина Г.М., Буйлина О.М. Участие школьника в проектноисследовательской деятельности как необходимое условие их развития. // Всероссийский съезд учителей физики в МГУ. Труды. -М.: МГУ, 2011, с. 221-223.
- 229. Яроцкая И.С. Об участии молодых исследователей Северо-Западного федерального округа в Российской научно-социальной программе для молодёжи и школьников "Шаг в будущее" // Исследовательская работа школьников, 2009, №1, с. 83-90.

Содержание

Введение	3
Глава 1. Общие принципы отбора школьников, выбора темы	
и проведения индивидуально-групповых	
исследовательских работ	7
1.1. Особенности проведения исследовательских работ	
по сравнению с другими формами обучения	7
1.2. Особенности построения курса в условиях летних школ	9
1.3. Общие рекомендации по планированию исследовательской работы	
от постановки задачи до подготовки доклада на конференции	9
1.4. Применение численных методов для решения задач повышенной	
сложности и выполнения индивидуально-групповых	
исследовательских работ	14
1.5. Различие компьютерного моделирования и численного	
моделирования	15
1.6. Методика отбора школьников для проведения исследовательских	
работ с применением компьютерного моделирования	16
Глава 2. Компьютерное моделирование с помощью электронных	
таблиц задач повышенной сложности, не выходящих	
за рамки школьной программы	19
2.1. Постановка задачи описания движения в кинематике	19
2.1.1. Исторический аспект - апории Зенона как постановка	
проблемы описания движения	20
2.1.2. Графическое описание движения	21
2.1.3. Введение понятий мгновенной скорости и мгновенного	
ускорения без использования производных	23
2.1.4. Нахождение закона движения путем численного интегрирования	25
2.1.5. Разностные схемы для описания движения	29
2.1.6. Оценка точности численного решения, понятие сходимости	31
2.1.7. Реализация алгоритмов разностных схем на языках	
программирования	32
2.1.8. Реализация алгоритмов разностных схем в электронных таблицах	
MS Excel и Open Office.org Calc	34
2.2. Моделирование одномерного движения	37
2.2.1. Движение при известной зависимости скорости от времени	37
2.2.2. Движение при известной зависимости скорости от координаты	40
2.3. Моделирование двумерного движения	42
2.4. Моделирование задач на преследование	49
2.4.1. Преследование при движении цели по прямой	
(случай равных скоростей)	49

2.4.2. Преследование при движении цели по прямой	
(случай произвольных скоростей)	61
2.4.3. Преследование при движении цели по окружности	69
2.4.4. Преследование со многими участниками	75
2.4.5. Проектно-исследовательские работы, которые	
могут быть выполнены в рамках задач на преследование	84
Глава 3. Численное моделирование с помощью электронных	
таблиц задач повышенной сложности, не решаемых	
в рамках школьной программы	85
3.1. Применение разностных схем для решения задач	
с известной зависимостью ускорения от координаты	85
3.2. Моделирование движения небесных тел в Кеплеровском	
приближении	87
3.2.1. Вывод I закона Кеплера из закона всемирного тяготения	90
3.2.2. Вывод II закона Кеплера из закона всемирного тяготения	99
3.2.3. Вывод III закона Кеплера из закона всемирного тяготения	101
3.3. Моделирование гиперболических и параболических траекторий	
движения небесных тел	102
3.4. Исследование справедливости II закона Кеплера для	
гиперболических и параболических траекторий	107
3.5. Исследование справедливости закона сохранения энергии	108
3.6. Расчет II космической скорости	110
3.7. Нахождение фокуса параболы	112
3.8. Задачи для исследовательских работ	113
Глава 4. Исследовательские работы, выполняемые на основе	
численного моделирования	119
4.1. Исследование колебательных систем	120
4.1.1. Особенности изучения математического маятника	120
4.1.2. Применение разностных схем для описания колебательного	
движения	124
4.1.3. Исследование колебаний математического маятника при малых	
и произвольных углах	130
4.1.3.1. Зависимость периода от амплитуды колебания	130
4.1.3.2. Проблемы, возникающие при использовании понятия	
«малые углы»	132
4.1.3.3. Геометрическое доказательство равенства синуса и его	
аргумента при малых углах	135
4.1.4. Связь между колебаниями математического и конического	
маятников при малых углах	137
4.1.5. Исследование колебаний пружинного маятника	143

