УДК 621.396.22.029.7

АНИЗОТРОПНЫЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКИЙ СВЕТОВОД

В. И. Кривенков

(*Московская государственная академия приборостроения и информатики*)

Сформулирован строгий метод решения задачи о собственных волнах анизотропного эллиптического световода. Рассмотрен наиболее интересный случай, когда главные оси тензора диэлектрической проницаемости сердцевины световода, которая имеет форму эллиптического цилиндра, совпадают с осями этого цилиндра. Для всех направляемых мод этого световода получены точные выражения для составляющих поля, дисперсионные уравнения и уравнения для критических длин волн.

Для ряда применений световодов, например в системах когерентной оптической связи, волоконно-оптических интерферометрах и многих других, необходимы световоды, сохраняющие состояние поляризации передаваемого излучения. В качестве световодов, сохраняющих поляризацию, можно использовать как эллиптические, так и круглые анизотропные световоды. В этих световодах из-за анизотропии соответственно формы или материала снимается вырождение ортогонально поляризованных мод и, если разность постоянных продольного распространения этих мод достаточно велика, перекачка энергии из одной моды в другую на неизбежных нерегулярностях может быть достаточно малой. Очевидно, что анизотропные эллиптические световоды при надлежащем выборе параметров должны иметь лучшие по сравнению с эллиптическими или круглыми анизотропными световодами поляризационные характеристики.

В настоящей работе предложен строгий метод решения задачи о собственных волнах анизотропного эллиптического световода. Представлен наиболее интересный случай, когда главные оси тензора диэлектрической проницаемости сердцевины световода, которая имеет форму эллиптического цилиндра, совпадают с осями этого цилиндра. Для всех направляемых мод этого световода получены точные выражения для составляющих поля, дисперсионные уравнения и уравнения для критических длин волн. В общем случае структура метода практически не изменится, но все полученные ниже соотношения будут иметь более сложный вид. Фактически этот метод является обобщением представленных ранее методов решения аналогичной задачи для эллиптических [1, 2] и анизотропного градиентного [3] световодов.

В качестве модели анизотропного эллиптического световода рассмотрим однородную вдоль некоторой оси z бесконечно протяженную диэлектрическую структуру, состоящую из сердцевины в виде эллиптического цилиндра и бесконечно толстой изотропной оболочки с постоянной диэлектрической проницаемостью ε_{00}.

Тензор диэлектрической проницаемости сердцевины в системе координат эллиптического цилиндра ξ, η, z представим в виде

$$\varepsilon(\xi,\eta)=\varepsilon(\xi)\begin{pmatrix} 1+\dfrac{\Delta(\xi)(\operatorname{ch}2\xi\cos 2\eta-1)}{\operatorname{ch}2\xi-\cos 2\eta} & -\dfrac{\Delta(\xi)\operatorname{sh}2\xi\sin 2\eta}{\operatorname{ch}2\xi-\cos 2\eta} & 0\\ -\dfrac{\Delta(\xi)\operatorname{sh}2\xi\sin 2\eta}{\operatorname{ch}2\xi-\cos 2\eta} & 1-\dfrac{\Delta(\xi)(\operatorname{ch}2\xi\cos 2\eta-1)}{\operatorname{ch}2\xi-\cos 2\eta} & 0\\ 0 & 0 & \varepsilon_z(\xi)\varepsilon^{-1}(\xi)\end{pmatrix},$$

где $\varepsilon(\xi)=\dfrac{\varepsilon_x(\xi)+\varepsilon_y(\xi)}{2}$, $\Delta(\xi)=\dfrac{\varepsilon_x(\xi)-\varepsilon_y(\xi)}{\varepsilon_x(\xi)+\varepsilon_y(\xi)}$, $\varepsilon_z(\xi)$ ($\varepsilon_{x,y,z}(\xi)$ — главные значения тензора диэлектрической проницаемости в декартовой системе координат $x=a\operatorname{ch}\xi\cos\eta$, $y=a\operatorname{sh}\xi\sin\eta$, z) — в общем случае кусочно-непрерывные функции, которые, определив точки разрыва $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_{L-1}$, не ограничивая общности, учитывая [4], можно представить в виде

$$\varepsilon^i(\xi)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon_{lk}^{i}\left(\frac{\xi-\xi_{l-1}}{\xi_l-\xi_{l-1}}\right)^k,$$

$$\varepsilon_z^i(\xi)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon_{lk}^{zi}\left(\frac{\xi-\xi_{l-1}}{\xi_l-\xi_{l-1}}\right)^k,\quad i=0,\pm1,$$

