УДК 523.165

СТРУКТУРА АНАЛИТИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ СТАЦИОНАРНОЙ ЗАДАЧИ О МОДУЛЯЦИИ КОСМИЧЕСКИХ ЛУЧЕЙ В ГЕЛИОСФЕРЕ

А. А. Суслов, Б. Ю. Юшков

(*НИИЯФ*)

В предположении сферически-симметричной стационарной модели гелиосферы найдена структура аналитического решения уравнения Фоккера–Планка, описывающего модуляцию космических лучей в гелиосфере. В общем виде задача решения уравнения в частных производных второго порядка сводится к нахождению корней нелинейных алгебраических уравнений и вычислению определенных интегралов от непрерывных функций. Впервые решение получено для произвольной формы спектра космических лучей на границе области модуляции и для произвольной энергетической зависимости коэффициента диффузии.

Постановка задачи

Аналитические решения уравнения Фоккера–Планка для модуляции космических лучей (КЛ) в гелиосфере были получены несколькими авторами [1–4] при упрощенных предположениях, не соответствующих реальным условиям: либо первичный спектр КЛ принимался в «чисто» степенной форме, либо делались специальные предположения об энергетической зависимости коэффициента диффузии (КД). В работе [5] был предложен новый метод решения задачи о модуляции КЛ в сферически-симметричной модели, сводящий задачу с начальными условиями (задачу Коши) к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. В настоящей работе на основе [5] найдена структура аналитического решения уравнения Фоккера–Планка при следующих весьма общих предположениях об условиях в гелиосфере.

1. Вся гелиосфера (область околосолнечного пространства, обусловленная взаимодействием солнечного ветра с межзвездной средой) условно разбивается на три подобласти:

$0 < r < r_0$;

$r_0 - \varepsilon < r < r_0 + \varepsilon$, где r_0 — гелиоцентрический радиус ударной волны, которая предполагается идеальной, т.е. имеющей толщину фронта $\varepsilon \to 0$;

$r_0 < r \leqslant r_\infty$, где r_∞ — расстояние, на котором скорость солнечного ветра становится равной скорости движения межзвездной среды относительно Солнца.

При $r < r_0$ скорость солнечного ветра $V_1 = V_{01} = \mathrm{const}$, а при $r > r_0$ скорость плазмы меняется по закону $V_2 = V_{02}(r_0/r)^2$, что соответствует течению несжимаемой жидкости; при этом $V_{02} = V_{01}/\sigma$, где σ — отношение сжатия на ударной волне.

2. КД представляется в виде произведения двух непрерывных функций: координатно-временной $k(r,t)$ и жесткостной $k(R)$ частей, т.е. $k(r,R,t) = k(r,t)\cdot k(R)$, где $R = (A/Z)pc$ — жесткость частиц, p — импульс на нуклон, c — скорость света, A — массовое число и Z — заряд частиц в единицах заряда электрона.

3. Спектр КЛ на границе области модуляции $n_0(R_0)$ задается непрерывно дифференцируемой функцией с показателем

$$\gamma_{n_0}(R_0) = -\frac{d\ln n_0(R_0)}{d\ln R_0},$$

где $R_0, n_0(R_0)$ — жесткость и плотность частиц. Здесь и далее нулевым индексом обозначены величины на границе области модуляции.

Основные уравнения

Нестационарное уравнение Фоккера–Планка, описывающее модуляцию КЛ с учетом диффузии, конвекции и изменения энергии частиц, может быть записано в виде

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \nabla(k\nabla F) - V\nabla F + \frac{R}{3}\nabla V\frac{\partial F}{\partial R}. \qquad (1)$$

Здесь k — КД, V — скорость солнечного ветра, F — изотропная часть функции распределения, которая связана с плотностью частиц n соотношением $F = 4\pi R^2 n$.

Следуя методу, изложенному в работе [5], ищем решение уравнения (1) в виде

$$n(r,R,t) = n_0(r_0, R+\Delta R, t_0)\left(\frac{R}{R+\Delta R}\right)^2, \qquad (2)$$

учитывая, что $\Delta R = \Delta R(r,R,t)$ и на границе области модуляции $R_0 = R + \Delta R$.