4.1.5.1. Формула периода колебаний пружинного маятника	
из соображений размерности	144
4.1.5.2. Численный расчет периода колебаний пружинного маятника	144
4.1.5.3. Вывод формулы периода колебаний пружинного маятника	145
4.1.5.4. Задачи для самостоятельного исследования	146
4.1.6. Исследование колебаний сложного пружинного маятника	146
4.1.7. Исследование колебаний двух связанных маятников	150
4.1.7.1. Численное моделирование колебаний двух связанных маятников	150
4.1.7.2. Экспериментальная проверка расчетов колебаний двух	
связанных маятников	157
4.1.8. Исследование колебаний трех связанных маятников	160
4.1.9. Задачи для самостоятельного исследования	166
4.2. Исследование движения в вязкой среде	169
4.2.1. Определение круга задач, разбираемых при изучении темы	
вязкое трение (сопротивление среды)	169
4.2.2. Постановка задачи учета сопротивления воздуха	170
4.2.3. Определение величины вязкого трения (сопротивления среды)	172
4.2.4. Схема Эйлера при известной зависимости ускорения от скорости	175
4.2.5. Вертикальное падение тела в вязкой среде	179
4.2.6. Вертикальное падение тела, ламинарное движение	182
4.2.6.1. Нахождение объектов для наблюдения ламинарного движения	182
4.2.6.2. Зависимость скорости от времени при ламинарном движении	183
4.2.7. Использование численных расчетов в качестве эвристического	
метода для решения олимпиадных задач	185
4.2.8. Баллистические траектории	187
4.2.8.1. Расчет траектории при отсутствии сопротивления воздуха	188
4.2.8.2. Расчет траектории с учетом сопротивления воздуха	192
4.2.8.3. Анализ гипотезы Галилея	197
4.2.8.4. Аналитическое решение задачи броска с возвышенности	
в отсутствии сопротивления воздуха	198
4.2.9. Исследование затухания при горизонтальном движении	201
4.2.9.1. Численное решение задачи горизонтального движения	202
4.2.9.2. Получение последовательности, сводящейся к «первому	
замечательному пределу»	203
4.2.9.3. Аналитическое решение задачи движения лодки	206
4.2.10. Моделирование затухающих колебаний маятника	208
4.2.11. Возможные направления исследовательских работ	211
Заключение	213
Литература	214

Научное издание

Рыжиков Сергей Борисович

РАЗВИТИЕ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИХ КОМПЕТЕНЦИЙ ШКОЛЬНИКОВ ПРИ ВЫПОЛНЕНИИ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИХ РАБОТ ПО ФИЗИКЕ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Лицензия № 003101 от 29 сентября 2000 г. Федеративный комитет «Школа Будущего» 105 318, Москва, ул. Ткацкая, д. 19.

Подписано к печати 14.05.2012

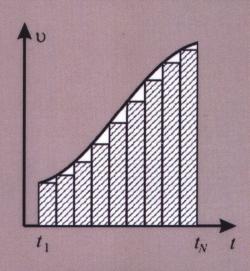
Типография ООО «Принт Он-Лайн» 109189, Москва, ул. Николоямская, д. 1 Телефон (495) 979-53-41

Тираж 1000 экз. Объем – 14,5 п. л.



Рыжиков С. Б.

Развитие исследовательских компетенций школьников при выполнении исследовательских работ по физике с использованием численного моделирования





Рыжиков Сергей Борисович

Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры общей физики физического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова, директор Вечерней физической школы при МГУ, секретарь оргкомитета Московской городской олимпиады по физике.