$$\Delta(\xi)=\sum_{k=0}^{\infty}\Delta_{lk}\left(\frac{\xi-\xi_{l-1}}{\xi_l-\xi_{l-1}}\right)^k,$$

$$\xi_{l-1}\leqslant\xi<\xi_l,\quad l=1,2,\ldots,L\ \ (\xi_0=0).$$

Полагая зависимость составляющих векторов напряженности электрического поля $\mathbf{E}=(E_\xi,E_\eta,E_z)$ и магнитного поля $\mathbf{H}=(H_\xi,H_\eta,H_z)$ направляемой моды рассматриваемого световода от времени t и продольной координаты z в виде $\exp[j(\omega t-\beta z)]$, где

ω и β — круговая частота и постоянная продольного распространения моды, из уравнений Максвелла для немагнитной анизотропной диэлектрической среды получим следующую систему уравнений в частных производных первого порядка:

$$\frac{\partial h^\alpha}{\partial \xi} = \frac{\Delta(\xi)\sin\vartheta}{1+\Delta(\xi)\cos\vartheta}\left(I_{00}^{10}\frac{\partial}{\partial\eta} - \gamma^\alpha I_{00}^{01}\right)h^\alpha - -(-1)^\alpha A^\alpha(\xi,\eta)h^{1-\alpha}, \quad \alpha = 0,1,$$

где

$$h^0 = \begin{pmatrix} j\sqrt{\varepsilon_0}\,E_z \\ k_0 a\sqrt{\mu_0(\operatorname{sh}^2\xi + \sin^2\eta)}\,H_\xi \end{pmatrix},$$

$$h^1 = \begin{pmatrix} j\sqrt{\mu_0}\,H_z \\ k_0 a\sqrt{\mu_0(\operatorname{sh}^2\xi + \sin^2\eta)}\,H_\eta \end{pmatrix},$$

$$A^\alpha(\xi,\eta) = \begin{pmatrix} \dfrac{1-\alpha\Delta^2(\xi)}{1+\Delta(\xi)\cos\vartheta}\left(\dfrac{\varepsilon(\xi)}{\gamma}\right)^{2\alpha-1}\dfrac{\partial}{\partial\eta} & \gamma^\alpha\left[1 - \dfrac{1-\alpha\Delta^2(\xi)}{1+\Delta(\xi)\cos\vartheta}\left(\dfrac{\varepsilon(\xi)}{\gamma^2}\right)^{2\alpha-1}\right] \\ \dfrac{k_0^2a^2\varepsilon_z^\alpha(\xi)(\operatorname{ch}2\xi - \cos2\eta)}{2(-\gamma)^{\alpha-1}} & \dfrac{\partial}{\partial\eta} \end{pmatrix},$$

$$\vartheta(\xi,\eta) = \arcsin\left(\frac{\operatorname{sh}2\xi\sin2\eta}{\operatorname{ch}2\xi - \cos2\eta}\right), \quad I_{kl}^{ij} = \begin{pmatrix} i & j \\ k & l \end{pmatrix},$$

$\gamma = \beta k_0^{-1}$, $k_0 = \omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$, ε_0 и μ_0 — электрическая и магнитная постоянные.

В оболочке световода ($\xi \geqslant \xi_L$), где $\Delta(\xi) \equiv 0$, общее решение этой системы уравнений, экспоненциально убывающее при $\xi \to \infty$, имеет вид

$$h^\alpha(\xi,\eta) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{1} b_n^i D_i^\alpha M_{2n+\nu}^{|i-\mu|}(\xi, q_{L+1}) sc_{2n+\nu}^{|i-\mu|}(\eta, q_{L+1}),$$

$$\alpha = 0,1, \quad \mu,\nu \in \{0,1\},$$

где $b_0^\mu = 0$, если $\nu = 0$,

$$D_i^i = \begin{pmatrix} 1 \\ -\dfrac{(-\gamma)^i\varepsilon_{00}^{1-i}}{u_{L+1}^2}\dfrac{\partial}{\partial\eta} \end{pmatrix},$$

$$D_{1-i}^i = \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{\gamma^{1-i}\varepsilon_{00}^i}{u_{L+1}^2}\dfrac{\partial}{\partial\xi} \end{pmatrix}, \quad i = 0,1,$$