Дифференцируя соотношение (2) по соответствующим переменным и подставляя в уравнение (1), получим уравнение для изменения жесткости частиц с граничным условием $\Delta R = 0$:

$$\frac{\partial \Delta R}{\partial t} = \left(\frac{2k}{r} + \frac{\partial k}{\partial r} - V - k\varphi(R_0)\frac{\partial \Delta R}{\partial r} + k\frac{\partial^2 \Delta R}{\partial r^2}\Big/\frac{\partial \Delta R}{\partial r}\right)\frac{\partial \Delta R}{\partial r} + \frac{R}{3}\nabla V\left(1 + \frac{\partial \Delta R}{\partial R}\right),$$

где функция

$$\varphi(R_0) = \frac{3+\gamma_{n_0}}{R_0} - \frac{1}{2+\gamma_{n_0}}\frac{d\gamma_{n_0}}{dR_0} \qquad (3)$$

полностью определяется формой спектра на границе области модуляции. Далее, произведя замену переменных по формуле

$$\frac{\partial \Delta R}{\partial r} = -\frac{V}{3k} f(R + \Delta R),$$

где f — произвольная (пока неизвестная) непрерывно дифференцируемая по всем аргументам функция, получим квазилинейное уравнение в частных производных первого порядка для изменений жесткости частиц, которое по физическому смыслу представляет собой уравнение непрерывности для изменения энергии частиц КЛ:

$$\frac{\partial \Delta R}{\partial t} = \left[k\frac{\nabla V}{V} - V + \frac{V}{3}\left(\varphi f(R_0) - f'\right)\right]\frac{\partial \Delta R}{\partial r} + \frac{R}{3}\nabla V\left(1 + \frac{\partial \Delta R}{\partial R}\right), \tag{4}$$

где $f' = df(R_0)/dR_0$. Система характеристических уравнений для уравнения (4) может быть записана в виде

$$dt = -\frac{dr}{k\frac{\nabla V}{V} - V + \frac{V}{3}(\varphi f - f')} = -\frac{3dR}{R\nabla V} = \frac{3d\Delta R}{R\nabla V}. \tag{5}$$

Видно, что функция $R + \Delta R = \mathrm{const}$ является интегралом системы (5). Поэтому функция $f(R + \Delta R)$ также является интегралом системы (5) и вследствие постоянства вдоль характеристик может быть определена из условий на границе области модуляции. Используя метод, изложенный в работе [5], получим для функции $f(R_0)$ обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка:

$$f' = \varphi(R_0)f(R_0) - 3 + \frac{3k(r_0, R_0, t_0)}{V_0}\frac{\nabla V_0}{V_0}\left(1 - \frac{R_0}{f(R_0)}\right). \tag{6}$$

Исследование уравнения (6) показывает, что при $R_0 \to \infty$ функция $f(R_0) \to R_0$, а ее производная $f' \to 1$, и уравнение (6) можно представить как квадратное уравнение

$$\varphi(R_0)f^2(R_0) + \left(\frac{3k(r_0, R_0, t_0)}{V_0}\frac{\nabla V_0}{V_0} - 3 - f'\right)f(R_0) - \frac{3k(r_0, R_0, t_0)}{V_0}R_0\frac{\nabla V_0}{V_0} = 0$$

и решать его методом итераций, принимая при достаточно больших R_0 (реально $R_0 \geqslant (A/Z)m_0c^2$) начальное значение $f' = 1$ и уточняя это значение по мере продвижения от больших R_0 к меньшим.

Аналитическое решение стационарной задачи

В стационарной задаче КД, скорость солнечного ветра и спектры КЛ не зависят от времени.

