

УДК 530.1
ББК 22.311
Р93

Рыжиков С. Б.

Р93 Классический опыт Галилея в век цифровой техники: численное моделирование и лабораторный эксперимент. Учебное пособие. — М.: МЦНМО, 2008. — 64 с.: ил.

ISBN 978–5–94057–386–9

Книга является учебным пособием для проведения проектно-исследовательских работ школьников. Первая часть книги — введение в численные методы. В ней рассказывается, как с помощью несложных компьютерных программ можно решать весьма сложные задачи по физике. Вторая часть книги посвящена методике экспериментов для проверки полученных численных расчётов. Эксперименты не требуют специального оборудования, используют стандартную цифровую камеру и могут быть легко воспроизведены школьниками самостоятельно. Чтение книги не требует знаний, выходящих за рамки школьной программы.

Книга адресована старшеклассникам, интересующимся физикой, а также учителям физики, проводящим внеклассные проектно-исследовательские работы с учениками.

ББК 22.311

Рецензенты:

проф. С. П. Вятчанин (физический факультет МГУ им. М. В. Ломоносова)
проф. Н. В. Шаронова (кафедра теории и методики обучения физике МПГУ)

Рыжиков Сергей Борисович

**Классический опыт Галилея в век цифровой техники:
численное моделирование и лабораторный эксперимент.**

Технический редактор *Кулыгин А. К.*

Иллюстрации: *Габбасов С. М., Рыжикова Ю. В.*

Издательство Московского центра непрерывного математического образования.

119002, Москва, Большой Власьевский переулок, дом 11.

Тел. (7–495)241–74–83, (7–495)241–12–37. <http://www.mccme.ru>

Подписано к печати 19.05.2008. Формат 60×90 ¹/₁₆.

Печать офсетная. Объём 4 печ. л. Заказ . Тираж 1000 экз.

© Рыжиков С. Б., 2008.

© Московский центр

непрерывного математического

образования, 2008. (Оригинал- макет.)

ISBN 978–5–94057–386–9

С. Б. Рыжиков

**Классический опыт Галилея
в век цифровой техники:
численное моделирование и
лабораторный эксперимент**

Москва

Издательство МЦНМО

2008

Введение

*Я слышу и забываю.
Я вижу и забываю.
Я делаю и постигаю.
(Китайская пословица)*

В один прекрасный день 1590 года по старинному итальянскому городу Пиза пронёсся слух, что известный профессор Галилео Галилей обещал в полдень прыгнуть со знаменитой Пизанской башни. Посмотреть на такое чудо собралась изрядная толпа: студенты, профессора и просто зеваки. В назначенный час Галилей действительно появился на башне, но прыгать с неё не стал, а объявил, что собрал всех здесь, чтобы публично произвести опыт, ниспровергающий учение Аристотеля о законах движения тел. Аристотель утверждал, что скорость падения тела тем больше, чем оно тяжелее. Галилей пришёл к выводу, что все тела падают одинаково быстро. Учение Аристотеля господствовало к тому моменту почти две тысячи лет, и объявить о его ошибочности было в то время неслыханной дерзостью. Для подтверждения своей правоты Галилей в присутствии собравшейся толпы одновременно бросил с башни тяжёлое пушечное ядро и лёгкую мушкетную пулю. Пизанская башня уже тогда была сильно наклонена, поэтому можно было не беспокоиться, что стены могут помешать падению. Зрители на площади с замиранием смотрели на полёт тел, некоторые даже приникли к земле, чтобы точнее уловить момент удара. «Одновременно, Галилей прав!» — кричали одни. «Нет, ядро всё же упало раньше!» — кричали другие. . .

Оставим спорящих на площади людей. История о бросании Галилеем тел с Пизанской башни дошла до нас в нескольких противоречивых вариантах, некоторые историки даже полагают, что это — лишь красивая легенда, впоследствии придуманная учениками Галилея [1–6]. Давайте попробуем посмотреть на этот эпизод с высоты наших современных знаний: а чем должен был закончиться эксперимент? Мы знаем, что в вакууме все тела падают одинаково¹ с ускорением свободного падения g .

Но ядро и пуля падали в воздухе. Одновременно ли они упадут с Пизанской башни, и если нет, то что упадёт быстрее и насколько быстрее?

¹Здесь мы пренебрежём незначительными эффектами, связанными с вращением Земли, и будем считать Землю инерциальной системой отсчёта

К сожалению, падение тела в вязкой среде (жидкости или газе) описывается дифференциальным уравнением, решение которого выходит за рамки школьной программы, поэтому задачу о полёте ядра и пули школьными методами *аналитически*, т. е. путём преобразования формул, решить нельзя. Однако это не значит, что задача неразрешима вовсе. В книге будет показано, как рассчитать время падения тел с Пизанской башни с помощью *численных методов*, т. е. методов, не дающих общей формулы, но позволяющих получить численный ответ.

Для решения задач на силу трения и более широкого круга задач повышенной сложности мы предлагаем читателю овладеть достаточно мощным вычислительным инструментом. В настоящей книге мы познакомимся с простейшим численным методом, проведём расчёты и проанализируем их. Для этого желательно владеть основами любого языка программирования: Basic, Pascal и т.п. Однако даже это не обязательно, в книге рассказано, как написать процедуру численного расчёта за несколько минут, используя стандартные возможности электронной таблицы MS Excel или её аналога в Open Office. Следует заметить, что книга будет полезной, если читатели не просто примут на веру проведённые расчёты, а воспроизведут описанные в книге программы (а ещё лучше напишут по образцу и подобию) и сделают вычисления сами.

Как следует из названия, в книге будет рассмотрен классический опыт Галилея, который упоминается почти во всех учебниках физики (но мало где анализируется). При этом мы подробно обсудим проблему движения тела в вязкой среде. Мы постараемся решить три задачи:

- медленное падение (движение шариков в глицерине);
- быстрое падение (движение шариков в воздухе);
- движение по баллистическим траекториям (полёт шариков, брошенных под углом к горизонту).

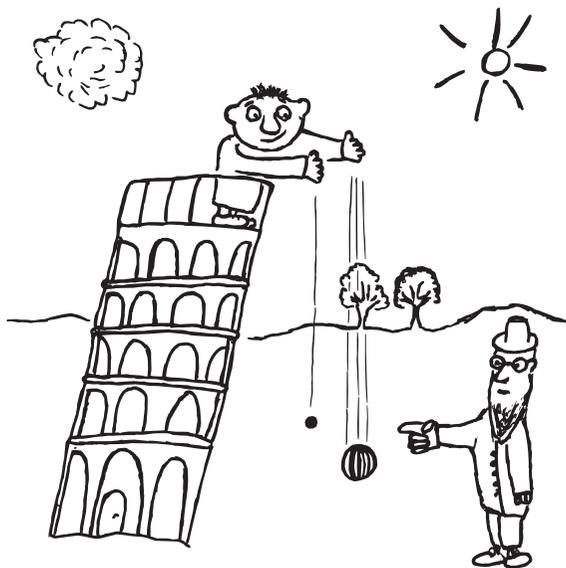
Эти задачи приведены в качестве примеров, численные методы позволяют решать гораздо больший круг задач, в том числе задачи, которые в аналитическом виде не решаются вовсе.

Следует иметь в виду, что аналитически удаётся решить довольно узкий круг физических задач, и в вузе, после того как будут изучены простейшие дифференциальные уравнения, студентам говорят: более сложные уравнения в аналитическом виде решить нельзя, надо переходить к численным методам. При этом обычно численные методы изучают на старших курсах. Так нужно ли откладывать до старших курсов то, что можно освоить и использовать уже в школе?

Однако проведённые численные расчёты могут не удовлетворить пытливые умы. Ведь все уже привыкли, что нарисовать на экране

компьютера можно всё что угодно. Имеет ли полученное численным методом решение отношение к реальному миру? Без ответа на этот вопрос проведённые расчёты останутся только красивыми картинками на мониторе. Поэтому задачи подобраны так, чтобы расчёты несложно было *проверить на опыте*. Конечно, мы не предлагаем бросать ядра с высоты Пизанской башни (55 м), нам будет достаточно стремянки высотой три метра. Для проведения экспериментов не потребуется специального оборудования, мы будем следить за движением тел с помощью обычной цифровой камеры. Методика экспериментов описана во второй части книги достаточно подробно, так что каждый читатель сможет провести их самостоятельно.

Большая часть приведённых экспериментальных результатов и численных расчётов была получена школьниками 9 — 10 классов под руководством автора в рамках работы Вечерней физической школы при физическом факультете Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова.



Часть 1.

Компьютерное моделирование движения тел

1. Схема Эйлера

Знакомство со схемой Эйлера

Схема Эйлера — один из простейших численных методов. Она позволяет вычислить координаты тела при неравномерном движении, если известны уравнения, описывающие изменения скорости и ускорения².

Для начала рассмотрим движение по прямой. Направим вдоль неё ось OX . Пусть для некоторого тела известна зависимость проекции скорости от времени: $v_x = v_x(t)$. Необходимо найти зависимость координаты от времени $x = x(t)$.

Поскольку мы рассматриваем движение вдоль одной прямой, то далее для простоты индекс « x » будем опускать, не забывая, что речь идёт о проекции вектора скорости на ось OX .

Пусть также известны начальные условия: в момент времени t_1 координата тела равняется $x_1 = x(t_1)$, а скорость $v_1 = v(t_1)$.

Разобьём время движения на равные малые интервалы времени Δt . Суть схемы Эйлера заключается в том, чтобы движение в течение малого интервала времени Δt считать равномерным. Тогда за время Δt тело переместится на $\Delta x_1 = v_1 \Delta t$. Координата тела в момент времени $t_2 = t_1 + \Delta t$ станет равна:

$$x_2 = x(t_2) = x_1 + \Delta x_1 = x_1 + v_1 \Delta t. \quad (1)$$

Найдём теперь $x(t_3)$, где $t_3 = t_2 + \Delta t$. Применим процедуру вычисления ещё раз, учтя, что скорость тела в момент t_2 уже будет равна $v_2 = v(t_2)$:

$$x_3 = x(t_3) = x_2 + v_2 \Delta t = x_1 + v_1 \Delta t + v_2 \Delta t. \quad (2)$$

Повторив эту процедуру N раз, мы найдём координаты тела в каждом момент времени: $x(t_1), x(t_2), x(t_3), \dots, x(t_N)$:

$$\begin{aligned} x_N = x(t_N) &= x_{N-1} + v_{N-1} \Delta t = x_{N-2} + v_{N-2} \Delta t + v_{N-1} \Delta t = \\ &= x_1 + v_1 \Delta t + v_2 \Delta t + v_3 \Delta t + \dots + v_{N-2} \Delta t + v_{N-1} \Delta t. \end{aligned} \quad (3)$$

²Многие приводимые в гл. 1–3 рассуждения можно было бы сократить. Но мы умышленно нигде не упоминаем слово «интеграл», которое многим школьникам либо не знакомо вовсе, либо вызывает страх.

Таким образом, разбив время движения на множество малых интервалов, и приняв, что на каждом из них скорость является постоянной, мы сумели вычислить перемещение тела.

Графическая интерпретация схемы Эйлера

На рисунке 1.1 представлено графическое пояснение схемы Эйлера. Площадь каждого заштрихованного прямоугольника равна $v_k \Delta t$, т. е. равна изменению координаты тела, вычисленного по схеме Эйлера, за промежуток времени Δt . Сумма площадей всех прямоугольников, таким образом, равна изменению координаты тела Δx_N за время $t_N - t_1$. Если бы можно было устремить Δt к нулю, то мы получили бы *точное* значение изменения координаты, равное площади под кривой зависимости скорости от времени. Но устремить Δt к нулю можно только теоретически³, поэтому численное решение *всегда* приближённое⁴.

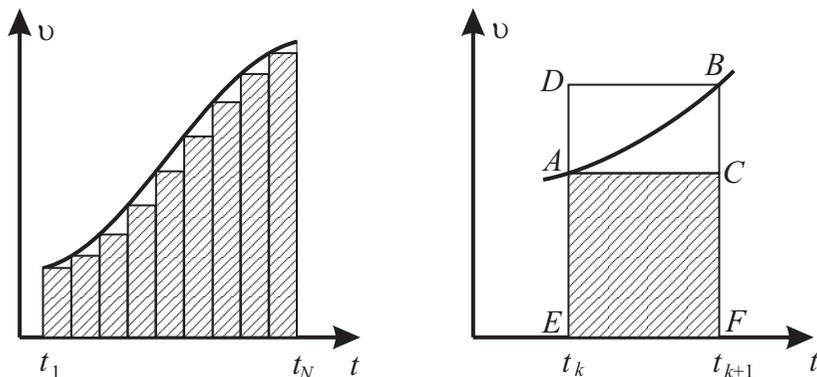


Рис. 1.1. Схема Эйлера

Малость Δt ограничена по крайней мере точностью вычислений компьютера. Если, к примеру, точность вычислений составляет четырнадцать значащих цифр, то относительная ошибка арифметической операции будет порядка 10^{-14} , т. е. если значение $\Delta x_k = v_k \Delta t$ более чем

³Точный расчёт площади под кривой осуществляется интегрированием.

⁴Заметим, что при различных значениях Δt численное решение может давать как заниженный или завышенный, так и (при «удачном» подборе значения Δt) «абсолютно точный» результат (совпадающий с точным теоретическим расчётом или результатами проведённого эксперимента). Однако было бы неверным считать действительно абсолютно точными полученные таким образом результаты.

в 10^{-14} раз меньше предыдущей суммы, то машина вместо Δx_k просто прибавит ноль. В современных языках программирования можно задавать числа с большим количеством значащих цифр, но всё равно точность вычислений ограничена.

На практике более существенным фактором, ограничивающим точность вычислений, является время работы программы. Ведь если мы разобьём временной интервал на 10^{14} отрезков, то нам придётся вычислить 10^{14} произведений и 10^{14} сумм. Поэтому при выборе величины Δt нужно принять некоторый компромисс, чтобы с одной стороны получить желаемую точность, с другой — разумное время вычислений. Поэтому начнём с того, что оценим, как точность вычислений по схеме Эйлера зависит от Δt .

Оценка погрешности схемы Эйлера

Неточность определения перемещения Δx_k по схеме Эйлера заключается в том, что мы считаем скорость в течение каждого промежутка Δt постоянной, хотя в действительности она меняется. Оценим погрешность вычисления Δx_k (рис. 1.1, справа). За время Δt тело пройдёт путь равный площади под кривой AB (т. е. площадь фигуры $ABFE$). Вычисления по схеме Эйлера дадут значение пути, равное площади прямоугольника $ACFE$. Очевидно, что разность площадей фигуры $ABFE$ и прямоугольника $ACFE$ меньше площади прямоугольника $ADBC$, равной произведению $|v_{k+1} - v_k| \Delta t$ (разность скоростей берётся по модулю, поскольку v_{k+1} может быть как больше, так и меньше v_k , а погрешность всегда положительна). Таким образом, разница между истинным путём, пройденным телом за время Δt , и вычисленным по схеме Эйлера меньше, чем $|v_{k+1} - v_k| \Delta t$. Оценим максимальную суммарную погрешность измеренного пути ΔL :

$$\Delta L \leq |v_2 - v_1| \Delta t + |v_3 - v_2| \Delta t + \dots + |v_N - v_{N-1}| \Delta t \leq \Delta v \cdot (N-1) \cdot \Delta t = \Delta v \cdot t,$$

где Δv — максимальное значение всех $|v_k - v_{k-1}|$, t — полное время движения тела. Выразим Δv через ускорение: $\Delta v = a_{\max} \Delta t$, где a_{\max} — модуль максимального ускорения тела за время движения. Окончательно имеем:

$$\Delta L \leq a_{\max} \cdot \Delta t \cdot t. \quad (4)$$

Из (4) видно, что чем меньше промежуток времени Δt , тем точнее будет решение. Запомним полученный результат, и вернёмся к нему в

экспериментальной части, где подробнее обсудим вопрос о необходимой и излишней точности вычислений⁵.

2. Схема Эйлера при изменяющемся ускорении

Пусть теперь нам известен закон изменения не скорости, а ускорения. Как мы увидим чуть ниже, при решении задачи падения тел в вязкой среде нам будет известна зависимость ускорения от скорости: $a = a(v)$. Будем по-прежнему рассматривать движение вдоль прямой. Пусть известны начальные условия в момент времени t_1 : $x_1 = x(t_1)$, $v_1 = v(t_1)$, $a_1 = a(v_1)$. Найдём скорость и координату в момент времени $t_2 = t_1 + \Delta t$.

Будем считать, что за малый промежуток Δt ускорение меняется незначительно. Запишем изменение скорости при равноускоренном движении аналогично (1):

$$v_2 = v(t_2) = v_1 + a_1 \Delta t \quad (5)$$

Найдём значение координаты x_2 как в (1):

$$x_2 = x(t_2) = x_1 + v_1 \Delta t \quad (6)$$

Теперь, зная координату и скорость в момент времени t_2 , можно определить $a_2 = a(v_2)$ и вычислить скорость и координату в момент времени t_3 :

$$v_3 = v(t_3) = v_2 + a_2 \Delta t = v_1 + a_1 \Delta t + a_2 \Delta t, \quad (7)$$

$$x_3 = x(t_3) = x_2 + v_2 \Delta t = x_1 + v_1 \Delta t + v_2 \Delta t. \quad (8)$$

В общем виде: зная координату, скорость и ускорение в момент времени t_{N-1} , мы можем найти координату и скорость в момент времени t_N .

$$v_N = v(t_N) = v_{N-1} + a_{N-1} \Delta t, \quad (9)$$

$$x_N = x(t_N) = x_{N-1} + v_{N-1} \Delta t. \quad (10)$$

Подробнее о численных методах можно прочитать в [7–8]. Теперь, изучив схему Эйлера в общем виде, перейдём к решению задач о падении тел в вязкой среде.