$$q_l = -\frac{k_0^2a^2u_l^2}{4}, \quad u_l^2 = \gamma^2 - \varepsilon_{l0},$$

$$l = 1,2,\ldots,L+1 \quad (\varepsilon_{L+1,0} = \varepsilon_{00}),$$

$$sc_m^0(\eta,q) \equiv se_m(\eta,q), \quad sc_m^1(\eta,q) \equiv ce_m(\eta,q)$$

$$(sc_0^0(\eta,q) \equiv 0),$$

$$M_m^0(\xi,q) \equiv Ms_m^{(3)}(\xi,q), \quad M_m^1(\xi,q) \equiv Mc_m^{(3)}(\xi,q)$$

$$(M_0^0(\xi,q) \equiv 0), \quad m = 0,1,\ldots,$$

$se_m(\eta,q)$, $ce_m(\eta,q)$, $Ms_m^{(3)}(\xi,q)$, $Mc_m^{(3)}(\xi,q)$ — угловые и радиальные функции Матье третьего рода [5], μ и ν — параметры, определяющие тип направляемой моды, а в сердцевине световода ($0 \leqslant \xi < \xi_L$) посредством подстановки

$$h^\alpha(\xi,\eta) = \sum_{m=0}^{\infty} S_{2m+\nu}^{|\alpha-\mu|}(\eta,q_l)h_m^\alpha(\xi),$$

$$\xi_{l-1} \leqslant \xi < \xi_l, \quad l = 1,2,\ldots,L, \quad \alpha = 0,1,$$

где

$$S_m^\alpha(\eta,q) = \begin{pmatrix} sc_m^\alpha(\eta,q) & 0 \\ 0 & sc_m^{1-\alpha}(\eta,q) \end{pmatrix},$$

исходная система в частных производных может быть преобразована в бесконечную систему обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\frac{dh_m^\alpha(\xi)}{d\xi} = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\left(C_{2m+\nu,2n+\nu}^{|\alpha-\mu|,l,1,1}(\xi)I_{00}^{10} - -\gamma^\alpha C_{2m+\nu,2n+\nu}^{|1-\alpha-\mu|,l,1,0}(\xi)I_{00}^{01}\right)h_n^\alpha(\xi) - -(-1)^\alpha A_{2m+\nu,2n+\nu}^{\alpha l}(\xi)h_n^{1-\alpha}(\xi)\right],$$

$$\xi_{l-1} \leqslant \xi < \xi_l, \quad l = 1,2,\ldots,L, \quad \alpha = 0,1, \quad m = 0,1,\ldots,$$

где

$$A_{mn}^{\alpha l}(\xi) = \begin{pmatrix} \dfrac{C_{mn}^{|1-\alpha-\mu|,l,0,1}(\xi)}{(1-\alpha\Delta^2(\xi))^{-1}}\left(\dfrac{\varepsilon(\xi)}{\gamma}\right)^{2\alpha-1} & \gamma^\alpha\left[\delta_m^n - \dfrac{C_{mn}^{|\alpha-\mu|,l,0,0}(\xi)}{(1-\alpha\Delta^2(\xi))^{-1}}\left(\dfrac{\varepsilon(\xi)}{\gamma^2}\right)^{2\alpha-1}\right] \\ \dfrac{\varepsilon_z^\alpha(\xi)(\delta_m^n\operatorname{ch}2\xi - c_{mn}^{|1-\alpha-\mu|,l,0})}{2k_0^{-2}a^{-2}(-\gamma)^{\alpha-1}} & c_{mn}^{|\alpha-\mu|,l,1} \end{pmatrix},$$

$$C^{\alpha lij}_{mn}(\xi) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} \frac{\Delta^i(\xi)\sin^i\vartheta}{1+\Delta(\xi)\cos\vartheta} sc^\alpha_m(\eta,q_l)\times$$
$$\times\frac{d^j sc_n^{|\alpha-|i-j||}(\eta,q_l)}{d\eta^j}d\eta = \sum_{k=0}^{\infty} C^{\alpha lij}_{mnk}\left(\frac{\xi-\xi_{l-1}}{\xi_l-\xi_{l-1}}\right)^k,$$

$$c^{\alpha li}_{mn} = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\cos^{1-i}2\eta\, sc^\alpha_m(\eta,q_l)\frac{d^i sc_n^{|\alpha-i|}(\eta,q_l)}{d\eta^i}d\eta,$$

δ^n_m — символ Кронекера.