Для $r > r_0$ с учетом принятых при постановке задачи предположений член, описывающий изменение жесткости частиц КЛ в уравнении (1), обращается в нуль и уравнение имеет известное решение, зависящее от спектра КЛ (первичное граничное условие) на границе гелиосферы $n(r_\infty, R)$ и от КД $k_2 = k_{02}k_2(r)k_2(R)$:

$$n(r \geqslant r_0 + 0, R) = n(r_\infty, R)\exp\left(-\frac{V_{02}r_0^2}{k_{02}k_2(R)}\int_r^{r_\infty}\frac{dr}{r^2k_2(r)}\right). \tag{7}$$

Решение для $r < r_0$ найдем, используя из системы уравнений (5) следующее характеристическое уравнение:

$$\frac{dr}{dR} = \frac{3k}{VR} - \frac{3V}{R\nabla V} + \frac{V}{R\nabla V}(\varphi f - f'). \tag{8}$$

В сферически-симметричной модели $\nabla V = 2V/r + dV/dr$, и уравнение (8) принимает вид

$$\frac{dr}{r} + \frac{1}{2V}\frac{dV}{dr}dr = \frac{3k(r)}{V}\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{2V}\frac{dV}{dr}\right)\frac{k(R)}{R}dR + \frac{\varphi f - f' - 3}{2}\frac{dR}{R}.$$

Отсюда методом комбинирования характеристик получаем

$$\begin{aligned}\frac{1}{2V}\frac{dV}{dr}dr - \frac{1}{2V}\frac{dV}{dr}\frac{3k(r)}{V}\frac{k(R)}{R}dR &= \frac{dV}{2V}\left(1 - \frac{3k(r)k(R)}{VR}\frac{dR}{dr}\right) = \\ &= \frac{1}{2}\frac{dV}{V}\frac{V}{\nabla V}\frac{1}{R}(\varphi f - f' - 3)\frac{dR}{dr} = \\ &= \frac{1}{2V}\frac{dV}{dr}\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{2V}\frac{dV}{dr}\right)^{-1}\frac{\varphi f - f' - 3}{2}\frac{dR}{R}.\end{aligned}$$

В результате преобразований для $r \leqslant r_0$ в приближении бесконечно тонкого, но непрерывного фронта имеем характеристическое уравнение:

$$\frac{dr}{r} + \frac{r_0}{2V}\frac{dV}{dr}\left(\frac{r_0}{r} + \frac{r_0}{2V}\frac{dV}{dr}\right)^{-1}\Phi(R_0)\frac{dR}{R} = \frac{3k(r)}{Vr}\frac{k(R)}{R}dR + \Phi(R_0)\frac{dR}{R}, \tag{9}$$

где функция

$$\Phi(R_0) = \frac{\varphi(R_0)f(R_0) - f'(R_0) - 3}{2}$$

является интегралом уравнения (9), постоянна вдоль характеристик для $r < r_0$ и полностью определяется условиями на границе области модуляции $r = r_0 - 0$ (см. (3) и (6)). Принимая для $r < r_0$ координатную зависимость КД в виде $k_1(r) = k_{01}r/r_0$, получим при условии $r < r_0$ $(dV/dr = 0)$ следующее алгебраическое уравнение для адиабатических потерь энергии (жесткости) частиц КЛ $\Delta_1 R(r, R)$:

$$\int\limits_{R}^{R+\Delta_1 R} \frac{k(R)}{R} dR + \tag{10}$$

$$+\frac{V_{01} r_0}{3k_{01}} \Big(\Phi(R + \Delta_1 R) \ln \frac{R + \Delta_1 R}{R} - \ln \frac{r_0}{r} \Big) = 0.$$

После вычисления корней $\Delta_1 R(r, R)$ алгебраического уравнения (10) спектры КЛ для $r < r_0$ могут быть определены из условия непрерывности функции распределения по формуле

$$n(r < r_0, R) = \Big(\frac{R}{R + \Delta_1 R} \Big)^2 n(r_0 - 0, R + \Delta_1 R).$$