⁵Видно, что погрешность была бы меньше, если бы мы в качестве длины пути вместо площади прямоугольника $ACFE$ брали площадь трапеции $ABFE$. Однако в этом случае несколько усложняется процедура расчёта. Сейчас мы рассматриваем не самую точную, а самую простую схему.

3. Схема Эйлера для расчёта падения тела в вязкой среде

Применим схему Эйлера для описания движения тела с учётом вязкого трения. Задачу будем решать в обычных модельных предположениях: Земля — инерциальная система отчёта (т. е. пренебрежём её вращением), ускорение свободного падения не зависит от высоты (т. е. высота падения много меньше радиуса Земли).

Запишем второй закон Ньютона

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{F}_{\text{трения}}. \quad (11)$$

Значение силы трения при движении тела в жидкости или газе можно вычислить по формуле:

$$F_{\text{трения}} = \alpha v + \beta v^2, \quad (12)$$

где α и β — коэффициенты, зависящие от размеров и формы тела. В идеале они не должны зависеть от скорости. Ниже мы рассмотрим вопрос о том, как определить значения этих коэффициентов. Сила вязкого трения всегда направлена против движения тела, поэтому запишем уравнение (12) с учётом направления скорости:

$$\vec{F}_{\text{трения}} = -\alpha\vec{v} - \beta\vec{v}|\vec{v}|. \quad (13)$$

Здесь следует остановиться и особо подчеркнуть, что записать « $\beta\vec{v}^2$ » было бы ошибкой. Слева в формуле стоит векторная величина, значит, справа тоже должна быть векторная величина. Но, возведя вектор скорости в квадрат, мы получим скалярную величину. Чтобы записать уравнение в векторном виде, надо вектор скорости умножить на скалярную величину — модуль скорости.

При малых скоростях основной вклад вносит первый линейный член. Для начала ограничимся им, а затем рассмотрим общий случай.

Поскольку движение одномерное, то вместо векторов в уравнении (11) запишем их проекции на вертикальную ось OY , разделим обе части на массу и получим:

$$a = -g - \frac{\alpha}{m}v. \quad (14)$$

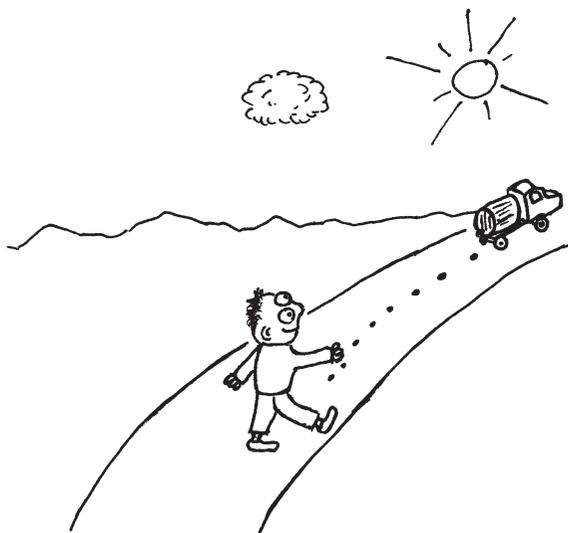
Обратим внимание, что ось OY мы направили вверх, поэтому проекция ускорения свободного падения отрицательна.

Подставим выражение для ускорения в формулу (9):

$$v_N = v_{N-1} + a_{N-1}\Delta t = v_{N-1} + \left(-g - \frac{\alpha}{m}v_{N-1}\right)\Delta t \quad (15)$$

Если в задаче требуется вычислить путь, пройденный телом за заданный промежуток времени, то описанной схеме уже достаточно. Если же надо найти время падения тела с указанной высоты, то возникает ещё одна проблема. Понятно, что вычисленное на компьютере значение координаты скорее всего никогда не будет в точности равно нулю, возникнет ситуация, когда на каком-то N -ом шаге координата будет ещё положительной, а на следующем $(N + 1)$ -ом шаге уже станет отрицательной. Какой интервал времени принять за время полёта — N -ый или $(N + 1)$ -ый? Поскольку численный метод даёт приближённое решение, то наша точность вычисления времени не может превысить величину шага по времени Δt , поэтому можно принять, что время падения равно $\Delta t \cdot N$ или $\Delta t \cdot (N + 1)$ или $\Delta t \cdot N + (\Delta t/2)$. Все числа окажутся в рамках указанной точности. Для определённости будем за время полёта принимать $\Delta t \cdot N$.

На этом этап создания физической модели закончен. Мы сделали модельное предположение, что сила трения линейно возрастает с увеличением скорости, применили физический закон, выражающий зависимость ускорения от скорости, получили набор уравнений, теперь осталось только вычислить значения скоростей и координат.



4. Составление ядра программы

Компьютер глуп.

Умным должен быть программист.

(На лекции по программированию)

Выразим полученный алгоритм на компьютерном языке. Независимо от языка программирования, блок-схема простейшей программы должна выглядеть примерно так.

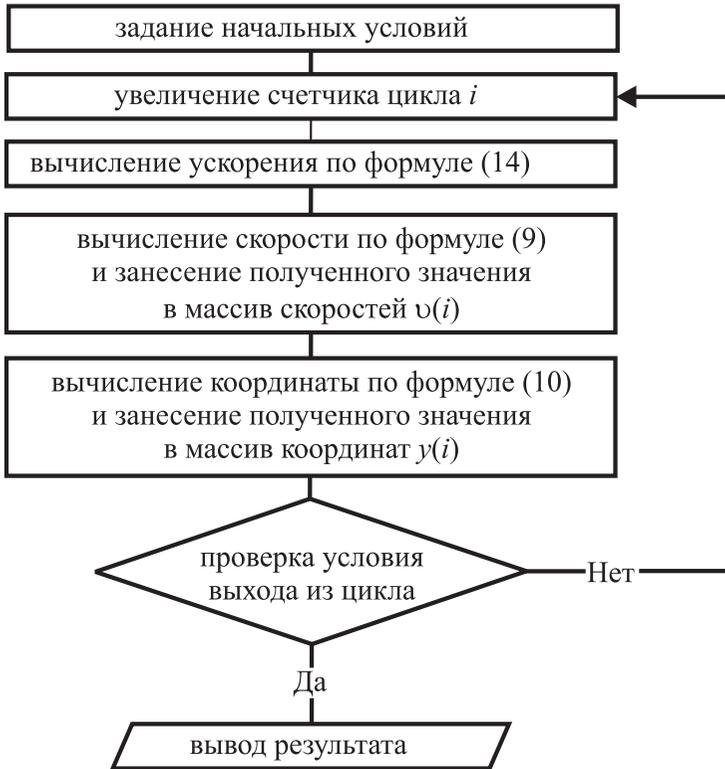


Рис. 4.1. Блок-схема простейшей программы.

Пояснения:

— поскольку речь идёт о вертикальном движении тела, обозначим вертикальную ось Y и массив координат $y(i)$;

— задание начальных условий — задаются высота падения $y(0)$, скорость в начальный момент времени, ускорение свободного падения g , коэффициент трения α и масса m (для расчётов нужно знать отношение α/m);

— условием выхода из цикла может быть прохождение заданного числа циклов (если мы решаем задачу полёта тела за заданное время), достижение телом определённой координаты (например, поверхности земли), достижение максимального номера элемента массива. Могут быть и другие условия, например, если в задаче спрашивается, за какое время тело достигнет определённой скорости, то условием выхода из цикла будет достижение указанной скорости.

Для примера реализуем этот алгоритм на простейшем компьютерном языке Visual Basic.

Шаг 1. Запустим программу Visual Basic. Создадим на форме элемент «командную кнопку» (Command Button). Её имя по умолчанию будет Command1. Щёлкнем по ней два раза — откроется окно кода. Занесём в него одну команду Call Calculator, как показано ниже.

```
Private Sub Command1_Click()  
Call Calculator  
End Sub
```

Шаг 2. Добавим в проект модуль из главного меню: «Project — Add Module». В модуль занесём текст программы, реализующий описанный выше алгоритм.

Введём массивы⁶ координат $Y(i)$ и скоростей $V(i)$. Лучше пользоваться переменными двойной точности. Обозначим массу — $mass$, ускорение свободного падения — g , ускорение тела — A , коэффициент трения — $Friction$, интервал времени — dt , число элементов массивов скоростей и координат — $DimArray$. Зададим начальные значения $Y(0)$, $V(0)$. Величины будем задавать в единицах СИ. Затем запишем уравнения для определения ускорения (14), скорости (9) и координат (10). Для вывода сообщений будем использовать форму `MsgBox`.

'Вариант простейшей программы расчёта падения тела
'при наличии трения воздуха на языке Visual Basic

```
Option Base 0  
Public Y() As Double, V() As Double  
Public A As Double, Friction As Double
```

⁶Если поставить задачу только получить конечные значения времени и координаты, то массивы скоростей и координат можно не вводить, но с массивами удобнее отлаживать программу и исследовать закон движения тела.

```

Public dt As Double, g As Double, mass As Double
Public Sub Calculator()
DimArray = 10000
ReDim Y(DimArray), V(DimArray)
' задание начальных условий
Y(0) = 10: V(0) = 0: g = 9.815: dt = 0.001: mass = 1: Friction = 0
' вычисление массива скоростей и координат
For i = 0 To DimArray - 2
10 A = -g - Friction * V(i) / mass
V(i + 1) = V(i) + A * dt
Y(i + 1) = Y(i) + V(i) * dt
40 If Y(i + 1) < 0 Then GoTo 50
Next i
i = MsgBox("Тело не упало на поверхность", vbOKOnly)
i = DimArray - 2
T = dt * (DimArray - 1)
GoTo 100
50 T = dt * i
100 'запись результатов в файл 1.txt
Open "1.txt" For Output As #1
For i1 = 0 To i + 1
Print #1, i1 * dt, " ", " "; Y(i1); " ", " "; V(i1)
Next i1
Print #1, "Время полёта ="; T
Close #1
i = MsgBox("Готово", vbOKOnly)
End Sub

```

Дадим пояснения к представленному тексту:

— начальные условия соответствуют падению тела без начальной скорости с высоты 10 метров, ускорение свободного падения равно $9,815 \text{ м/с}^2$ (на широте Москвы), коэффициент трения равен нулю, интервал времени 0,001 с, масса тела 1 кг, хотя в отсутствие силы трения значение массы роли не играет, разумеется, можно задать другие значения указанных параметров;

— строчка с номером 40 выражает условие выхода из цикла при падении тела на поверхность земли.

Шаг 3. Запустим программу. Появится форма с командной кнопкой. Нажмём на кнопку — через небольшое время появится сообщение о завершении счёта.

Как видно, программа очень проста, её составление занимает меньше получаса. Завершив цикл, мы получим массивы $t(i)$ и $Y(i)$, определяющие закон движения тела. Массив будет записан в файл «1.txt». Сохранённые в файле данные можно импортировать в Excel или другие электронные таблицы и построить в них графики зависимостей координаты от времени, скорости от времени и т. д.

Дальше программу можно наращивать в зависимости от уровня программиста и его эстетических запросов: создать свой графический интерфейс, предусмотреть возможность изменения начальных параметров и т. д.

5. Реализация схемы Эйлера на Excel

Для расчёта поставленной задачи по схеме Эйлера можно даже не писать программу на языке Basic или другом языке программирования, а в простейшем варианте за несколько минут написать алгоритм с помощью программы MS Excel или её аналога в Open Office.

Запустим электронную таблицу Excel. Пусть каждый столбец представляет собой массивы значений⁷:

A — время t ;

B — координата y ;

C — скорость v ;

D — ускорение a .

В ячейки A1–G1 можно занести наименования столбцов.

В ячейки E2–G2 будем заносить параметры.

Шаг 1. Занесём в ячейки E2–G2 параметры.

E2 — интервал времени Δt : 0,001;

F2 — отношение коэффициента трения к массе α/m : 0;

G2 — ускорение свободного падения g : 9,815.

Шаг 2. Занесём в ячейки A2–C2 начальные значения.

A2 — начало отчёта по времени: 0;

B2 — начальная координата $y(0)$: 10;

C2 — начальная скорость $v(0)$: 0.

Шаг 3. Занесём в ячейки формулы (формулы начинаются со знака «=»; знак \$ перед обозначением строки ячейки в формуле Excel запрещает относительное преобразование номера строки при копировании формулы из одной ячейки в другую).

⁷Для большей точности можно пометить все столбцы, зайти в меню: «Формат — Ячейки», выбрать пункт «Числовой» и в поле «Число десятичных знаков» поставить «14» или больше.

Математическая формула	Формула Excel
$t_N = t_{N-1} + \Delta t$	A3=A2+E\$2
$y_N = y_{N-1} + v_{N-1}\Delta t$	B3=B2+C2*E\$2
$v_N = v_{N-1} + a_{N-1}\Delta t$	C3=C2+D2*E\$2
$a_{N-1} = -g - \frac{\alpha}{m}v_{N-1}$	D2=-G\$2-F\$2*C2

Шаг 4. Поместим курсор в ячейку A3 и произведём операцию копирования, для чего поместим указатель мыши на правый нижний угол ячейки. Изображение курсора из стрелки превратится в знак «+». Нажмём левую кнопку мыши и, не отпуская, проведём мышью до ячейки A1500, после чего отпустим клавишу. Формула из ячейки A3 перекопируется в ячейки A4–A1500 и ячейки заполнятся значениями. Аналогично надо перекопировать формулы из ячеек B3, C3, D2 в нижележащие ячейки до строки № 1500 или дальше.

После проведённых процедур окно Excel будет выглядеть, как показано на рис. 5.1.

	A	B	C	D	E	F	G
1	t	y	v	a	Δt	α/m	g
2	0	10	0	-9,815	0,001	0	9,815
3	0,001	10	-0,00982	-9,815			
4	0,002	9,99999	-0,01963	-9,815			
5	0,003	9,999971	-0,02945	-9,815			
6	0,004	9,999941	-0,03926	-9,815			
7	0,005	9,999902	-0,04908	-9,815			
8	0,006	9,999853	-0,05889	-9,815			
9	0,007	9,999794	-0,06871	-9,815			
10	0,008	9,999725	-0,07852	-9,815			
11	0,009	9,999647	-0,08834	-9,815			
12	0,01	9,999558	-0,09815	-9,815			
1427	1,425	0,041701	-13,9864	-9,815			
1428	1,426	0,027715	-13,9962	-9,815			
1429	1,427	0,013718	-14,006	-9,815			
1430	1,428	-0,00029	-14,0158	-9,815			
1431	1,429	-0,0143	-14,0256	-9,815			
1432	1,43	-0,02833	-14,0354	-9,815			
1433	1,431	-0,04236	-14,0453	-9,815			
1434	1,432	-0,05641	-14,0551	-9,815			
1435	1,433	-0,07046	-14,0649	-9,815			
1436	1,434	-0,08453	-14,0747	-9,815			
1437	1,435	-0,0986	-14,0845	-9,815			
1438	1,436	-0,11269	-14,0943	-9,815			

Рис. 5.1. Расчёт движения с помощью Excel

Посмотрим, когда значения в столбце В (координата y) при заданных начальных условиях станут отрицательными: это произойдёт в 1430-ой строке и ниже ($B1429=0,0137$, $B1430=-0,0003$). Время полёта считаем из ячейки $A1429=1,427$ с.

Изменив содержимое ячеек В2–G2 можно вычислить время полёта при других начальных условиях. После этого, не выходя из Excel, можно построить график зависимости высоты тела от времени движения. Для построения графика в Excel нужно:

- выделить столбец «А», для чего нажать левой кнопкой мыши на букву «А» вверху столбца; затем нажать клавишу «Ctrl» и одновременно нажать левой кнопкой мыши на букву «В», при этом выделится столбец «В»;
- в верхнем меню выбрать «Вставка» — «Диаграмма»;
- выбрать тип диаграммы: «точечная», «только линии без маркеров»;
- можно принять остальные параметры по умолчанию.

На экране появится график (диаграмма), как показано на рис. 5.2. Подробнее о построении графиков можно прочитать в учебнике по Excel или справочной системе программы.

Естественно, что полученный результат не зависит от того, при помощи какой программой он был рассчитан. Обе описанные выше процедуры дают одинаковый результат.

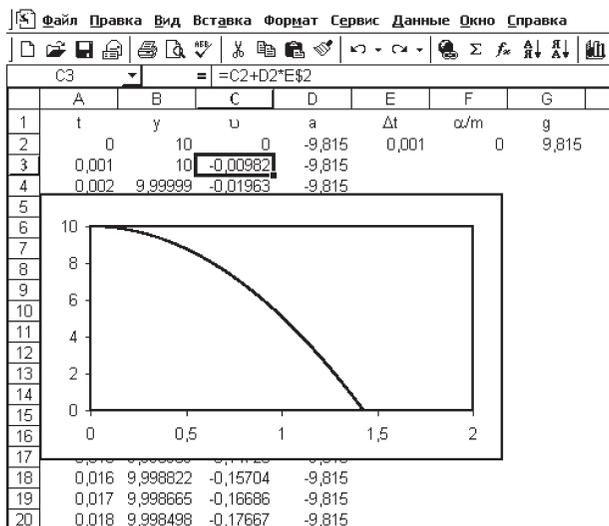


Рис. 5.2. Построение графика зависимости высоты от времени в Excel

6. Вычисление времени падения в отсутствие силы трения

Физик отличается от математика тем, что сразу начинает решать задачу. Математик же сначала доказывает, что задача имеет решение, затем, что решение единственно, и только после этого приступает собственно к поиску решения.