Непрерывное решение последней системы уравнений, удовлетворяющее известным условиям при $\xi=0$, представим в виде

$$h^\alpha_m(\xi) = \sum_{i=0}^{1}\sum_{n,k=0}^{\infty} a^i_n h^{\alpha il}_{mnk}\left(\frac{\xi-\xi_{l-1}}{\xi_l-\xi_{l-1}}\right)^k,$$

$\xi_{l-1}\leqslant\xi<\xi_l,\quad l=1,2,\ldots,L,\quad \alpha=0,1,\quad m=0,1,\ldots,$ где $a^0_0=0$, если $\nu=0$,

$$h^{\alpha i1}_{mn0} = \delta^n_m|\alpha-\mu|\begin{pmatrix} i\\ 1-i\end{pmatrix},$$

$$h^{\alpha,i,l+1}_{mn0} = \sum_{j,k=0}^{\infty} F^{|\alpha-\mu|,l}_{2m+\nu,2j+\nu}h^{\alpha il}_{jnk},\quad l=1,2,\ldots,L,$$

$$F^{\alpha l}_{mn} = \begin{pmatrix} f^{\alpha l}_{mn} & 0\\ 0 & f^{1-\alpha,l}_{mn}\end{pmatrix},$$

$$f^{\alpha l}_{mn} = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} sc^\alpha_m(\eta,q_{l+1})sc^\alpha_n(\eta,q_l)d\eta,$$

$$h^{\alpha il}_{m,n,k+1} = \frac{\xi_l-\xi_{l-1}}{k+1}\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{k}\Big[\Big(C^{|\alpha-\mu|,l,1,1}_{2m+\nu,2s+\nu,k-j}I^{10}_{00} -$$
$$-\gamma^\alpha C^{|1-\alpha-\mu|,l,1,0}_{2m+\nu,2s+\nu,k-j}I^{01}_{00}\Big)h^{\alpha il}_{snj} -$$
$$-(-1)^\alpha A^{\alpha l}_{2m+\nu,2s+\nu,k-j}h^{1-\alpha,i,l}_{snj}\Big],$$

$$k=0,1,\ldots,\quad \alpha,i=0,1,$$

$$A^{\alpha l}_{mnk} = \begin{pmatrix} \gamma^{1-2\alpha}\sum\limits_{j=0}^{k}C^{|1-\alpha-\mu|,l,0,1}_{m,n,k-j}\zeta^\alpha_{lj} & \gamma^\alpha\left(\delta^n_m\delta^k_0 - \dfrac{\sum\limits_{j=0}^{k}C^{|\alpha-\mu|,l,0,0}_{m,n,k-j}\zeta^\alpha_{lj}}{\gamma^{2(2\alpha-1)}}\right)\\ \dfrac{\delta^n_m\sum\limits_{j=0}^{k}\varepsilon^{z\alpha}_{l,k-j}\chi^\alpha_{lj} - \varepsilon^{z\alpha}_{lk}c^{|1-\alpha-\mu|,l,0}_{mn}}{2k_0^{-2}a^{-2}(-\gamma)^{\alpha-1}} & \delta^k_0 c^{|\alpha-\mu|,l,1}_{mn}\end{pmatrix},$$

$$\zeta^\alpha_{lk} = \varepsilon^{2\alpha-1}_{lk} - \alpha\sum_{j=0}^{k}\sum_{i=0}^{j}\varepsilon^1_{l,k-j}\xi_{l,j-i}\xi_{li},$$

$$\chi^\alpha_{lk} = \frac{2^k\,\mathrm{ch}\,2\xi_{l-1}(\mathrm{th}\,2\xi_{l-1})^{[1-(-1)^k]/2}}{k!(\xi_l-\xi_{l-1})^{-k}}.$$

Приравняв к нулю определитель однородной линейной системы уравнений с неизвестными a^i_n, b^i_n, $i=0,1,\ n=0,1,\ldots$, где $a^0_0=b^\mu_0=0$, образованной в результате сшивания общего решения уравнений Максвелла на границе сердцевина-оболочка $(\xi=\xi_L)$, получим уравнение относительно неизвестной фазовой постоянной γ

$$\det(P^{\mu\nu}Q^{\mu\nu})=0,\quad \mu,\nu\in\{0,1\},$$

где

$$P^{\mu\nu}=(P^{\mu\nu}_{mn}),\quad Q^{\mu\nu}=(Q^{\mu\nu}_{mn}),\quad m,n=0,1,\ldots,$$

$$Q^{\mu\nu}_{mn} = \begin{pmatrix} h^{0,0,L+1}_{mn0} & \vdots & h^{0,1,L+1}_{mn0}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ h^{1,0,L+1}_{mn0} & \vdots & h^{1,1,L+1}_{mn0}\end{pmatrix}\quad (n+\nu\neq0),$$