Спектр КЛ на внешней границе ударной волны $n(r_0 + 0, R_0)$ вычисляется по формуле (7) и играет роль вторичного граничного условия. Для трансформации этого спектра в спектр на внутренней границе ударной волны $n(r_0 - 0, R_0)$, который служит граничным условием для уравнения (10), воспользуемся известными соотношениями (см., напр., [6]), связывающими спектры КЛ до и после прохождения фронта ударной волны, в приближении бесконечно-тонкого плоского ударного фронта. Эти соотношения, полученные из условий непрерывности функции распределения и непрерывности нормальной к фронту составляющей плотности тока КЛ, справедливы при $r_0 V/k \gg 1$, т.е. для относительно малых энергий частиц КЛ, и могут быть записаны в виде

$$n(r_0 - 0, R_0) = \nu R_0^{2-\nu} \int\limits_{R_s}^{R_0} n(r_0 + 0, R') \cdot (R')^{\nu - 3} dR',$$
$$R_0 > R_s,$$

где показатель спектра $\nu = 3\sigma/(\sigma - 1) = 3V_{01}/(V_{01} - -V_{02})$, R_s — начальная жесткость $(R_s \sim 0,05 \div \div 0,1$ ГВ), $R_0 = R + \Delta_1 R$ — «начальная» жесткость для решения уравнения (10).

Обсуждение

Структура аналитического решения уравнения Фоккера–Планка для сферически-симметричной модели гелиосферы найдена впервые при достаточно общих предположениях о форме первичного спектра КЛ и энергетической зависимости КД. Однако при применении полученных результатов для конкретных задач следует учитывать следующие ограничения.

Согласно современным теоретическим представлениям и экспериментальным данным, получаемым с удаленных от Земли космических аппаратов, реальная гелиосфера сферически-асимметрична и нестационарна. Это следует из существования гелиоширотных градиентов потоков КЛ, зависимости их величин от уровня солнечной активности и смены их знака при изменении полярности общего магнитного поля Солнца.

Сферическая асимметрия гелиосферы обусловлена наличием отличной от нуля (25 км/с) относительной скорости движения Солнечной системы и межзвездной среды, а также зависимостью от гелиоширотного и азимутального углов составляющих тензора диффузии и скорости солнечного ветра. Нестационарность модели связана в основном с зависимостью составляющих тензора диффузии от уровня солнечной активности (т. е. от времени).

Однако исследование уравнения (1) показывает, что такая важная характеристика, как форма спектра КЛ, определяется в основном энергетической зависимостью КД, а координатная зависимость влияет на интенсивность КЛ и величину градиентов интенсивности.

Поэтому, несмотря на отмеченные ограничения, для решения таких задач, как определение формы энергетических (жесткостных) спектров КЛ на различных гелиоцентрических расстояниях от Солнца, отношения величин потоков КЛ с различными зарядами и массами, формы спектра КЛ вне области модуляции, обычно используется сферически-симметричная модель. Это связано с тем, что указанная модель имеет минимальное количество свободных параметров, которые необходимо задавать при решении уравнения Фоккера–Планка.

В заключение отметим, что найденная в работе структура решения может служить хорошим репером при проверке правильности решений, получаемых численными методами, она также помогает корректно поставить задачу для нестационарной модели.

Литература

1. *Дорман Л.И., Кац М.Е., Носов С.Ф.* и др. // Геомагнетизм и аэрономия. 1982. **22**. С. 705.
2. *Webb G.M., Forman M.A., Axford W.I.* // Astrophys. J. 1985. **298**. P. 684.
3. *Зусманович А.Г.* Галактические космические лучи в межпланетном пространстве. Алма-Ата: Наука, 1986. С. 17–30.
4. *Чалов С.В.* // Геомагнетизм и аэрономия. 1987. **27**. С. 900.
5. *Суслов А.А.* // Изв. РАН. Сер. физ. 1995. **59**, № 4. С. 97.
6. *Березинский В.С., Буланов С.В., Гинзбург В.Л.* и др. Астрофизика космических лучей. М.: Наука, 1990. С. 453–463.

Поступила в редакцию
15.10.99