(На лекции по теоретической физике)

После того как программа написана, следует проверить правильность её работы. Прежде всего, исследуем полученный алгоритм на *сходимость*, т. е. посмотрим, как решение зависит от значения интервала Δt . Кроме того, интересно сравнить результат, полученный численным методом, с точным аналитическим решением.

Поэтому для начала рассмотрим падение тела в отсутствие силы трения. Эту задачу мы можем решить аналитически, т. е. найти формулы, выражающие зависимость пути от времени, скорости от времени и т. д. Из школьного курса физики известно, что при падении тела с высоты h_0 время падения тела и его скорость равны соответственно:

$$t = \sqrt{2h_0/g}, \quad v = \sqrt{2gh_0}. \quad (16)$$

Рассчитаем с помощью написанной программы время полёта тела, задав коэффициент трения равным нулю и меняя значения интервала времени Δt . Затем сравним вычисленные значения с теоретическими, т. е. полученными по формулам (16). Результаты расчёта занесены в таблицу 6.1.

Таблица 6.1. Сравнение теоретического значения времени падения тела в отсутствие силы трения и значения, вычисленного по схеме Эйлера; высота падения $h_0 = 10$ м, ускорение свободного падения $g = 9,815$ м/с².

Интервал времени, Δt (с)	Вычисленное время падения, t (с)	Вычисленная скорость в момент падения, v (м/с)
0,1	1,4	14
0,01	1,43	14,0
0,001	1,427	14,01
0,0001	1,4275	14,011
теоретическое	1,42748	14,0107

Расчёт по формуле (16) даёт время падения тела с высоты $h_0 = 10$ м, равное $t = 1,42748$ с. Вычисления с помощью описанной выше программы или Excel приводят к такому же результату с точностью Δt . Также совпадают теоретические и вычисленные по схеме Эйлера значения скорости в момент падения, причём точность тем выше, чем меньше Δt . Следовательно, вычисления по схеме Эйлера правильны. Если построить графики зависимости пройденного пути от времени при различных Δt , то они практически сольются.

Возникает вопрос: на какой степени точности нам надо остановиться? Полученный результат нас интересует не абстрактно, а в силу возможности подтвердить или опровергнуть его экспериментальным путём. Значит, всё зависит от того, с какой точностью мы планируем провести эксперимент. Если мы можем измерить время с точностью до 0,1 с (секундомером), то нет смысла узнавать время падения точнее 0,1 с. Если воспользоваться электронным секундомером, можно измерить время с точностью 0,001 с, значит, и вычисления имеет смысл делать с такой же точностью. Кроме точности измерения времени надо учесть точность измерения начальной скорости и координаты (высоты падения) и т. д. Поскольку для расчёта описываемых ниже экспериментов нам не потребуется точность лучше 0,001 с, то дальнейшие вычисления будем проводить при $\Delta t = 0,001$ с.

7. Вычисление времени падения в случае линейной силы трения

Однажды биолог, физик и математик путешествовали по Австралии и увидели на поле чёрную овцу.

— Смотрите, сказал биолог, в Австралии есть чёрные овцы.

— Нет, ответил физик, пока мы можем сказать, что в Австралии есть по крайней мере одна чёрная овца.

— Нет, возразил математик, пока мы можем сказать, что в Австралии есть по крайней мере одна овца, чёрная по крайней мере с одной стороны.

(Из студенческого юмора)

Не удовлетворимся проверкой правильности работы программы только в отсутствие силы трения и продолжим её проверку при наличии силы трения. Решим задачу падения тела в вязкой среде с помощью схемы Эйлера и сравним полученный результат с теоретическим.

К сожалению, школьными методами эта задача аналитически не решается, поэтому придётся принять формулу без вывода (см. например [9]). Изменение координаты и скорости падающего без начальной скорости тела в случае линейной силы трения описывается формулами⁸:

$$v = \frac{g}{\gamma} (1 - \exp(-\gamma t)); \quad h = h_0 - \frac{g}{\gamma^2} (-1 + \gamma t + \exp(-\gamma t)), \quad (17)$$

где $\gamma = \frac{\alpha}{m}$. Формулы (17) не позволяют определить время полёта при падении тела с заданной высоты h_0 . Поэтому, чтобы сравнить теоретическое и численное решение, поступим следующим образом: выберем некоторое значение времени и сравним пройденное телом расстояние, вычисленное численным методом, с расстоянием, полученным по формуле (17).

Также, как и в прошлой задаче, положим $h_0 = 10$ м, $g = 9,815$ м/с². Посмотрим, на какой высоте h окажется тело через одну секунду. Коэффициент трения будем менять от 0 до $\alpha/m = 10$ с⁻¹. Полученные результаты занесём в таблицу 7.1.

Таблица 7.1. Сравнение значений координаты тела при его падении в случае линейной силы трения, вычисленных аналитически и по схеме Эйлера.

Отношение коэффициента трения к массе тела α/m (с ⁻¹)	Координата тела, рассчитанная по схеме Эйлера h (м)	Теоретическое значение координаты тела h (м)
0,0001	5,098	5,093
0,001	5,099	5,094
0,01	5,114	5,109
0,1	5,256	5,252
1	6,388	6,389
10	9,116	9,117

Из таблицы видно, что во всех случаях разница между численным и теоретическим результатом не превосходит 1 см, что укладывается в величину погрешности, вычисленной по формуле (4): $\Delta L = 9,8 \cdot 1 \cdot 0,001 < 0,01$ м.

⁸Функция «exp» обозначает степень числа e , $\exp(x) = e^x$; число e наряду с числом π является важнейшей математической константой и примерно равно $e = 2,71828 \dots$. Функция «exp» есть в любом языке программирования, поэтому расчёты можно проверить, вычислив значения скорости и координат на компьютере, не вдаваясь в анализ, почему выбрано именно такое число.

Таким образом, мы убедились, что и при наличии силы трения схема Эйлера даёт правильный результат в рамках указанной точности. Читатели могут самостоятельно провести расчёты для других начальных условий.

Рассмотрим графики зависимости скорости тела от времени при различных коэффициентах трения (рис. 7.1). При $\alpha/m = 0,01 \text{ с}^{-1}$ график практически не отличается от прямой линии, т. е. не отличается от графика равноускоренного движения тела. При меньших значениях α/m графики практически сливаются в одну линию. При увеличении α/m до 10 с^{-1} зависимость приобретает существенно иной характер. Видно, что скорость тела достигает некоторого значения (асимптоты), и далее скорость тела практически не меняется, т. е. тело падает с постоянной скоростью. Это значение называют *установившейся скоростью* падения тела.

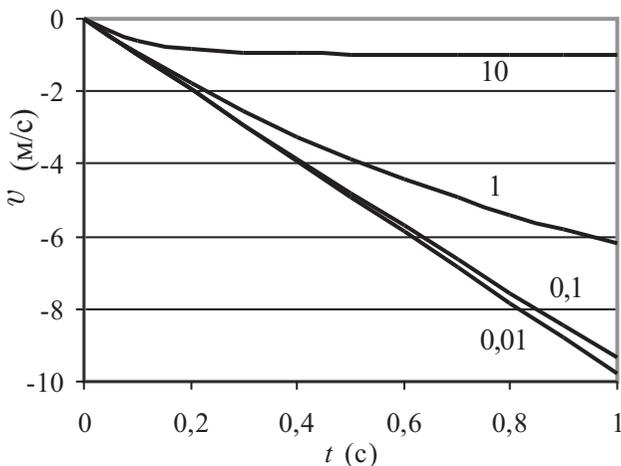


Рис. 7.1. Зависимость скорости от времени при различных коэффициентах трения; цифрами у кривых указаны значения $\alpha/m \text{ (с}^{-1}\text{)}$.

Установившуюся скорость нетрудно вычислить. При равномерном движении ускорение равно нулю. Запишем II закон Ньютона:

$$mg - \alpha v_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad v_0 = \frac{mg}{\alpha}. \quad (18)$$

Строго говоря, скорость падающего тела будет сколь угодно долго стремиться к асимптоте, так же как экспонента ($y = \exp(-x)$) или

гипербола ($y = 1/x$) сколь угодно долго стремятся к нулю и никогда его не достигают. Но, посмотрев на график, легко увидеть, что при $\alpha/m = 10 \text{ с}^{-1}$ можно с разумной точностью считать, что тело достигает установившейся скорости за 0,3 с — 0,4 с. Конечно, этот график соответствует падению тела не в воздухе, а в намного более вязкой среде, например, в глицерине. Если бы мы задали больший промежуток времени наблюдения, то мы бы обнаружили, что к асимптоте стремятся все графики.

Таким образом, мы убедились в правильности расчётов по схеме Эйлера и при наличии силы трения⁹. После того, как мы научились рассчитывать движение тела в вязкой среде методом Эйлера, можно вернуться к нашей задаче и рассчитать время падения тел с Пизанской башни. Однако для этого нам необходимо научиться вычислять значения коэффициентов α и β .

8. Ламинарное и турбулентное течения. Число Рейнольдса

В школьных учебниках о силе вязкого трения (или силе сопротивления среды) говорится мало. Обычно упоминается, что при малых скоростях сила сопротивления среды пропорциональна скорости, а при больших — квадрату скорости. Но какие скорости можно считать большими, а какие — малыми, подробно не обсуждается — ввиду сложности рассматриваемого вопроса. Поэтому остановимся на нём подробнее.

В механике рассматривают два принципиально различных типа движения тела в жидкости или газе: *ламинарное* (от латинского «lamina» — «тонкий слой»), не образующее вихри, и *турбулентное* или вихревое (от латинского «turbo» — «вихрь»).

При малых скоростях основную роль играет *вязкое трение*. Его механизм заключается в том, что при движении тела в среде, оно разгоняет прилегающий к нему тонкий слой (отсюда и название «lamina») жидкости или газа, этот слой движется со скоростью, примерно равной скорости тела. Этот слой, в свою очередь, разгоняет соседний с

⁹Для желающих проверить правильность схемы Эйлера в случае, когда сила трения пропорциональна квадрату скорости ($F = \beta v^2$), приводим без вывода формулы зависимости от времени скорости и пути при падении тела без начальной скорости:

$$v(t) = \sqrt{mg/\beta} \operatorname{th}\left(\sqrt{\beta g/m} \cdot t\right), \quad h(t) = (m/\beta) \ln \operatorname{ch}\left(\sqrt{\beta g/m} \cdot t\right),$$

где —ch и th — гиперболические косинус и тангенс соответственно:

$$\operatorname{ch}(x) = \frac{\exp(x) + \exp(-x)}{2}, \quad \operatorname{th}(x) = \frac{\exp(x) - \exp(-x)}{\exp(x) + \exp(-x)}.$$

ним слой, и, таким образом, получается последовательность слоёв, которые движутся с постепенно уменьшающимися скоростями от скорости тела до нулевой скорости около стенок или на бесконечности. Взаимное влияние слоёв и создаёт трение, пропорциональное скорости тела: $\vec{F}_{\text{трения}} = -\alpha\vec{v}$.

При увеличении скорости тела слоистая структура жидкости или газа разрушается, и образуются вихри. Тело не только разгоняет слои жидкости или газа, но и увлекает некоторое количество за собой. В этом случае принято говорить уже не о вязком трении, а о *сопротивлении среды*¹⁰, при этом сила будет пропорциональна квадрату скорости: $\vec{F}_{\text{трения}} = -\beta\vec{v}|\vec{v}|$.

Для определения характера движения тела в вязкой среде используется параметр, называемый числом Рейнольдса Re [10]:

$$Re = \frac{\rho v L}{\eta}, \quad (19)$$

где ρ — плотность среды, v — скорость тела, L — характерные размеры тела (в нашем случае — диаметр шарика), η — вязкость. Вязкость зависит от рода вещества и от температуры. Её значение можно посмотреть в таблицах физико-химических величин (см. например [11]). Для воздуха при комнатной температуре она составляет $1,8 \cdot 10^{-5}$ кг/(м·с), для воды — $0,82 \cdot 10^{-3}$ кг/(м·с), для глицерина — $2,9$ кг/(м·с).

При Re меньше 10 движение шарообразных тел можно считать ламинарным. Значение коэффициента трения, возникающего при ламинарном движении шара радиуса R , определяется формулой Стокса [10].

$$\alpha = 6\pi R\eta. \quad (20)$$

При увеличении числа Re движение приобретает турбулентный (вихревой) характер. Конечно, нельзя указать конкретное значение числа Re , при котором движение перестаёт быть ламинарным, просто с увеличением числа Re формула Стокса будет описывать движение всё менее точно. Движение тел при числах Re от 10 до 100 носит промежуточный характер, в формуле (13) необходимо учитывать оба слагаемых. При $Re > 100$ движение носит существенно турбулентный характер.

Точной формулы для описания движения тела при наличии вихрей не существует. В этом случае расчёт силы сопротивления среды основывается на учёте количества среды, увлекаемой телом при движении.

¹⁰В разных учебниках терминология может немного различаться, иногда вязкое трение также называют силой сопротивления среды. Нам важно не столько название, сколько понимание того, о каком движении идёт речь.

При числах Re от 10^2 до примерно 10^5 можно пользоваться приближённой формулой [10]:

$$F_{\text{сопротивления}} = C_x S \rho v^2 / 2, \quad (21)$$

где S — площадь сечения движущегося тела плоскостью перпендикулярной направлению движения, а C_x — коэффициент лобового сопротивления, зависящий от формы тела (обратите внимание, что сила сопротивления в этом случае уже не зависит от вязкости η). В интервале чисел Re от 10^2 до 10^5 для шара C_x можно принять примерно равным 0,5. Именно неточность этого коэффициента внесёт нам основную погрешность в последующих вычислениях. Соответственно коэффициент сопротивления воздуха β в формуле (13) равен:

$$\beta = C_x S \rho / 2. \quad (22)$$

Каким же был характер обтекания воздухом у ядра и пули при падении с Пизанской башни? Оценим (т. е. приблизительно рассчитаем) число Re в этом случае. Примем диаметр дробинок 1 см. При скорости падения 10 см/с (а такую скорость при падении она наберёт примерно за одну сотую секунды) число Re будет порядка 50, т. е. много больше 10. Следовательно, движение воздуха вокруг дробинок будет турбулентным уже через одну сотую секунду полёта.

Когда же можно наблюдать ламинарное обтекание движущихся в воздухе тел, чтобы пользоваться линейной зависимостью сопротивления воздуха от скорости? Только при движении небольших (порядка сантиметра) тел со скоростью не более сантиметра в секунду. Ещё раз подчеркнём, что ламинарное движение при числах Re меньше 10 наблюдается только у тел обтекаемой формы: шарообразной, каплеобразной или напоминающей профиль самолётного крыла. Если двигать, например, кубик, то вихри будут образовываться даже при очень маленьких скоростях.

Поскольку обычно приходится наблюдать движение тел в воздухе со скоростями больше 1 см/с, то для изучения ламинарного обтекания придётся искать другую среду. Может, подойдёт вода? Вязкость воды почти в 100 раз больше воздуха, но плотность больше плотности воздуха почти в 1000 раз, поэтому число Re в воде при той же скорости пули будет больше. Ламинарное движение можно наблюдать в более вязких жидкостях, например в глицерине, о чём пойдёт речь во второй части книги.

9. Расчёт падения тел в воздухе

В большинстве школьных задач при движении тел сопротивление воздуха не учитывается. Насколько это оправдано? Вооружившись полученными знаниями, мы сможем сделать численные оценки.

Рассчитаем время падения тел в воздухе, используя схему Эйлера. В формуле (13) надо оставить только второй, квадратичный член. Вне-сём изменения в программу на языке Visual Basic. Вместо строчки:

$$10 A = -g - \text{Friction} * V(i) / \text{mass}$$

запишем¹¹:

$$10 A = -g - \text{Friction} * V(i) * \text{ABS}(V(i)) / \text{mass}$$

При использовании Excel в ячейку D2 надо занести формулу:

Математическая формула	Формула Excel
$a_{N-1} = -g - \frac{\beta}{m} v_{N-1} \cdot v_{N-1} $	D2= -G\$2-F\$2*C2*ABS(C2)

Затем её следует откопировать в ячейки столбца D с большими номерами.

Проведём расчёт времени падения реального объекта, например, бильярдного шара. Стандартные параметры бильярдного шара: диаметр 6 см, масса 150 г. Площадь его сечения равна $\pi(3 \cdot 10^{-2})^2 = 28 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$. Тогда коэффициент β для бильярдного шара равен

$$\beta = \frac{C_x S \rho}{2} = \frac{0,5 \cdot 28 \cdot 10^{-4} \cdot 1,3}{2} = 9,1 \cdot 10^{-4} \text{ кг/м.}$$

Отношение β/m составит $9,1 \cdot 10^{-4}/0,15 = 6 \cdot 10^{-3} \text{ м}^{-1}$.

Пусть шар падает с высоты 10 метров без начальной скорости. Рассчитаем время падения по схеме Эйлера. Оно составит 1,442 с. Время падения без учёта сопротивления воздуха составит 1,427 с. Разница невелика — около сотой доли секунды! Поэтому в большинстве задач сопротивлением воздуха обоснованно пренебрегают. Найдём силу сопротивления воздуха в нижней точке полёта. Скорость шара в момент падения равна 13,6 м/с. Соответственно сила сопротивления воздуха равна $\beta v^2 = 0,17 \text{ Н}$, что примерно в 10 раз меньше действующей на шар силы тяжести (1,47 Н).