$$Q^{\mu0}_{m0} = \begin{pmatrix} h^{0,1,L+1}_{m00}\\ \cdots\\ h^{1,1,L+1}_{m00}\end{pmatrix},$$

$$P^{\mu\nu}_{mn} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{00}u^{-2}_{L+1}c^{1-\mu,L+1,1}_{2m+\nu,2n+\nu} & \delta^n_m & -\delta^n_m\gamma u^{-2}_{L+1}K^{1-\mu}_{2n+\nu} & 0\\ -\delta^n_m\varepsilon_{00}u^{-2}_{L+1}K^\mu_{2n+\nu} & 0 & -\gamma u^{-2}_{L+1}c^{\mu,L+1,1}_{2m+\nu,2n+\nu} & \delta^n_m\end{pmatrix}\quad (m+\nu\neq0),$$

$$P^{\mu0}_{00} = \Big(-\mu\varepsilon_{00}u^{-2}_{L+1}K^1_0,\quad 1-\mu,\quad -(1-\mu)\gamma u^{-2}_{L+1}K^1_0,\quad \mu\Big),$$

$$P^{\mu0}_{0n} = \Big((1-\mu)\varepsilon_{00}u^{-2}_{L+1}c^{1,L+1,1}_{0,2n},\quad 0,\quad -\mu\gamma u^{-2}_{L+1}c^{1,L+1,1}_{0,2n},\quad 0\Big),\quad n=1,2,\ldots,$$

$$K_m^\alpha = \frac{\frac{d}{d\xi}[M_m^\alpha(\xi, q_{L+1})]_{\xi=\xi_L}}{M_m^\alpha(\xi_L, q_{L+1})}, \quad \alpha = 0, 1,$$

которое является дисперсионным уравнением для четных мод ${}_{\mathrm{e}}\mathrm{HE}_{mn}$ и ${}_{\mathrm{e}}\mathrm{EH}_{mn}$, если $\mu = 0$, или для нечетных мод ${}_{\mathrm{o}}\mathrm{HE}_{mn}$ и ${}_{\mathrm{o}}\mathrm{EH}_{mn}$, если $\mu = 1$, с азимутальным индексом $m = 2k + \nu$, $k = 0, 1, \ldots$.

Переходя в этом уравнении к пределу $\gamma \to \sqrt{\varepsilon_{00}}$, получим уравнение относительно неизвестной длины волны $\lambda = 2\pi k_0^{-1}$

$$\det[R^{\mu\nu} Q^{\mu\nu}(\gamma = \sqrt{\varepsilon_{00}})] = 0, \quad \mu, \nu \in \{0, 1\},$$

где

$$R^{\mu\nu} = (R_{mn}^{\mu\nu}), \quad m, n = 0, 1, \ldots,$$

$$R_{00}^{\mu 0} = \begin{pmatrix} \mu, & 0, & 1-\mu, & 0 \end{pmatrix},$$

$$R_{00}^{\mu 1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad R_{0m}^{\mu\nu} = R_{m0}^{\mu\nu} = \delta_0^m R_{00}^{\mu\nu},$$

$$R_{mn}^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \delta_m^n (-1)^\mu \sqrt{\varepsilon_{00}} & 0 & \delta_m^n & 0 \\ -\dfrac{\delta_{m\pm1}^n (-1)^\mu \pi^2 \varepsilon_{00}}{\lambda^2 a^{-2}(m+n+\nu)} & \delta_m^n & \dfrac{\delta_m^n \sqrt{\varepsilon_{00}}[(2m+\nu)\operatorname{ch} 2\xi_L + \operatorname{sh} 2\xi_L]}{\lambda^2 \pi^{-2} a^{-2}[(2m+\nu)^2 - 1]} & -\delta_m^n (-1)^\mu \end{pmatrix},$$

$m, n = 1, 2, \ldots$, которое является уравнением для критических длин волн для четных $(\mu = 0)$ или нечетных $(\mu = 1)$ направляемых мод с четным $(\nu = 0)$ или нечетным $(\nu = 1)$ азимутальным индексом.

Литература

1. *Кривенков В.И.* // ДАН. 2002. **382**, №1. С. 38.
2. *Кривенков В.И.* // ДАН. 2002. **386**, №6. С. 749.
3. *Кривенков В.И.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2004. №3. С. 19 (Moscow University Phys. Bull. 2004. N 3).
4. *Кривенков В.И.* // ДАН. 2001. **378**, №6. С. 751.
5. *Абрамовиц М., Стиган И.* Справочник по специальным функциям. М., 1979.

Поступила в редакцию
15.12.03