¹¹Для большей общности можно ввести два коэффициента силы трения: линейный и квадратичный. Тогда соответствующая строчка в программе запишется: A = -g - FrictionLine * V(i) / mass - FrictionSquare * V(i) * ABS(V(i)) / mass

Однако сопротивление малó только при падении с небольшой высоты, пока шар ещё не успел набрать большúю скорость. Если бросить шар с высоты 100 метров, то сила сопротивления воздуха в момент падения будет составлять уже примерно половину от силы тяжести, а разница между временем падения в воздухе и в вакууме составит 0,5 с (см. таблицу 9.1), т. е. уже вполне заметную величину.

Таблица 9.1. Параметры полёта шарика.

Высота падения (м)	β/m (м^{-1})	Время падения (с)	Скорость в момент падения (м/с)	Сила сопротивления в нижней точке (Н)	Отношение силы сопротивления к силе тяжести
10	0	1,427	14,0	—	—
10	0,006	1,442	13,6	0,17	0,11
100	0	4,514	44,3	—	—
100	0,006	4,976	33,8	1,04	0,7

С увеличением скорости сопротивление воздуха быстро возрастает. Оценим силу сопротивления воздуха при выстреле из пневматической винтовки в тире. Скорость пули составляет примерно 100 м/с, масса пули типа «Диablo» равна 0,224 г, диаметр — 4,5 мм. Хотя форма пули не строго сферическая, будем для оценки считать коэффициент C_x равным 0,5. Тогда сила сопротивления равна

$$F = \frac{C_x S \rho v^2}{2} = \frac{0,5 \cdot 3,14 \cdot (4,5 \cdot 10^{-3}/2)^2 \cdot 1,3 \cdot 100^2}{2} \approx 0,05 \text{ Н},$$

а сила тяжести $mg = 0,224 \cdot 10^{-3} \cdot 9,8 \approx 0,002 \text{ Н}$. Таким образом, сила сопротивления воздуха в 25 раз превышает силу тяжести! В этих условиях пренебречь сопротивлением воздуха уже нельзя.

10. Анализ классического опыта Галилея

Вернёмся теперь на площадь перед Пизанской башней и проанализируем этот эпизод с учётом наших знаний о сопротивлении воздуха. Высота Пизанской башни хорошо известна — 55 метров. Скорее всего, Галилей бросал ядро не с самого верха, а с одной из галерей, но для оценки это не существенно. Каковы были параметры ядра и мушкетерной пули?

Эпизод, связанный с падением двух тел с большой высоты, упоминается в работе Галилея 1638 г. «Беседы и математические доказательства, касающиеся двух новых отраслей науки, относящихся к механике

и местному движению.» Галилей написал этот труд не от первого лица, а в виде беседы трёх лиц: Симпличио выражает мнение Аристотеля, Сальвиати — противоположное (т. е. Галилея), а Сагрето — слушатель, стремящийся познать истину, хотя он не принимает явно чью-либо сторону в споре, но симпатизирует Сальвиати. На чьей стороне автор, из текста не видно, так что читатель сам может выбрать, чьи аргументы ему больше нравятся — последователя Аристотеля или его противника.

Высказывание новых идей в форме диалогов применялось учёными мужами со времён Платона (IV век до н. э.). Поскольку взгляды Галилея противоречили господствовавшему учению Аристотеля, принимавшемуся Церковью, то, чтобы избежать открытого противостояния, Галилей решил также прибегнуть к этому жанру.

В ходе первого дня беседы Сагрето говорит: «Но я, синьор Симпличио, не производивший никаких опытов, уверяю вас, что пушечное ядро весом в сто, двести и более фунтов не опередит и на одну пядь мушкетной пули весом меньше полунфунта при падении на землю с высоты двухсот локтей» [2, том 2, стр. 164–165]. Здесь в тексте некоторая нелогичность — если Сагрето не проводил опыта, то почему он так уверен в его результате? Неясно, можно ли слова Сагрето считать намёком на проведённый Галилеем в Пизе опыт, но мы можем принять указанные в «Беседах...» массы тел и проанализировать упоминаемый Сагрето эксперимент.

Здесь, правда, возникает вопрос, каким фунтом пользовался Галилей? Сегодня под фунтом обычно понимают английский фунт, равный 0,4536 кг. Но, скорее всего, Галилей пользовался тройским фунтом, равным 0,3732 кг. Плотность железа — $7,9 \cdot 10^3$ кг/м³. Значит, стофунтовое ядро (37,3 кг) имеет радиус примерно 10,4 см. Радиус полунфунтовой мушкетной пули (тогда пули отливали в виде шариков) при той же плотности составит 17,8 мм. Тогда коэффициент сопротивления воздуха для ядра

$$\beta = \frac{C_x S \rho}{2} = \frac{0,5 \cdot 3,14 \cdot 0,104^2 \cdot 1,3}{2} = 11 \cdot 10^{-3} \text{ кг/м.}$$

Разделим его на массу ядра: $\beta/m_{\text{ядра}} = 0,30 \cdot 10^{-3} \text{ м}^{-1}$.

Для пули

$$\beta = \frac{C_x S \rho}{2} = \frac{0,5 \cdot 3,14 \cdot 0,0178^2 \cdot 1,3}{2} = 0,32 \cdot 10^{-3} \text{ кг/м,}$$

$$\beta/m_{\text{пули}} = 1,73 \cdot 10^{-3} \text{ м}^{-1}.$$

Найдём время полёта обоих тел. Расчёт по схеме Эйлера показывает, что ядро с высоты 55 м будет падать 3,357 с, а пуля — 3,401 с. В отсут-

ствии воздуха оба тела падали бы 3,348 с. Разность во времени падения ядра и пули составляет менее 0,05 с, стоящие на площади вполне могли счесть, что оба тела упали одновременно. Однако, поскольку скорости тел велики, расстояние между ними не так мало, как думает Сагрето. Скорость ядра в момент удара 32,6 м/с (при отсутствии воздуха скорость обоих тел в момент удара была бы 32,9 м/с), пуля к этому времени разгоняется до 31 м/с (скорость пули в момент падения — 31,3 м/с) и находится над землёй на высоте 1,4 метра, т. е. ядро опережает пулю гораздо больше, чем на одну пядь (расстояние между концами большого и указательного пальца, примерно 18–22 см), как уверял Сагрето. Не будем упрекать Сагрето (и Галилея) — измерить это расстояние без фотоаппарата, «на глазок», весьма трудно. Кроме того, достаточно сложно обеспечить одновременность старта обоих тел: кто может поручиться, что пуля не начала падать на десятую долю секунды раньше или позже ядра?

Упомянутый эксперимент, возможно, только легенда. Строго говоря, сравнение времён падения ядра и дробинок с Пизанской башне не могло опровергнуть учение Аристотеля. Аристотель сравнивал падение двух тел *одинаковых* размеров и форм. По другой версии этой легенды [3] Галилей бросал четыре шара равного диаметра: золотой, свинцовый, мраморный и восковый, причём восковый шар прилетел заметно позже, во что не сложно поверить (расчёты времён падения предлагаем читателям сделать самостоятельно). Сложнее поверить в то, что учёный с невысоким жалованием достал шар из золота. Ещё по одной версии были брошены два шара равного диаметра: чугунный и деревянный [4]. Упоминание об опыте Галилея приводится в воспоминаниях его ученика Вивиани, создавшего свой труд через много лет после смерти Галилея, поэтому некоторые историки сомневаются в том, что Галилей этот опыт вообще проводил. Сам Галилей в своих трудах не упоминает о бросании тел с башни. Он пришёл к выводу, что время падения тел не зависит от массы на основании экспериментов с движением шаров по наклонной плоскости. Однако известно, что опыты с бросанием тел были проделаны учёными в XVII веке в разных городах, в том числе учеником Галилея Винченцо Раньери с Пизанской башни [5].

Конечно, сегодня не имело бы смысла повторять опыт Галилея для опровержения канувшей в Лету теории Аристотеля, но этот опыт просто и наглядно демонстрирует наличие силы сопротивления воздуха и даже позволяет получить количественные оценки.

11. Ещё один опыт Галилея или полёт тела, брошенного горизонтально

На занятиях:

- Пуля, выпущенная из винтовки, летит по дуге, лежащей в плоскости мушки и прицела.
- Товарищ сержант, а что, если винтовку наклонить на бок, то можно из-за угла стрелять?
- Гм... Вообще-то можно... Но наклонять винтовку по уставу не положено!

(Из армейского юмора)

Обратимся ещё к одному опыту, предложенному Галилеем, но, к сожалению (а может, как мы увидим ниже, и к счастью), им не осуществлённому. Опыт описан в книге Галилея «Диалог о двух главнейших системах мира — Птолемеевой и Коперниковой», вышедшей в 1632 г. В этой книге Галилей отстаивал устройство мира по Копернику (за что и был арестован инквизицией), сформулировал принцип относительности движения и ещё несколько новых для своего времени идей.

В «Диалоге» участвуют уже знакомые нам персонажи: Сальвиати, Симпличио и Сагрето. В ходе обсуждения проблемы свободного падения тел Сальвиати говорит: «... я считал бы бесспорным, что если одним ядром выстрелить <горизонтально> из пушки, а другому дать упасть с той же высоты отвесно вниз, то оба они достигнут земли в одно и то же мгновение, хотя первое пройдёт расстояние, быть может, в десять тысяч локтей, а второе — только в сто...» [2, том 1, стр. 254].

Если не учитывать силу сопротивления воздуха, то утверждение Сальвиати кажется почти очевидным. Действительно, в соответствии со II-м законом Ньютона движение тела вдоль вертикальной оси зависит только от проекции сил на вертикальную ось и не зависит от того, какие силы действуют вдоль горизонтальной. Сейчас даже трудно себе представить, что люди могли думать иначе. Но во времена Галилея ещё не было не только II-го закона Ньютона, но даже понятия силы тяжести в её сегодняшнем смысле. Следуя Аристотелю, Галилей говорил о «стремлении тела к центру Земли». Также не было чёткого представления об инерции, считалось, в соответствии с теорией Аристотеля, что ядро летит, потому что оно «раздвигает» перед собой воздух, а затем воздух смыкается (поскольку природа боится пустоты) и толкает ядро. Так что для своего времени утверждение Сальвиати было совсем не бесспорным.

Однако даже с высоты наших сегодняшних знаний мы можем сказать, что утверждение Сальвиати очевидно лишь в отсутствие сопротивления воздуха. Упадут ли ядра одновременно в реальности, т. е. если сопротивление воздуха учесть?

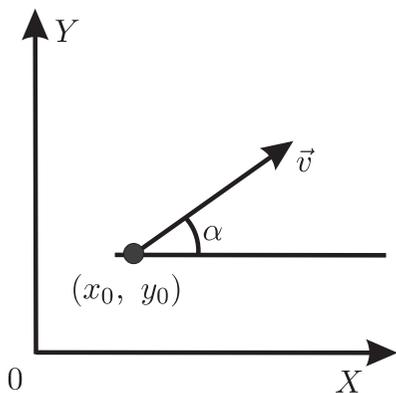


Рис. 11.1. Полёт тела под углом к горизонту.

Рассмотрим задачу о полёте тела, брошенного под углом к горизонту, в общем виде.

Пусть из точки с координатами (x_0, y_0) начало двигаться тело со скоростью v под углом α к горизонту (см. рис. 11.1). Если пренебречь сопротивлением воздуха, то задачу решить совсем несложно. Полёт тела можно рассмотреть как сумму двух движений: равномерного прямолинейного вдоль горизонтальной оси и равнопеременного вдоль

вертикальной. Изменение координат со временем запишем в виде:

$$x = x_0 + v_x t, \quad y = y_0 + v_y t - \frac{gt^2}{2}, \quad (23)$$

где v_x и v_y — проекции скорости v на оси:

$$v_x = v \cos \alpha, \quad v_y = v \sin \alpha.$$

Примем для простоты $x_0 = 0$, подставим t из первого уравнения во второе и получим уравнение траектории полёта:

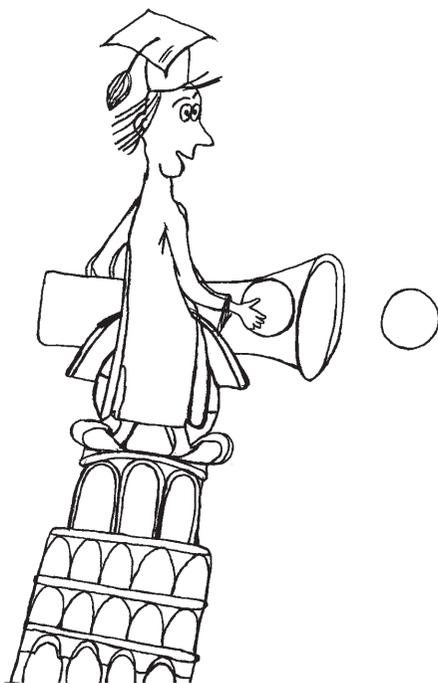
$$y = y_0 + \frac{v_y}{v_x} x - \frac{g}{2v_x^2} x^2. \quad (24)$$

Из уравнения видно, что полученная кривая — это парабола, обращённая ветвями вниз. (Кстати, именно Галилей первым доказал, что траектория брошенного тела — парабола). Если старт тела происходит из начала координат (т. е. $x_0 = 0$ и $y_0 = 0$), то нетрудно получить выражения для времени полёта t_0 , высоты подъёма H и дальности полёта L :

$$t_0 = \frac{2v \sin \alpha}{g}, \quad H = \frac{v^2 \sin^2 \alpha}{2g}, \quad L = \frac{v^2 \sin(2\alpha)}{g} \quad (25)$$

Поскольку максимальное значение синуса — единица, то максимальная дальность полёта, равная $L = v^2/g$, достигается при броске под углом 45° .

Попробуем теперь учесть сопротивление воздуха. Если задача одномерного движения — вертикального падения тела при наличии сопротивления воздуха, хотя и выходит за рамки школьной программы, но всё же имеет решение, то двухмерная задача (т. е. когда изменяются две координаты — X и Y) — полёт тела под углом к горизонту — является классическим примером задачи, не решаемой в аналитическом виде. Тело движется по так называемым *баллистическим кривым* (от греч. «βαλλω» — бросаю, кидаю). Расчёт этих кривых возможен *только* численными методами. Небезынтересно заметить, что вычисление баллистических кривых — первая задача, решавшаяся на первых электронно-вычислительных машинах, которые появились во время Второй мировой войны в США, а работа по составлению баллистических таблиц проводилась по заказу артиллерийского управления [12].



12. Баллистические траектории

Чтобы рассчитать движение тела, брошенного под углом к горизонту, запишем II закон Ньютона с учётом силы сопротивления воздуха:

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{F}_{\text{сопротивл}} = m\vec{g} - \beta\vec{v}|\vec{v}|. \quad (26)$$

Рассмотрим проекции на оси OX и OY :

$$ma_x = -\beta v_x v, \quad ma_y = -g - \beta v_y v. \quad (27)$$

где v — модуль скорости тела.

При расчёте методом Эйлера придётся ввести массивы координат и скоростей для каждой проекции. Соответствующие строки в ядре программы на языке Visual Basic примут вид:

```
V = SQR(Vx(i) * Vx(i) + Vy(i) * Vy(i))
Ax = -Friction * Vx(i) * V / mass
Ay = -g - Friction * Vy(i) * V / mass
```

При проведении расчётов с помощью Excel нам уже потребуется не четыре столбца, как в гл. 6, а восемь.

A — время t
 B — координата x
 C — скорость v_x
 D — координата y
 E — скорость v_y
 F — полная скорость v
 G — ускорение a_x
 H — ускорение a_y

В A1–H1 можно занести наименования столбцов.

Зададим начальные условия в следующие ячейки (аналогично тому, как мы это делали в главе 5).

I2	— интервал времени Δt	0,001
J2	— отношение β/m	0,1
K2	— ускорение свободного падения g	9,815
A2	— начало отчёта времени	0
B2	— начальная координата $x(0)$	0
C2	— начальная проекция скорости $v_x(0)$	10
D2	— начальная координата $y(0)$	0
E2	— начальная проекция скорости $v_y(0)$	10

Занесём формулы в ячейки А3–Е3, F2–H2:

Математическая формула	Формула Excel
$t_N = t_{N-1} + \Delta t$	A3=A2+I\$2
$x_N = x_{N-1} + v_{x,N-1}\Delta t$	B3=B2+C2*I\$2
$v_{x,N} = v_{x,N-1} + a_{x,N-1}\Delta t$	C3=C2+G2*I\$2
$y_N = y_{N-1} + v_{y,N-1}\Delta t$	D3=D2+E2*I\$2
$v_{y,N} = v_{y,N-1} + a_{y,N-1}\Delta t$	E3=E2+H2*I\$2
$v_N = \sqrt{v_{x,N}^2 + v_{y,N}^2}$	F2=КОРЕНЬ(C2*C2+E2*E2)
$a_{x,N} = -(\beta/m)v_{x,N} \cdot v_N$	G2=-J\$2*C2*F2
$a_{y,N} = -g - (\beta/m)v_{y,N} \cdot v_N$	H2=-K\$2-J\$2*E2*F2

Остаётся только откопировать формулы в нижележащие ячейки.

Замечание. Указанные условия соответствуют задаче, когда начальные проекции скорости тела $v_x = 10$ м/с, $v_y = 10$ м/с, т. е. угол бросания равен 45° , а полная скорость $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 10\sqrt{2} \approx 14,1$ (м/с).

Проведём расчёты по схеме Эйлера, задав отношение β/m равным 0, 0,01, 0,03, 0,1, 0,3 и 1,0 (м^{-1}). Результаты приведены на рис. 12.1.

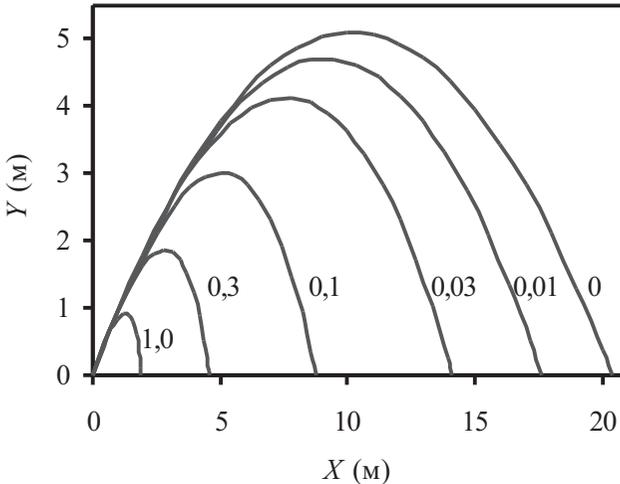


Рис. 12.1. Баллистические траектории, цифрами у кривых указаны значения β/m (м^{-1}).

Верхняя траектория соответствует полёту тела в отсутствие силы трения. По мере увеличения коэффициента сопротивления время,

высота и дальность полёта тела уменьшаются, траектория приобретает несимметричный вид: угол, под которым тело падает, становится больше угла, под которым тело бросили.

На рис. 12.2 показаны траектории полёта тел, брошенных со скоростью 14,1 м/с под углами 30°, 39° и 45° к горизонту при $\beta/m = 0,1 \text{ м}^{-1}$. Как видно, максимальная дальность полёта достигается при угле меньше 45°.

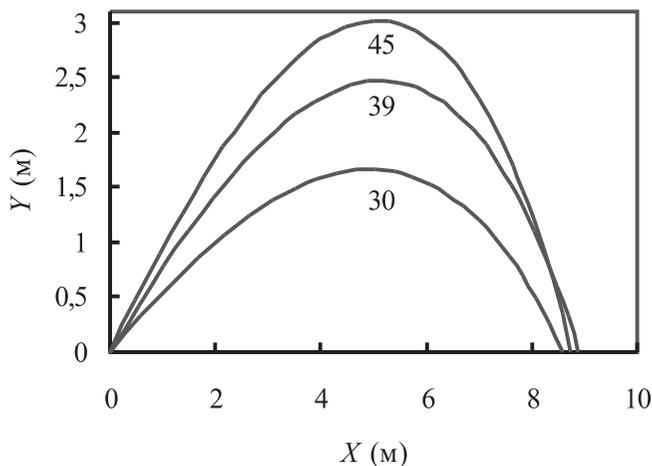


Рис. 12.2. Баллистические траектории, $\beta/m = 0,1 \text{ м}^{-1}$, $v = 14,1 \text{ м/с}$, цифрами у кривых указаны начальные углы бросания.

Назовём оптимальным углом бросания угол, под которым нужно бросить тело, чтобы оно пролетело максимальное расстояние. Для нахождения оптимального угла можно действовать перебором значений угла бросания, задав точность, например, один градус, а можно написать цикл и предоставить искать оптимальное значение программе. Посмотрим, как дальность полёта зависит от угла бросания при $\beta/m = 0,1 \text{ м}^{-1}$. Следует заметить, что погрешность определения дальности полёта, оцениваемая по формуле (4), составляет 0,02 м ($\Delta t = 0,001 \text{ с}$, $t = 2 \text{ с}$, $a_{\max} = 10 \text{ м/с}^2$). Результаты представлены в таблице 12.1. Получилось, что максимальная дальность полёта 8,91 м достигается при угле бросания $39^\circ \pm 1^\circ$, т. е. меньше 45°. (Более точный расчёт при $\Delta t = 0,0001 \text{ с}$ показывает, что оптимальный угол бросания равен $38,7^\circ \pm 0,1^\circ$, а дальность полёта — 8,914 м.)

Таблица 12.1. Зависимость дальности полёта от угла бросания.

Угол (град)	30	35	37	38	39	40	42	45
Дальность полёта (м)	8,60	8,86	8,9	8,91	8,91	8,91	8,88	8,76

Таким образом, мы получили, что оптимальный угол бросания зависит от β/m . В таблице 12.2 приведены вычисленные по схеме Эйлера значения оптимальных углов бросания в зависимости от β/m при начальной скорости 14,1 м/с. Видно, что чем меньше β/m , тем ближе оптимальный угол бросания к 45° .

Таблица 12.2. Зависимость оптимального угла бросания от β/m , $v = 14,1$ м/с.

β/m (м^{-1})	0	0,01	0,03	0,1	0,3	1
Оптимальный угол бросания (град)	45,0	43,9	42,2	38,7	34,5	30,0

Кроме этого, анализируя баллистические траектории, можно заметить, что значение оптимального угла бросания зависит от начальной скорости. В таблице 12.3 представлена зависимость оптимального угла бросания от начальной скорости при $\beta/m = 0,1 \text{ м}^{-1}$. Понятно, что с уменьшением начальной скорости сила трения будет играть всё меньшую роль, и оптимальный угол бросания будет приближаться к 45° , что легко увидеть из таблицы 12.3. На рис. 12.3 приведены баллистические траектории при $\beta/m = 0,1 \text{ м}^{-1}$ и начальной скорости тела 141 м/с.

Таблица 12.3. Зависимость оптимального угла бросания от начальной скорости v , $\beta/m = 0,1 \text{ м}^{-1}$.

v (м/с)	1	3	10	14,1	30	141
Оптимальный угол бросания (град)	44,9	44,5	40,9	38,7	32,9	23,4

Известно, что пушки дальнбойной артиллерии наклоняют под углами меньше 45° . Приведённые результаты объясняют, почему так поступают — максимальная дальность стрельбы достигается именно при углах меньше 45° . С другой стороны, иногда возникает задача поражения целей, находящихся за высокими укреплениями или углублённых в землю. Тогда необходимо, чтобы линия падения снаряда была как можно ближе к вертикали. В этом случае стрельба ведётся под углами больше 45° , и в результате сопротивления воздуха угол падения снаряда оказывается больше угла выстрела (см. рис. 12.3).

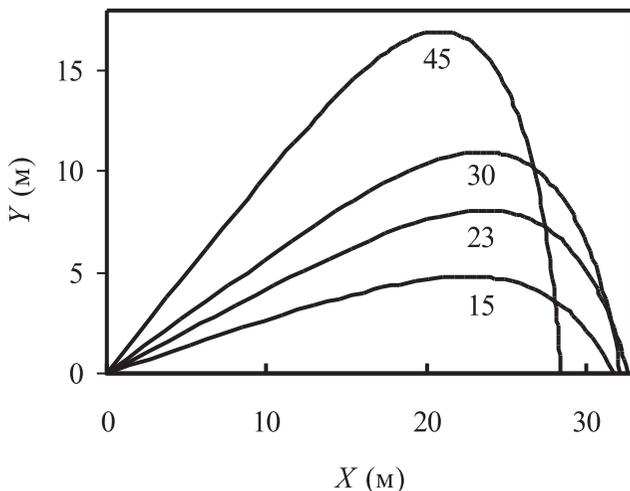


Рис. 12.3. Баллистические траектории, $\beta/m = 0,1 \text{ м}^{-1}$, $v = 141 \text{ м/с}$, цифрами у кривых указаны начальные углы бросания.

13. Анализ второго опыта Галилея

Вернёмся теперь к опыту Галилея со стрельбой из пушки в горизонтальном направлении и одновременным бросанием ядра вниз (предложенному, но не реализованному). Прежде всего, возникает вопрос, а чему равен «локоть». Примем его равным 0,5 м. Получается, что воображаемая пушка стреляла с высоты 50 м и дальность полёта составила 5 км. Но с высоты 50 м ядро будет падать чуть больше трёх секунд, тогда исходная скорость ядра даже в отсутствии сопротивления воздуха должна была быть более 1500 м/с — почти в пять раз больше скорости звука, что нереально. Если же учесть сопротивление воздуха, то начальная скорость должна быть ещё больше. Таким образом, предложенный в книге Галилея эксперимент неосуществим. Не будем укорять жившего 400 лет назад учёного, попробуем следовать не букве, а духу его книги. Возьмём другие начальные условия: пусть высота башни будет 55 м (такая башня нам уже знакома), а начальная скорость ядра — 300 м/с (артиллерия того времени позволяла стрелять ядрами, сообщая им скорость до 400 м/с), коэффициент сопротивления воздуха для ядра мы уже вычисляли — $\beta/m(\text{ядра}) = 0,30 \cdot 10^{-3} \text{ м}^{-1}$. Вычислим время полёта по схеме Эйлера. Результаты расчётов по схеме Эйлера представлены в таблице 13.1.

Расчёты показывают, что вылетевшее из пушки ядро летит на 0,15 с дольше, чем то же ядро, падающее вертикально. Предоставим читателю самому решать, много это или мало. Сальвиати измерял время ударами пулса, так что различие времени полёта в 0,15 с он мог и не заметить. Разница времени полёта увеличится до 0,5 с, если вместо эксперимента с пушкой, Сальвиати выстрелил бы с такой же скоростью из мушкета. Заметим, что из-за сопротивления воздуха, время полёта пули будет больше, чем у ядра, но улетит пуля на меньшее расстояние. Увеличив высоту до 100 м, Сальвиати обнаружил бы, что разница во времени полёта составит уже почти секунду, что он уже не мог не заметить.

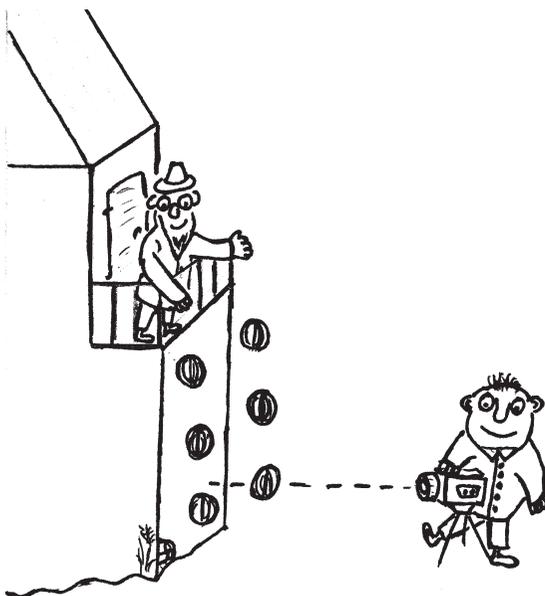
Таблица 13.1. Результаты расчёта полёта тел, брошенных горизонтально.

тело	$\beta/m,$ 10^{-3} (m^{-1})	высота (м)	время падения в вакууме (с)	время падения в воздухе (с)	время полёта (с)	даль- ность полёта (м)
ядро	0,30	55	3,348	3,357	3,500	913
пуля	1,73	55	3,348	3,401	3,941	643
пуля	1,73	100	4,514	4,645	5,463	775

Для расчёта силы трения у Галилея не было соответствующего математического аппарата, он появился столетием позже благодаря работам Ньютона и Лейбница. Компьютеров в то время тем более не было. Так что, может, и хорошо, что Галилей не ставил этого опыта, его результат мог бы поколебать уверенность в независимости времени падения тела от его горизонтальной скорости, и, возможно, мы бы не увидели «Диалога...». Заметим, что Ньютон 20 лет не публиковал «Математические начала натуральной философии», где он сформулировал открытые им законы, поскольку представлялось, что они неверно описывали движение Луны. Но ошибка была не у Ньютона, просто в то время расстояние от Земли до Луны было неверно измерено. И лишь после того, как было правильно определено расстояние от Земли до Луны, и расчёты Ньютона получили экспериментальное подтверждение, он опубликовал свой труд, ставший фундаментом современной физики.

Остаётся заметить, что если бы сила сопротивления воздуха была пропорциональна не квадрату скорости, а скорости тела, то время падения тела не зависело бы от значения горизонтальной проекции начальной скорости даже при больших значениях коэффициента трения α , в чём мы предлагаем читателям убедиться самостоятельно.

Часть 2. Экспериментальная проверка численных расчётов



14. Методика эксперимента

Использование видеокamеры в качестве измерительного инструмента

Однажды Шерлок Холмс и доктор Ватсон путешествовали на воздушном шаре и приземлились в неизвестном месте. По дороге шёл прохожий.

— Сэр, не подскажете, где мы находимся?

— Вы находитесь в корзине воздушного шара.

— Ватсон, сказал Холмс, этот человек — математик.

— Гениально, Холмс! Но как Вы догадались?

— Только математик мог дать такой точный и такой бесполезный ответ. (Из студенческого юмора)

В первой части книги, нам удалось с помощью численного моделирования рассчитать время падения тела и баллистические траектории полёта тела, брошенного под углом к горизонту. Но теперь невольно

возникает вопрос: имеют ли эти красивые картинки на экране компьютера отношение к действительности? Ведь на экране, как и на бумаге, можно нарисовать всё что угодно. Поэтому перейдём от математических расчётов к экспериментальной проверке полученных результатов. Для проверки нам важно не только качественно заметить наличие силы сопротивления вязкой среды: жидкости или газа, но и получить количественные результаты.

Проведём три серии экспериментов:

— медленное (ламинарное) падение шарика (в глицерине);

— быстрое (турбулентное) падение тел (в воздухе);

— полёт тела, брошенного под углом к горизонту.

Чтобы читатели могли сами повторить наши эксперименты, мы не использовали специальное оборудование. Современные любительские видеокамеры и цифровые камеры позволяют с большой точностью определять координаты движущегося тела. В зависимости от имеющегося оборудования можно использовать следующие схемы работы:

1. При наличии аналоговой видеокамеры и компьютерной карты «видеозахвата» — движение тела следует записать на видеокамеру, оцифровать на компьютере, т. е. с помощью карты видеозахвата перевести видеозапись в файл типа «avi» («mov» и т. п.). Затем полученный файл с помощью программы Adobe Premiere или других подобных программных продуктов преобразовать в последовательность графических файлов типа «bmp» («tif» и т. п.), каждый из которых представляет собой один кадр видеозаписи.

2. При наличии цифровой видеокамеры — записанное движение тела нужно перекачать на компьютер по цифровому каналу и преобразовать в последовательность графических файлов.

3. При наличии цифровой фотокамеры (фотоаппарата) — полученный видео файл типа «mpg», «mov»... и т.п. нужно перенести на компьютер и преобразовать в последовательность графических файлов.

4. При наличии цифровой фотокамеры в экспериментах, где не нужна быстрая съёмка, можно поставить фотокамеру в режим съёмки серии кадров. В результате получится уже готовая последовательность графических кадров, которые остаётся только перенести на компьютер для дальнейшей обработки.

Последний способ имеет существенное преимущество, поскольку сразу записывает движение в виде серии файлов, что позволяет ускорить время обработки.

При работе с простой (не цифровой) видеокамерой и компьютерной картой видеозахвата следует иметь в виду некоторые тонкости. При

оцифровке для уменьшения размера конечного файла существует возможность применять компрессию (сжатие) кадров. Однако при этом может наблюдаться нарушение синхронизации. Эта нарушение заметно при обычном просмотре видеозаписи, но может существенно повлиять на получаемые результаты в режиме покадрового просмотра. Поэтому при оцифровке следует выбирать опцию «полные кадры (без сжатия)».

При работе нужно знать частоту кадров камеры. Большинство любительских видеокамер снимают со скоростью 25 кадров в секунду¹². Однако камеры могут снимать с большей частотой¹³. Если частота кадров камеры неизвестна, то её можно измерить следующим образом: снять работающий секундомер или часы с показаниями секунд, оцифровать и подсчитать число кадров между изменениями показаний секунд.

Частота кадров в камере выдерживается с высокой точностью, иначе видеоролик при просмотре на телевизоре начал бы «плыть». Будем считать, что неточности, связанные с измерением времени видеокамерой, намного меньше остальных приборных погрешностей.

Ещё несколько «тонкостей». Во избежание «дрожания» изображения, камеру следует закреплять на штативе. В крайнем случае, её можно положить на стол, но не держать в руках.

Следует выбрать режим съёмки движущихся предметов. Большинство даже любительских камер имеют такой режим, обычно он называется «спорт». В этом режиме время экспозиции кадра мало, поэтому получается лишь незначительное размытие изображения. Однако этот режим требует хорошего освещения. Поэтому съёмку нужно проводить в дневное время или использовать мощный осветитель.

¹²Такую же скорость оцифровки следует устанавливать в программе, обслуживающей компьютерную плату видеозахвата. Если частота кадров платы видеозахвата отличается от частоты кадров камеры, то кадры могут пропадать или дублироваться. Это не вызывает проблем при обычном просмотре, но даст неправильные результаты при анализе кадров.

¹³Замечание касательно работы с SVHS видеокамерой и некоторыми цифровыми видеокамерами. В некоторых режимах оцифровка может происходить в режиме «чересстрочной развёртки» (interlacing), т. е. сначала «захватываются» все нечётные строки, а затем все чётные строки. При этом на кадрах получаются двойные изображения движущихся тел, которые будут выглядеть полосатыми как «зебра». Эффект появления «двойников» у межстрочной развёртки хорошо известен, и графические пакеты типа Photoshop имеют специальные фильтры (De-Interlace) для его нивелирования. Обычно такие «двойники» мешают, но в данном случае они могут сослужить хорошую службу, поскольку отражают перемещение тела за половину времени между кадрами. Например, если частота камеры 25 кадров в секунду, то время между положениями «двойников» соответствует 1/50 с.

При появлении в кадре быстро движущегося предмета, камера может автоматически начать перенастраивать фокус, что приведёт к размытию изображения. Поэтому следует навести камеру на фокус и затем перевести в режим фиксированного или ручного фокуса.

После того, как видеозапись сделана и преобразована в последовательность графических файлов, по ней можно определить:

- время движения тела на определённом участке, например между линиями старта и финиша;
- координаты тела, траекторию его движения;
- скорость и ускорение тела.

Определение погрешности измерений

Остановимся подробнее на точности измерений.

Если необходимо найти время движения тела, то наша точность определяется частотой кадров камеры. Когда мы измеряем длину миллиметровой линейкой, то мы берём в качестве погрешности измерительного инструмента пол цены деления (т.е. 0,5 мм). При измерении времени в кадрах, мы можем получить точность 0,5 кадра. Если, например, шарик начал движение у верхней линии на десятом кадре, на пятнадцатом кадре он ещё не достиг финиша, а на шестнадцатом уже пересёк его и успел продвинуться дальше, то можно сказать, что шарик прошёл от старта до финиша за $5,5 \pm 0,5$ кадров. С другой стороны, обычно момент начала движения так же неизвестен. Например, шарик мог начать двигаться чуть раньше начала 10-го кадра, но заметили мы его движение только на 10-м кадре. Поэтому момент начала движения мы также определяем с точностью не лучше, чем 0,5 кадра. Таким образом, приборная погрешность при измерении интервала времени с помощью видеокамеры составляет плюс-минус один кадр. В приведённом примере шарик двигался 6 кадров, поэтому можно сказать, что время его движения составляет 6 ± 1 кадров, т. е. относительная точность измерения одна шестая.

Более высокая точность достигается при измерении не времени движения, а координат тела. Координаты тела измеряются по оцифрованному кадру видеокамеры или фотоаппарата. Проще всего это делать в графических редакторах (PaintBrush, Photoshop и т.п.), где указываются текущие координаты курсора. Для большей точности курсор лучше подводить не к центру тела (шарика), который не всегда можно точно определить, а к верхнему или нижнему краю тела. Для того чтобы перевести координаты курсора в метры, надо определить с помо-

пью курсора координаты любого изображения с известными размерами на том же кадре (например, меток на линейке). При этом нужно иметь в виду, что масштаб по горизонтали и по вертикали может несколько различаться¹⁴.

Точность измерений координат определяется разрешающей способностью видеокамеры. Большинство любительских камер создают кадры формата 352×288 пикселей (точек). Поскольку край тела обычно немного смазан, то точность определения координаты края тела составляет 2–3 пикселя. Следовательно, мы можем определить его координаты с точностью до 1% от размера кадра. Цифровые камеры могут давать кадры с большим количеством точек, поэтому с их помощью определение координат тела можно произвести с большей точностью.

Точность измерения координаты тела зависит от того, насколько большой участок пути мы хотим зафиксировать. Чем больший отрезок пути должен поместиться в кадре, тем меньше точность определения координат тела.

По двум последовательным кадрам можно измерить скорость движущегося тела. Для этого следует измерить путь ΔL , который оно проходит между двумя кадрами. Затем скорость движения тела вычисляется по формуле $v = \Delta L/T$, где T — время между двумя последовательными кадрами (см. рис. 14.1).

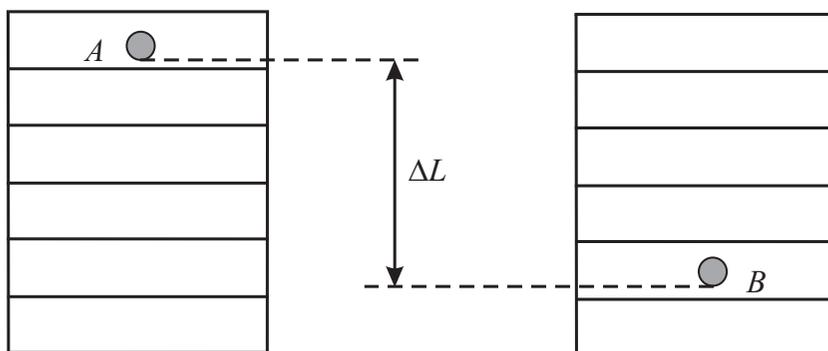


Рис. 14.1. Пояснение к определению скорости тела с помощью видеокамеры: A и B — положения тела на двух последовательных кадрах.

¹⁴ Использование широкоугольного объектива приводит к некоторому искажению размеров (масштаб в верхней части кадра может быть чуть мельче, чем в центре), что требуется учитывать для более точного определения координат тела.

Следует иметь в виду, что таким способом мы измеряем не мгновенную, а среднюю скорость. Действительно, средняя скорость — это отношение перемещения тела ко времени Δt , за которое это перемещение произошло. Мгновенная скорость — это предел, к которому стремится средняя скорость при Δt , стремящемся к 0. Но устремить Δt к 0 можно только теоретически. На практике мы ограничены частотой кадров видеокамеры и измеряем *среднюю* скорость, пусть за малые, но не за бесконечно малые промежутки времени.

Измеряя изменение скорости между тремя последовательными кадрами, можно вычислить также и ускорение. Однако, поскольку за малые промежутки времени скорость меняется мало, то ускорение будет измерено не очень точно.

Кроме приборных погрешностей следует учитывать и статистические погрешности, вызванные самыми разнообразными причинами. Поэтому каждую серию экспериментов нужно несколько раз повторить.

Учёт параллакса

Наиболее удобна схема опыта, когда тело движется на фоне масштабной линейки. Это позволяет легко рассчитать координаты тела и упрощает процедуру наведения камеры на резкость. Действительно, если бы вы попытались снять падение пули с Пизанской башни, то камера навела бы фокус на Пизанскую башню. Учитывая большой наклон башни, пуля оказалась бы не в фокусе. Её изображение было бы сильно размыто, а может и вовсе незаметно на фоне башни. Чтобы надёжно снять пулю (небольшое тело), экран нужно поставить непосредственно за линией падения пули. Линию падения пули можно определить, опустив её на длинной нити.

Однако, поскольку тело движется на некотором удалении от мерных линий, то для большей точности следует учесть параллакс. Причина возникновения параллакса поясняется на рисунке 14.2.

Пусть тело падает по вертикали AE , экран с линиями расположен за шариком на расстоянии $a = EF$, а наблюдатель (камера) находится в точке O : $OE = L$. Точки A и B — положение тела на двух последовательных кадрах. Наблюдателю в точке O кажется, что шарик прошёл путь $h_1 = CD$, который больше, чем реальный $h = AB$. Из подобия треугольников OAB и OCD и треугольников ODF и OBE имеем:

$$\frac{h}{h_1} = \frac{AB}{CD} = \frac{OB}{OD}, \quad \frac{OB}{OD} = \frac{OE}{OF} = \frac{L}{L+a}$$

Таким образом,

$$h = h_1 \frac{L}{L + a}. \quad (28)$$

Получается, что видимый путь тела h_1 больше истинного пути h . Для уменьшения параллакса камеру следует располагать по возможности дальше от экрана, так, чтобы L было много больше a , а необходимый размер кадра получать, используя приближение (Zoom). Удаление камеры от объекта позволяет также уменьшить искажения, возникающие при съёмке широкоугольным объективом на близких расстояниях.

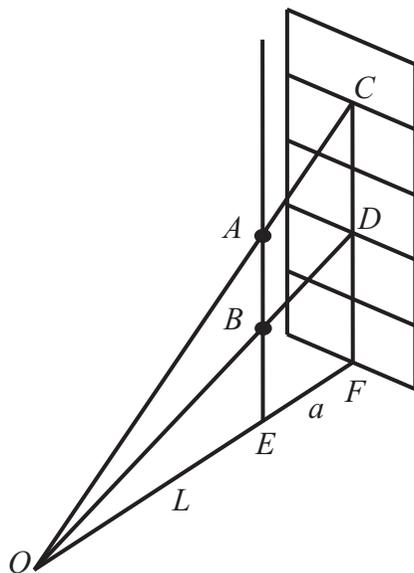


Рис. 14.2. Пояснение к расчёту параллакса.

15. Эксперимент №1. Падение шарика в глицерине

Оборудование: видеокамера, компьютер, прозрачный сосуд высотой 30–40 см, глицерин, весы, линейка, шарики.

Начнём с ламинарного движения тел. Как уже говорилось выше, такое движение можно наблюдать в глицерине. Действительно, движение шарообразного тела будет ламинарным, если число Рейнольдса (Re) будет меньше 10. Оценим его.

Вязкость глицерина при комнатной температуре $\eta = 2,9 \text{ кг}/(\text{м} \cdot \text{с})$, плотность $\rho = 1,27 \cdot 10^3 \text{ кг}/\text{м}^3$. Если использовать шарики не больше 2 см в диаметре и их скорость не превысит 1 м/с, то Re будет меньше 10, т. е. движение шарика можно считать ламинарным и пользоваться формулой Стокса (20).

При движении тел в жидкости кроме силы тяжести и вязкого трения нужно учитывать ещё и силу Архимеда. II закон Ньютона в проекции на вертикальную ось тогда примет вид:

$$ma = -mg + F_A - \alpha v, \quad (29)$$

где v — скорость тела, а F_A — сила Архимеда. Напомним, что ось OY у нас направлена вверх, поэтому проекция ускорения свободного падения будет отрицательной, а силы Архимеда — положительной.

Сила Архимеда равна весу вытесненной жидкости. Обозначим плотность жидкости ρ_0 , плотность материала шарика ρ_x , объём шарика V (не перепутайте обозначение объёма V шарика и его скорости v). Уравнение (29) запишется:

$$\rho_x Va = -\rho_x Vg + \rho_0 Vg - \alpha v. \quad (30)$$

Разделим обе части на $\rho_x V$:

$$a = -g + g \frac{\rho_0}{\rho_x} - \frac{\alpha}{\rho_x V} v. \quad (31)$$

Тогда:

$$a = -g_1 - \frac{\alpha}{m} v, \quad (32)$$

где $g_1 = g(1 - (\rho_0/\rho_x))$.

Полученное уравнение (32) отличается от уравнения (14) только значением g_1 . Значит, чтобы учесть силу Архимеда, надо только внести одно изменение в начальные условия: вместо $g = 9,815 \text{ м}/\text{с}^2$ задать $g_1 = 9,815(1 - (\rho_0/\rho_x)) \text{ м}/\text{с}^2$.

Поскольку глицерин имеет очень большую вязкость, то шарик в нём практически сразу достигает установившейся скорости и далее движется равномерно. Поэтому мы будем проверять формулу (18).

Схема простейшего эксперимента заключается в том, чтобы взять сосуд с глицерином, погрузить в него шарик, и предоставить ему возможность свободно падать в глицерине. Используя видеокамеру или фотоаппарат, при этом нужно измерить их установившуюся скорость, как описано выше.

Для таких экспериментов удобно использовать шарики от подшипников, детского бильярда и т.п. Проще всего, если имеется несколько шариков из разных материалов одинакового диаметра. Коэффициент трения α для шариков равных диаметров будет одинаков. Соответственно установившаяся скорость v_0 будет прямо пропорциональна весу шарика (т. е. силе тяжести за вычетом силы Архимеда):

$$v_0 = \frac{mg_1}{\alpha}. \quad (33)$$

При отсутствии шариков одинакового диаметра можно воспользоваться формулой Стокса и определить вязкость глицерина в сосуде с учётом радиуса шарика по формуле:

$$\eta = \frac{mg_1}{6\pi Rv_0}. \quad (34)$$

Если наши рассуждения правильны, то, подставив данные для разных шариков, мы должны получить одинаковые значения коэффициента η .

Для эксперимента понадобится широкий стеклянный сосуд. Формула Стокса (20) выведена в предположении, что стенки сосуда находятся достаточно далеко от движущегося тела, и их влиянием можно пренебречь, поэтому диаметр сосуда должен быть значительно больше диаметра шарика, а шарик следует отпускать так, чтобы он двигался по оси симметрии сосуда.

Для удобства наблюдения на стенки сосуда можно нанести метки. Шарик следует отпускать только после того, как он полностью погружен в глицерин, например, с помощью пинцета, а не бросать на поверхность жидкости (удар о поверхность исказит картину движения).

Заметим также, что не следует определять время движения шарика до дна сосуда, поскольку вблизи дна сила сопротивления возрастёт, что внесёт некоторую неточность в измерения. Лучше заметить время пересечения «финишной черты» на некотором расстоянии от дна.

Мы проводили эксперименты, используя два шарика примерно одинакового размера: свинцовый и стальной. Их параметры приведены в таблице 15.1. В качестве свинцового шарика использовали рыболовное грузило сферической формы. Отверстие у грузила было заплавлено оловом, поэтому плотность шарика получилась несколько ниже, чем табличная плотность свинца. Диаметры шариков измерялись штангенциркулем с точностью 0,1 мм. Грузило не было идеальным шаром. Отклонение от сферичности грузила составило примерно 0,2 мм, что отражено в погрешности диаметра, указанной в таблице.

Как уже говорилось выше, чем больше точек приходится на кадр, тем лучше точность измерения. Однако, вполне приемлемую точность можно получить даже с обычной (не цифровой) видеокамерой с частотой 25 кадров в секунду и с разрешением 352×288 точек на кадр.

Для экспериментов мы использовали химический цилиндр высотой чуть больше 30 см. На цилиндр были нанесены риски через 3 см. Чтобы метки на сосуде были лучше видны, за сосудом располагался экран — белый лист ватмана. Шарик отпускали у первой риски. Постоянная скорость устанавливалась прежде, чем шарик достигал следующей риски. Время движения определяли от момента пересечения шариком второй риски до момента прохождения его через десятую риску, которая располагалась на 24 см ниже второй. Десятая риска была на несколько сантиметров выше дна сосуда. Эксперименты проводили при комнатной температуре. Плотность глицерина измеряли взвешиванием, она составила $1,27 \pm 0,01$ (г/см³). Вес шариков с учётом силы Архимеда приведён в таблице 15.1.

Таблица 15.1. Параметры используемых шариков.

Шарик	Диаметр d (мм)	Масса m (г)	Плотность ρ_X (г/см ³)	g_1 (м/с ²)	Вес в глицерине mg_1 (Н)
свинцовый	$16,4 \pm 0,2$	$25,12 \pm 0,01$	$10,9 \pm 0,4$	$8,67 \pm 0,06$	$0,218 \pm 0,002$
стальной	$16,6 \pm 0,1$	$18,86 \pm 0,01$	$7,9 \pm 0,1$	$8,23 \pm 0,03$	$0,155 \pm 0,001$

Эксперимент проводили в два этапа:

1) Проверка гипотезы, что шарики движутся в глицерине с установившейся скоростью, начиная уже со второй риски, для чего находилось время движения шарика от 2^{ой} до 6^{ой} риски и от 6^{ой} до 10^{ой}. Если движение установившееся, то эти интервалы должны быть равны.

2) Определение времени движения шарика от 2^{ой} до 10^{ой} риски и вычисление вязкости η .

Результаты наших измерений приведены в таблице 15.2.

Таблица 15.2. Результаты экспериментов с глицерином.

Шарик	Время падения от 2 ^{ой} до 6 ^{ой} риски (число кадров)	Скорость v_1 (м/с)	Время падения от 6 ^{ой} до 10 ^{ой} риски (число кадров)	Скорость v_2 (м/с)
свинцовый	$6,0 \pm 1,5$	$0,50 \pm 0,12$	$6,5 \pm 1,5$	$0,46 \pm 0,12$
стальной	$8,5 \pm 1,5$	$0,35 \pm 0,06$	$9,0 \pm 1,5$	$0,33 \pm 0,06$

Из этой таблицы видно, что с указанной точностью скорость каждого шарика на первой половине пути и на второй была одинаковой, т. е. шарики двигались с установившейся скоростью. Кроме того, видно, что скорость шариков не превышала 1 м/с, т. е. число Re было не больше 10.

Во второй серии экспериментов мы измеряли время движения от 2^{ой} до 10^{ой} риски и вычисляли значение η по формуле (34). Результаты приведены в таблице 15.3.

Таблица 15.3. Результаты измерения вязкости η .

Шарик	Время падения от 2 ^{ой} до 10 ^{ой} риски (число кадров)	Скорость v_0 (м/с)	Вязкость η (кг/(м·с))
свинцовый	$12,5 \pm 1,5$	$0,48 \pm 0,06$	$2,9 \pm 0,4$
стальной	$17,5 \pm 1,5$	$0,34 \pm 0,03$	$2,9 \pm 0,2$

Прежде всего, заметим, что значения вязкости η , измеренные с помощью стального и свинцового шариков прекрасно совпали. Это значит, что в условиях нашего эксперимента движение было ламинарным и можно было пользоваться формулой (33).

Полученное значение вязкости глицерина η совпадает с табличным [11]. Следует заметить, что вязкость глицерина сильно зависит от температуры.

В заключение, обратим внимание на то, что один из стандартных способов определения вязкости жидкости как раз и основан на измерении установившейся скорости движения в ней шарика.

16. Эксперимент №2.

Падение шарика в разбавленном глицерине

Оборудование: то же, что и в эксперименте №1.

В первом эксперименте камера использовалась только для измерения времени. Падение шариков продолжалось несколько секунд, так что видеокамеру можно было заменить секундомером, хотя точность была бы хуже.

Проведённый эксперимент позволил нам убедиться в том, что движение шарика было ламинарным и поэтому для определения силы трения можно было пользоваться формулой Стокса. Однако он не позволил достичь главной цели — проверить расчёты падения тела в вязкой среде по схеме Эйлера, поскольку тела практически сразу достигали установившейся скорости. Поэтому нам надо взять среду с меньшей вязкостью, чтобы успеть сделать десяток-другой кадров, прежде чем шарики

достигнут установившейся скорости. Сильно уменьшить вязкость тоже нельзя, т. к. если ни один из шариков не достигнет установившейся скорости, то мы не сможем измерить вязкость среды. То есть нам нужна жидкость с вязкостью чуть меньше, чем у глицерина. В качестве такой жидкости можно взять не очень густое машинное масло. В наших опытах мы использовали глицерин, разведённый дистиллированной водой.

Для разведения глицерина мы к 500 мл глицерина добавляли 45 мл дистиллированной воды. Получился 92% (по объёму) глицерин. Однако приготовленная таким образом смесь не была однородной. Поэтому мы нагрели смесь до 60 °С, тщательно перемешали и охладили. Плотность 92% глицерина составила 1,25 г/см³. Соответственно, изменилась действующая на шарики сила Архимеда.

Так же как и в предыдущей серии экспериментов, шарик позволяли свободно падать в сосуде с глицерином. Падение снимали на видеоканнере. Полученный видеофрагмент падения шарика преобразовывали в последовательность графических файлов и определяли координаты шарика. Точность определения координаты — 1 мм. По двум последовательным кадрам определяли скорость шарика как описано выше. Точность определения скорости составила 0,2 м/с. Результаты наших экспериментов представлены на рис. 16.1.

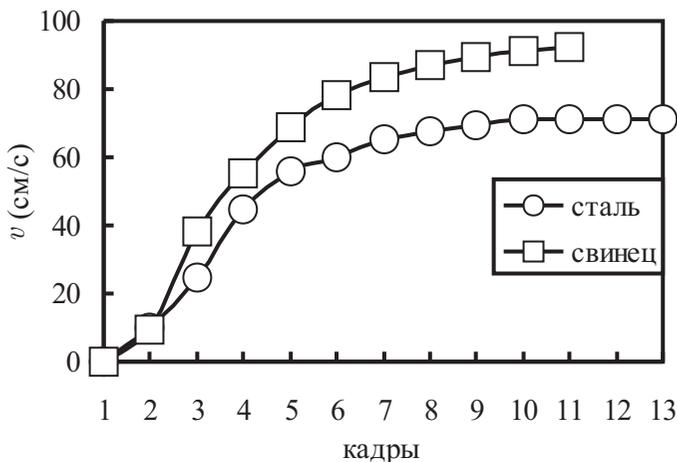


Рис. 16.1. Зависимость скорости шариков от времени при падении в 92% глицерине.

Видно, что стальной шарик успевает достичь установившейся скорости, а свинцовый почти приближается к ней. Найдём установившуюся

юся скорость стального шарика по трём последним кадрам. Она равна $0,71 \pm 0,02$ (м/с). Отсюда можно по формуле (34) вычислить вязкость 92% глицерина, она равна $\eta = 1,40 \pm 0,04$ (кг/(м · с)). То есть, при разведении вязкость глицерина существенно уменьшилась.

Проверим теперь, является ли движение ламинарным, для чего вычислим число Re. Заметим, что свинцовый шарик разгоняется до скорости 0,9 м/с. Подставив значение вязкости, получим, что число Re достигает 14, поэтому рассмотренное движение свинцового шарика в 92% глицерине описывается законом Стокса лишь приближённо, дальнейшее уменьшение вязкости среды может привести к существенным ошибкам.

Для того чтобы воспользоваться схемой Эйлера, нам надо вычислить отношение α/m для обоих шариков (см. таблицу 16.1).

Таблица 16.1. Параметры шариков для расчёта по схеме Эйлера.

шарик	масса m (г)	диаметр d (мм)	α/m (с ⁻¹)
свинцовый	$25,12 \pm 0,01$	$16,4 \pm 0,2$	$8,6 \pm 0,3$
стальной	$18,86 \pm 0,01$	$16,6 \pm 0,1$	$11,6 \pm 0,4$

Рассчитаем для этих шариков зависимости координаты от времени методом Эйлера и сравним их с полученными экспериментальными данными. Результаты представлены на рис. 16.2.

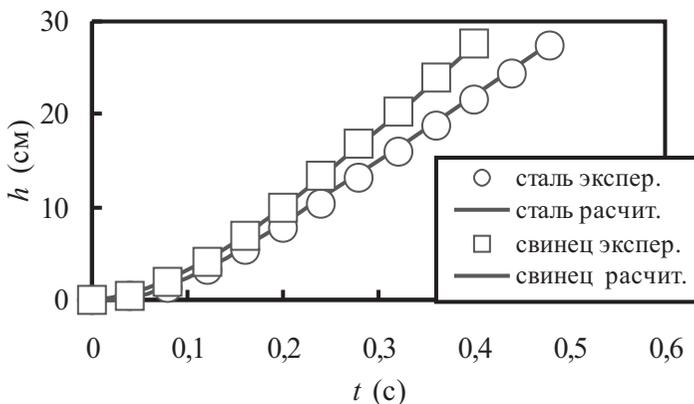


Рис. 16.2. Зависимость координаты шариков от времени при падении в 92% глицерине.

Видно, что в пределах погрешности измерений рассчитанные значения, совпали с экспериментальными данными (рис. 16.2), что свидетель-

ствует о правильности наших расчётов движения шариков в глицерине по схеме Эйлера.

На этом мы закончим первую задачу — движение в среде с большой вязкостью, и перейдём ко второй задаче — падению тел в воздухе.

17. Эксперимент №3. Падение воздушного шарика

Оборудование: видеокамера, компьютер, весы, рулетка, воздушный шарик, стремянка.

Поскольку вязкость воздуха мала, то падение свинцового или стального шарика в воздухе практически не будет отличаться от его падения в пустоте. Чтобы различия были заметными, нужно взять шарик с большим значением β/m , т. е. нужно, чтобы диаметр был максимально велик, а масса мала. Этим условиям прекрасно удовлетворяет детский воздушный шарик, однако при его использовании надо учитывать следующие проблемы:

— шарик при падении чувствителен к слабейшим потокам воздуха, наблюдать его свободное падение можно либо в закрытых помещениях, либо в абсолютный штиль;

— шарик может иметь форму, далёкую от сферической, у несферических тел коэффициент лобового сопротивления C_x может заметно отличаться от C_x для сферы; следует выбирать шарик так, чтобы его форма была близка к сферической или чтобы он имел форму, для которой известно значение лобового сопротивления C_x ;

— надо следить, чтобы при падении шарик не поворачивался и не падал боком, предотвратить вращение шарика можно, подвешивая к нему небольшой груз;

— слишком сильно надутый шарик легко лопается;

— шарик со временем сдувается, каждую серию опытов надо проводить за небольшое время и контролировать размеры шарика в начале и в конце эксперимента;

— вес шарика в процессе надувания увеличивается, поэтому его надо взвешивать *после* того, как он был надут.

Для дальнейших расчётов нам необходимо знать массу шарика. Проще всего определить массу шарика взвешиванием, но при этом нужно учесть силу Архимеда воздуха. Обычно мы считаем силу Архимеда воздуха малой по сравнению с силой тяжести (напомним, что литр воздуха при нормальных условиях имеет массу 1,3 г). Однако, для воздушного шарика это не так. Если надуть шарик не воздухом, а гелием, то он взлетит, то есть вес вытесненного воздуха будет больше

силы тяжести, действующей на резиновую оболочку и на гелий внутри шарика. Поэтому необходимо учесть силу Архимеда аналогично тому, как это было сделано для шариков в глицерине.

В наших опытах, чтобы обеспечить устойчивое падение шарика, к нитке, которой завязывали шарик, прикрепляли маленький грузик, и отпускали так, чтобы шарик падал грузиком вниз. Однако с дополнительным грузом шарик падал достаточно быстро и не достигал установившейся скорости. Чтобы уменьшить скорость падения, мы использовали воздушный шарик, наполненный гелием. Параметры шарика указаны в таблице 17.1. Шарик не был точно сферический, поэтому диаметр поперечного сечения шарика мы определили с точностью до 5 мм.

Таблица 17.1. Параметры воздушного шарика.

Масса шарика, определённая путём взвешивания (г)		Истинная масса шарика (учтена сила Архимеда) (г)	Диаметр d (см)	Площадь сечения S (м ²)
без грузика	с грузиком			
$3,2 \pm 0,1$	$6,0 \pm 0,1$	$10,5 \pm 0,1$	$18,0 \pm 0,5$	$0,025 \pm 0,001$

Шарик бросали с высоты три метра, используя обычную стремянку. Падение снимали на видеокамеру, запись оцифровывали и определяли скорость падения шарика. Результаты наших экспериментов приведены на рис. 17.1. Видно, что шарик достигает установившейся скорости $v_0 = 2,7 \pm 0,2$ (м/с).

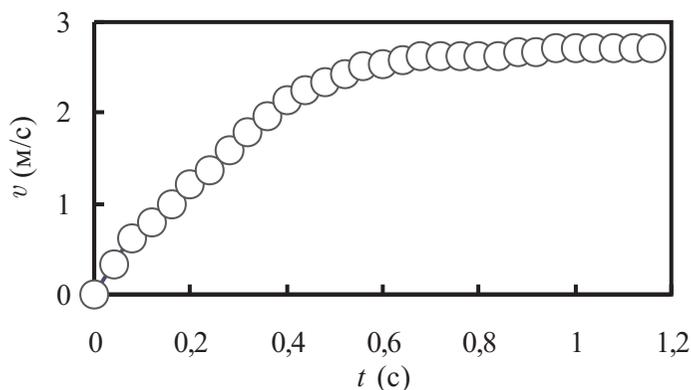


Рис. 17.1. Зависимость скорости падения воздушного шарика от времени.

Найдём коэффициент β . Запишем II закон Ньютона для установив-

шегося движения шарика:

$$\beta v_0^2 + F_A - mg = 0,$$

где F_A — сила Архимеда. Отсюда:

$$\beta = \frac{mg - F_A}{v_0^2} \quad (35)$$

Подставляем значения из таблицы 17.1:

$$\beta = \frac{6 \cdot 10^{-3} \cdot 9,815}{2,7^2} = 8,1 \cdot 10^{-3} \text{ (кг/м)}.$$

Определим из (22) коэффициент лобового сопротивления

$$C_x = \frac{2\beta}{\rho S} = \frac{2 \cdot 8,1 \cdot 10^{-3}}{1,3 \cdot 0,025} = 0,49.$$

С учётом погрешности определения v_0 , $C_x = 0,49 \pm 0,04$, т. е. в пределах погрешности соответствует коэффициенту лобового сопротивления сферы 0,5.

Привязывая к шарiku грузы различной массы, и измеряя установившуюся скорость, можно проверить правильность гипотезы о том, что сила сопротивления воздуха пропорциональна квадрату скорости.

18. Эксперимент №4. Падение шарика для пинг-понга

Оборудование: видеокамера, компьютер, весы, рулетка, стремянка, лабораторный штатив, шарик для пинг-понга.

Другим хорошим объектом для наблюдения падения тела в воздухе является шарик для пинг-понга. В таблице 18.1 приведены параметры стандартного пинг-понговского шарика.

Таблица 18.1. Параметры пинг-понговского шарика.

Масса m (г)	Диаметр d (см)	S (см^2)	β 10^{-4} (кг/м)	β/m 10^{-4} (м^{-1})
$1,75 \pm 0,01$	$3,76 \pm 0,02$	$11,1 \pm 0,1$	$3,61 \pm 0,03$	2060 ± 30

Шарик имеет сферическую форму, поэтому коэффициент лобового сопротивления C_x можно принять равным 0,5. Отношение β/m для пинг-понговского шарика в несколько раз меньше, чем для воздушного,

в результате при падении с высоты трёх метров он не достигает установленной скорости. Поэтому в этой серии экспериментов мы сравнивали экспериментальное значение скорости при падении шарика и значение скорости, рассчитанное по схеме Эйлера.

Для повышения точности измерения скорости мы несколько видоизменили схему эксперимента: видеокамеру наводили только на нижнюю часть траектории полёта. Размер области, которую должна захватить видеокамера, нетрудно вычислить. Нам нужно зафиксировать положение шарика на двух последовательных кадрах. При частоте камеры 25 кадров/с он должен пройти эту область не быстрее, чем за $2/25$ с, т. е. за 0,08 с. При падении с высоты три метра скорость около пола составит не более 8 м/с. Таким образом, достаточно чтобы видеокамера захватывала 60–70 см.

Во избежание начального толчка мы осуществляли пуск шарика пережиганием нити или лески, прикрепленной к шарiku небольшим кусочком скотча. Маленький кусок нити не окажет существенного влияния на движение шарика. Прикрепив к шарiku нить, мы подвешивали его на штативе так, чтобы линия падения отстояла от стены на расстоянии 15–20 см, затем отмечали положение шарика, включали камеру и пережигали нить. В полученной видеозаписи по двум последовательным кадрам мы определяли скорость движения шарика как описано выше. Результаты представлены в таблице 18.2.

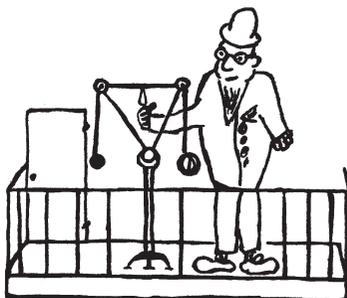
Таблица 18.2. Результаты измерения скорости пинг-понгового шарика.

№ опыта	Путь, пройденный шариком L (м)	Измеренная скорость v (м/с)	Скорость, вычисленная по схеме Эйлера (м/с)	Теоретическое значение скорости без учёта сопротивления воздуха v_0 (м/с)
1	$2,40 \pm 0,02$	$5,6 \pm 0,2$	$5,47 \pm 0,03$	6,86
2	$2,56 \pm 0,02$	$5,7 \pm 0,2$	$5,58 \pm 0,03$	7,09
3	$2,64 \pm 0,02$	$5,8 \pm 0,2$	$5,62 \pm 0,03$	7,20

Хотя в наших экспериментах получилось хорошее соответствие между экспериментом и численным расчётом, но разница между скоростями пинг-понгового шарика с учётом сопротивления воздуха и без учёта сопротивления не очень велика. Поэтому этот эксперимент может показаться не очень наглядным.

Гораздо более наглядными являются эксперименты, когда одновременно бросают два шарика, как это делал Галилей.

19. Эксперимент №5. Опыт Галилея



Оборудование: видеочамера, компьютер, набор шариков, весы, рулетка, лист ватмана или белый экран, штатив.

При проведении экспериментов с одновременным падением двух шариков самое сложное — это обеспечить одновременность их старта. Достаточно вспомнить, что разница времён падения ядра и пули с Пизанской башни была менее 0,1 с. Можно провести эксперимент: несколько раз бросить со стремянки два одинаковых шарика и посмотреть на видеочамере как они полетят. Как ни стараться отпустить их одновременно, на видеозаписи будет видно, что «раз на раз не приходится». И в каждом эксперименте шарики разлетятся на разные расстояния.

Одновременность старта можно добиться путём пережигания нитки или лески. Для этого в наших экспериментах мы связывали шарики тонкой леской и подвешивали на штативе как показано на рис. 19.1. При пережигании лески шарики начинали одновременно падать.

Поскольку у шариков могут быть различные массы, чтобы леска не скользила, у опор должен быть большой коэффициент трения. Мы закрепляли в штативе два круглых напильника. Положение шариков выравнивали по нижнему уровню. Затем включали камеру и пережигали нить.

Мы провели две серии экспериментов. В первой серии использовали пинг-понговский шарик и свинцовый шарик (маленькое грузило) примерно такой же массы.

Эти эксперименты легко воспроизвести в обычной комнате. Во второй серии мы увеличили высоту падения шариков до восьми метров,

что позволило зарегистрировать разницу скоростей при падении большого свинцового и деревянного шариков. Шарики сбрасывали с балкона в большой лекционной аудитории. Высоту точки старта определяли рулеткой с точностью до 1 см. Параметры шариков приведены в таблице 19.1.

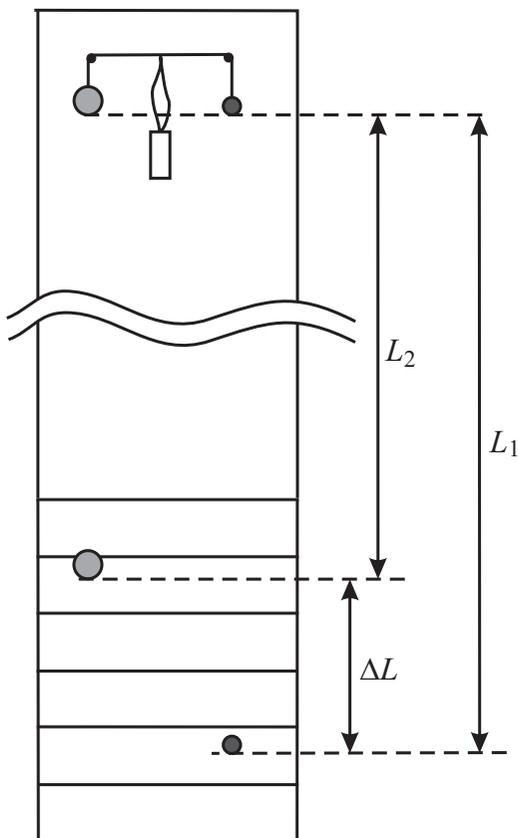


Рис. 19.1. Схема опыта с одновременным падением двух тел.

Прежде всего, мы выяснили, насколько скорость падения маленького свинцового шарика отличается от скорости его падения в вакууме. Мы измерили скорость падающего свинцового шарика аналогично тому, как мы это делали в предыдущем эксперименте для пинг-понговского. Погрешность измерения координаты составляла 0,5 см (с учётом размытости изображения). Таким образом, перемещение шарика между двумя

последовательными кадрами (т.е. за 1/25 с) было измерено с точностью 1 см, а погрешность определения скорости составила 0,2 м/с. Результаты для малого свинцового шарика приведены в таблице 19.2.

Таблица 19.1. Параметры используемых шариков.

шарик	масса m (г)	диаметр d (мм)	S (см^2)	β 10^{-4} (кг/м)	β/m 10^{-4} (м^{-1})
свинцовый (малый)	$1,47 \pm 0,01$	$6,2 \pm 0,2$	$0,30 \pm 0,02$	$0,1 \pm 0,01$	68 ± 7
для пинг-понга	$1,75 \pm 0,01$	$37,6 \pm 0,2$	$11,1 \pm 0,1$	$3,61 \pm 0,03$	2060 ± 30
свинцовый (большой)	$25,39 \pm 0,01$	$16,4 \pm 0,2$	$2,11 \pm 0,05$	$0,69 \pm 0,02$	27 ± 1
деревян- ный	$16,06 \pm 0,01$	$36,6 \pm 0,2$	$10,5 \pm 0,1$	$3,42 \pm 0,04$	213 ± 3

Таблица 19.2. Результаты измерения скорости свинцового шарика.

№	Путь, пройденный шариком L (м)	Измеренная скорость v (м/с)	Скорость, вычисленная по схеме Эйлера (м/с)	Теоретическое значение ско- рости без учёта сопротивления воздуха (м/с)
1	$2,59 \pm 0,01$	$7,2 \pm 0,2$	7,11	7,13
2	$2,54 \pm 0,01$	$7,1 \pm 0,2$	7,04	7,06
3	$2,52 \pm 0,01$	$7,1 \pm 0,2$	7,01	7,03

Видно, что скорость свинцового шарика в пределах погрешности измерения не отличается от скорости, которую он приобрёл бы, падая в пустоте. Поэтому время его полёта мы рассчитывали по формуле $v = \sqrt{2gh}$ (для большей точности нужно было провести расчёт по схеме Эйлера).

Затем мы сравнивали расстояния, пройденные свинцовым и пинг-понговым шариком к моменту, когда они попадали в кадр.

Мы пользовались следующим алгоритмом (см. рис. 19.1.):

- 1) измеряем перемещение свинцового шарика от места старта до того места, где его «поймала» видеокамера (L_1);
- 2) рассчитываем время полёта (t_1);
- 3) рассчитываем перемещение второго шарика L_2 за время t_1 ;
- 4) вычисляем разность $L_1 - L_2$;
- 5) сравниваем вычисленную разность с измеренной ΔL .

В таблице 19.3 представлены результаты первой серии экспериментов. В соответствии с формулой (4) точность определения L_2 по схеме Эйлера не хуже 10 мм. Видно, что в пределах указанной погрешности измерений, вычисленная величина разности координат шариков совпадает с измеренной экспериментально.

Таблица 19.3. Результаты эксперимента с падением свинцового и пинг-понгового шариков.

№	L_1 (м)	Время полёта t (с)	L_2 (м)	Вычисленная ΔL (м)	Экспериментальная ΔL (м)
1	$2,74 \pm 0,02$	$0,750 \pm 0,001$	$2,35 \pm 0,01$	$0,39 \pm 0,02$	$0,41 \pm 0,02$
2	$2,73 \pm 0,02$	$0,749 \pm 0,001$	$2,35 \pm 0,01$	$0,38 \pm 0,02$	$0,40 \pm 0,02$
3	$2,68 \pm 0,02$	$0,742 \pm 0,001$	$2,31 \pm 0,01$	$0,37 \pm 0,02$	$0,35 \pm 0,02$

Величина разлёта шаров получается весьма заметной: 35–40 см, так что опыт Галилея в такой постановке позволяет наглядно убедиться в правильности наших расчётов по схеме Эйлера.

Однако, тот факт, что шарик пинг-понга падает медленнее свинцового, кажется очевидным. Поэтому мы провели вторую серию экспериментов, где наблюдали падение свинцового и деревянного шаров, для которых разница в скорости на глаз неразличима. Для этого высоту падения шаров увеличили до восьми метров. При проведении опыта надо обязательно принять дополнительные меры предосторожности: шарики должны падать на демпфер: пенопласт, песок и т.д., надо следить, чтобы падающий и отскочивший шар не попали в находящихся внизу людей, и чтобы стоящий наверху экспериментатор был застрахован от падения. Результаты второй серии экспериментов представлены в таблице 19.4.

Таблица 19.4. Результаты эксперимента с падением свинцового и деревянного шариков.

№	L_1 (м)	Время полёта t (с)	L_2 (м)	Вычисленная ΔL (м)	Экспериментальная ΔL (м)
1	$7,16 \pm 0,02$	$1,212 \pm 0,001$	$6,88 \pm 0,02$	$0,28 \pm 0,02$	$0,24 \pm 0,02$
2	$7,25 \pm 0,02$	$1,220 \pm 0,001$	$6,97 \pm 0,02$	$0,28 \pm 0,02$	$0,26 \pm 0,02$
3	$7,45 \pm 0,02$	$1,236 \pm 0,001$	$7,15 \pm 0,02$	$0,30 \pm 0,02$	$0,27 \pm 0,02$

Видно, что результаты численного расчёта прекрасно совпадают с экспериментальными данными.

20. Эксперимент №6. Полёт тела, брошенного под углом к горизонту

Оборудование: видеокамера, компьютер, игрушечный пистолет, стреляющий шариками, штатив для крепления пистолета, весы, линейка (рулетка).

Проще всего реализовать полёт тела под углом к горизонту с помощью игрушечного пружинного пистолета, стреляющего шариками. При проведении этих экспериментов нужно помнить следующее:

— при выборе пистолета надо следить, чтобы удар по шарикку был центральным, иначе шарик при выстреле получит ещё и вращательное движение, которое уже не описывается формулой (21);

— чтобы сопротивление воздуха было более заметно, надо, чтобы шарики были больше размером и меньше массой, а скорость вылета из пистолета была по возможности больше;

— каждый опыт следует проводить несколько раз, пистолет должен быть закреплён в штативе;

— проводить эксперименты нужно в безветренную погоду или в закрытом помещении.

Возможны разные варианты постановки эксперимента. Например, если не ставить цель определить траекторию полёта, а только измерить дальность и время полёта, то можно на место предполагаемого падения шарика постелить лист копировальной бумаги и определять дальность полёта по следу от удара шарика по ней. Можно также использовать ровный слой песка, аналогично тому, как определяют дальность прыжка в длину. Время полёта можно измерять секундомером. Более точно измерять время полёта с помощью видеокамеры по звуку удара шарика о пол, определяемому по характерному всплеску на звуковой дорожке оцифрованной видеозаписи.

Для измерения скорости и угла вылета шарика нужно навести видеокамеру крупным планом на пистолет, снять момент выстрела, оцифровать видеозапись и с достаточно хорошей точностью определить скорость вылета шарика из пистолета. К сожалению, опыт показывает, что разброс начальной скорости шарика достаточно велик (более 10%), поэтому для достижения большой точности, скорость нужно определять при каждом выстреле.

В случае, если размеры шарика достаточно велики, можно поместить видеокамеру на большом расстоянии и снимать траекторию полёта полностью. Скорость шарика при этом можно определять по первым кадрам. Правда, точность при этом будет существенно меньше,

чем в случае, когда камера наведена на пистолет крупным планом. При наличии двух видеокамер можно одну навести на место старта и точно измерять скорость вылета, а второй отслеживать траекторию полёта. Для определения масштаба за пистолетом можно поместить лист ватмана с координатной сеткой.

На процедуре измерения начальной скорости и угла полёта следует остановиться подробнее.

Пусть на трёх последовательных кадрах координаты шарика: (x_1, y_1) , (x_2, y_2) и (x_3, y_3) . На малом промежутке времени (три кадра) в первом приближении будем считать движение тела равноускоренным. Тогда скорость шарика во второй точке выражается через координаты первой и третьей точек:

$$v_{2x} = \frac{x_3 - x_1}{2\Delta t}, \quad v_{2y} = \frac{y_3 - y_1}{2\Delta t} \quad (36)$$

В наших экспериментах мы выстреливали шарик вдоль белой стены, которая служила экраном. Высота крепления пистолета в штативе составляла примерно один метр. Видеокамеру располагали на расстоянии примерно 12 метров от стены, что позволяло отслеживать всю траекторию полёта.

Мы использовали пистолет с шариками, похожими на шарики для пинг-понга. Параметры шариков приведены в таблице 20.1.

Таблица 20.1. Параметры шарика для детского пистолета.

Масса m (г)	Диаметр d (см)	S (см^2)	β 10^{-4} (кг/м)	β/m (м^{-1})
$3,13 \pm 0,01$	$3,48 \pm 0,02$	$9,5 \pm 0,1$	$3,1 \pm 0,1$	$0,100 \pm 0,003$

По первым трём кадрам оцифрованной видеозаписи мы определяли начальные проекции скоростей v_{2x} и v_{2y} , измеренные значения подставляли в схему Эйлера, рассчитывали баллистическую траекторию и сравнивали полученные экспериментальные данные с расчётными.

Для примера на рис. 20.1 представлены результаты одного из подобных экспериментов. Координаты шарика с оцифрованных кадров нанесены в виде треугольников¹⁵, кривая, вычисленная по схеме Эйлера, нанесена сплошной линией. Для сравнения на рисунке штрихами нанесена траектория полёта тела с теми же начальной скоростью и углом,

¹⁵ После оцифровки изображения некоторые кадры (один–два на серию) оказываются сильно размытыми, так что координаты шарика невозможно определить с большой точностью. При обработке эти кадры отбрасывались, что привело к образованию «дырок» на графике.

но без учёта сопротивления воздуха, рассчитанная по формуле (24). Основную погрешность в расчёты по схеме Эйлера вносят погрешности определения проекций начальной скорости тела.

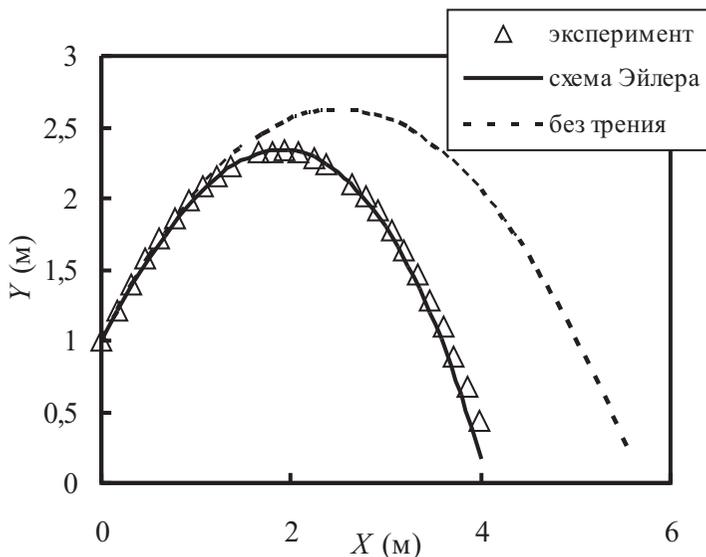


Рис. 20.1. Траектория движения тела с начальными параметрами:
 $v_x = 4,4$ м/с, $v_y = 5,9$ м/с, $v = 7,4$ м/с, $\alpha = 55^\circ$.

Из графика видно, что численный расчёт прекрасно описывает экспериментальные данные, что ещё раз свидетельствует о целесообразности применения схемы Эйлера для решения подобных задач.

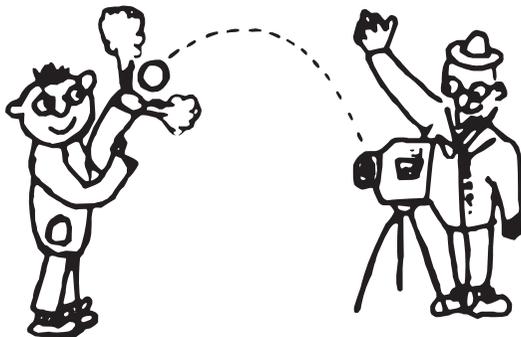
Заключение

Проведённые в настоящей книге расчёты показали, что известный опыт Галилея с бросанием ядра и пули с Пизанской башни должен был закончиться тем, что ядро упало бы примерно на 0,05 с раньше пули. Это сложно было бы заметить на глаз, но, применив в эксперименте видеокамеру (если бы в те времена она была), можно было заметить, что пуля отстала от ядра примерно на 1,4 метра.

Знаменитый опыт Галилея и несколько похожих на него задач приведены в книге для примера. При этом задачи были подобраны так, чтобы читатели смогли бы сами воспроизвести расчёты и эксперименты. Используя численные методы, можно решить довольно много на первый взгляд «нерешаемых» задач [7, 8]. Особо нужно отметить, что схема Эйлера является простейшей, а потому не очень точной. Поэтому, при проведении расчётов по этой схеме, обязательно нужно учитывать её погрешность. Оптимально, если проведённые расчёты можно проверить по теоретической формуле (если такая формула имеется), либо (что лучше, хотя и сложнее) экспериментально.

В заключение можно заметить, что ежегодно на всероссийских и международных конференциях школьных исследовательских работ школьники докладывают о проведённых ими исследованиях, многие из которых связаны с численным и экспериментальным решением нетривиальных физических задач. Хочется, чтобы таких работ делалось больше, и автору было бы приятно увидеть среди участников будущих конференций читателей этой книги.

Автор выражает глубокую благодарность своим коллегам: Грязнову А. Ю., Старокурову Ю. В. и Якуте А. А. за ценные советы при подготовке рукописи.



Литература

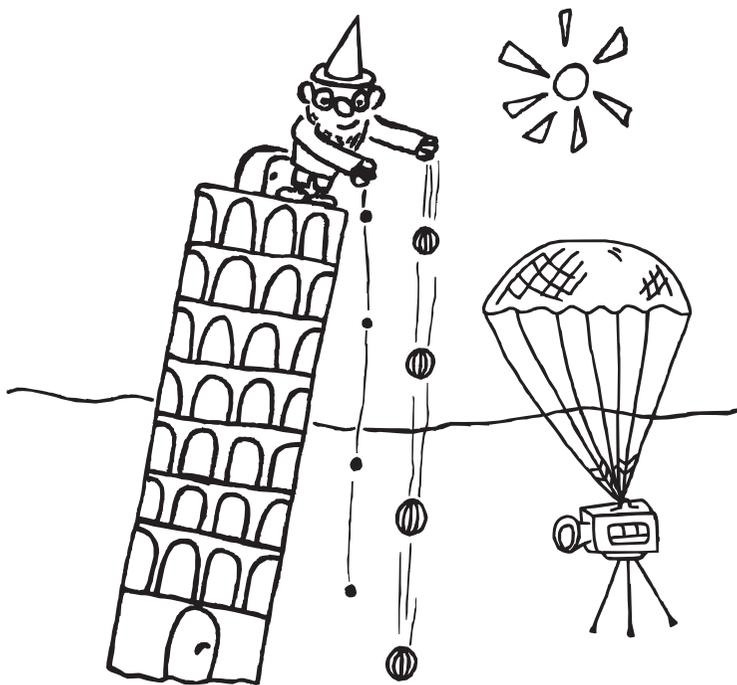
1. Балашов М. М. Учебник по физике. 9 класс. — М.: Просвещение, 1993.
2. Галилео Галилей. Избранные труды. — М.: Наука, 1964.
3. Маракуев Н. Н. Галилей. Его жизнь и учёные труды. М.: 1907.
4. Дягилев Ф. М. Из истории физики и жизни её творцов. — М.: Просвещение, 1986.
5. Льюиси М. История физики. — М.: Мир, 1970.
6. Хаммэль Ч. Дело Галилея. — М.: Триада, 1998.
7. Гулд Х., Тобочник Я. Компьютерное моделирование в физике. — М.: Мир, 1990.
8. Бурсиан Э. В. 100 задач для решения на компьютере. — С.-Пб.: МиМ, 1997.
9. Сборник задач по общему курсу физики / Под ред. И. А. Яковлева. — М.: Наука, 1977.
10. Алешкевич В. А., Деденко Л. Г., Караваев В. А. Механика. — М.: Изд. центр «Академия», 2004.
11. Физические величины. Справочник / Под ред. И. С. Григорьева, Е. З. Мелихова. — М.: Энергоатомиздат, 1991.
12. URL: <http://pokolenia.ok.ru/Explorer/eniac.htm>.

Оглавление

Введение	3
Часть 1. Компьютерное моделирование движения тел	6
1. Схема Эйлера	6
Знакомство со схемой Эйлера	6
Графическая интерпретация схемы Эйлера	7
Оценка погрешности схемы Эйлера	8
2. Схема Эйлера при изменяющемся ускорении	9
3. Схема Эйлера для расчёта падения тела в вязкой среде	10
4. Составление ядра программы	12
5. Реализация схемы Эйлера на Excel	15
6. Вычисление времени падения в отсутствие силы трения	18
7. Вычисление времени падения в случае линейной силы трения	19
8. Ламинарное и турбулентное течения. Число Рейнольдса	22
9. Расчёт падения тел в воздухе	25
10. Анализ классического опыта Галилея	26
11. Ещё один опыт Галилея или полёт тела, брошенного горизонтально	29
12. Баллистические траектории	32
13. Анализ второго опыта Галилея	36
Часть 2. Экспериментальная проверка численных расчётов	38
14. Методика эксперимента	38
Использование видеокамеры в качестве измерительного инструмента	38
Определение погрешности измерений	41
Учёт параллакса	43
15. Эксперимент №1. Падение шарика в глицерине	44
16. Эксперимент №2. Падение шарика в разбавленном глицерине	48
17. Эксперимент №3. Падение воздушного шарика	51
18. Эксперимент №4. Падение шарика для пинг-понга	53
19. Эксперимент №5. Опыт Галилея	55
20. Эксперимент №6. Полёт тела, брошенного под углом к горизонту	59
Заключение	62
Литература	63

С. Б. Рыжиков

Классический опыт Галилея в век цифровой техники:



численное моделирование и
лабораторный эксперимент

