

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

имени М.В. Ломоносова

---

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

*На правах рукописи*

УДК 534.2

**Козлов Антон Владимирович**

**Потоки энергии и эффекты локализации  
акустических волн в твердых телах  
с элементами радиальной симметрии**

*Специальность 01.04.06 – акустика*

**Автореферат**

**диссертации на соискание ученой степени**

**кандидата физико-математических наук**

## Москва – 2011

Работа выполнена на физическом факультете Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова.

Научный руководитель:

кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник  
Владимир Геннадиевич Можаяев.

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук, профессор  
Владимир Иванович Балахший (физический факультет МГУ),

кандидат физико-математических наук  
Вадим Моисеевич Левин (зав. лабораторией акустической микроскопии Института биохимической физики РАН).

Ведущая организация:

Институт радиотехники и электроники имени В.А. Котельникова РАН.

Защита состоится 16 февраля 2012 г. в 16-00 часов на заседании диссертационного совета Д.501.001.67 по адресу: Москва, Ленинские горы, д. 2, стр. 1, Московский государственный университет, физический факультет, центральная физическая аудитория имени Р.В. Хохлова.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке физического факультета Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова.

Автореферат разослан 13 января 2012 г.

Ученый секретарь

диссертационного совета Д.501.001.67

кандидат физико-математических наук, доцент

А.Ф. Королев

## **ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА НАУЧНОГО НАПРАВЛЕНИЯ И ЕГО АКТУАЛЬНОСТЬ**

Акустические волны находят широкие применения в науке и технике, в том числе в таких практически значимых областях как ультразвуковая дефектоскопия и неразрушающий контроль материалов, акустическая микроскопия, акустоэлектроника и акустооптика. При проектировании акустических устройств и анализе акустических процессов в этих областях необходимо учитывать множество факторов, влияющих на распространение акустических волн в твердом теле, в том числе отражение, рефракцию, дифракцию, фокусировку и другие. Развитый к настоящему времени математический аппарат акустики твердых тел позволяет определять условия распространения различных типов волн и описывать их свойства и сопутствующие физические эффекты. Однако многие задачи решаются лишь численно или с применением комбинированных численно-аналитических методов. Это связано со сложностью геометрических и физических условий многих интересных для практики задач, а также с попытками учесть как можно большее число так называемых вторичных факторов – тонких физических эффектов, влияющих на количественные изменения тех или иных физических величин в реальных условиях. С другой стороны, в некоторых частных случаях получение точных аналитических решений все же возможно вследствие наличия определенной геометрической или физической симметрии рассматриваемых задач. В частности, такая возможность существует в акустике анизотропных твердых тел. Конечно, такого рода решения зачастую можно найти лишь для некоторых конкретных условий, например, для определенного класса кристаллов и их срезов. Однако они представляются более ценными по сравнению с численными решениями, поскольку позволяют глубже понять физические процессы, протекающие при распространении акустических волн. Кроме того, точные решения могут объяснять и предсказывать наличие новых физических эффектов, а также служить основой для построения решений и изучения более сложных задач путем обобщения результатов с помощью теории возмущений.

В настоящей диссертационной работе особое внимание уделяется задачам о распространении акустических волн и пучков в анизотропных средах, обладающих элементами радиальной (т.е. сферической или цилиндрической) симметрии. Подчеркнем, что рассматриваемые элементы симметрии кроме геометрии изучаемых задач могут характеризовать и материальные свойства волновых сред. В частности, важным свойством кристаллов является наличие у них осей симметрии различных порядков. Исследование в данной диссертации анизотропных акустических явлений было в основном инициировано отсутствием в литературе общего теоретического объяснения и понимания явления

фононной фокусировки. Под термином "фононная фокусировка" обычно подразумевается усиление концентрации акустической энергии, излучаемой ограниченным источником в анизотропной среде, в некоторых направлениях распространения волн от источника. В настоящей работе для анализа данного явления в качестве первого шага была рассмотрена задача о распространении акустических волн от точечного источника в однородном изотропном твердом теле. К настоящему времени можно считать твердо установленным факт отсутствия какой-либо концентрации излучения (в дальнем поле) от точечного источника в идеальных жидкостях или газах. С другой стороны, как показал анализ литературы, задача о распространении энергии от такого источника в твердых телах исследована недостаточно полно. А именно, для векторного источника (точечной силы), находящегося в безграничном однородном изотропном твердом теле, до сих пор не было проведено анализа энергетических характеристик. При изучении этого вопроса в данном исследовании первоначально предполагалось, что для такого источника можно будет лишь подтвердить известный вывод об отсутствии нерадиальных потоков энергии. Наличие нерадиальных потоков энергии, как следует ожидать, может объяснить известный эффект сингулярной фононной фокусировки в кристаллах. Однако, как показал проведенный расчет, даже для такого простого случая радиальность, т.е. прямолинейность, распространения средних по времени потоков акустической энергии оказывается нарушенной. Этот результат является, несомненно, важным для развития и уточнения фундаментальных физических представлений о волновых свойствах материальных сред.

В последнее время наблюдается повышенный интерес к так называемому явлению отрицательной рефракции. Суть этого явления заключается в том, что на плоской границе раздела с так называемым "отрицательным" материалом преломление волновых лучей может происходить в необычную сторону относительно нормали к границе. При этом отрицательная рефракция может приводить к фокусировке расходящегося пучка излучения при прохождении плоской границы раздела. Следует отметить, что данный эффект был предсказан теоретически еще в 60-х годах XX века для электромагнитных волн в гипотетических материалах, которые должны были бы обладать одновременно отрицательными показателем преломления и магнитной восприимчивостью. В начале XXI века такие искусственные материалы были получены, но, необходимо отметить, что они проявляют свойство отрицательной рефракции для электромагнитных волн только в определенном диапазоне частот и, строго говоря, не могут быть названы сплошными средами. В то же время, из-за схожести определенных волновых свойств, изучение "отрицательных" оптических материалов привело к образованию нового направления и в акустике. Дело в том, что для акустических волн свойство отрицательной рефракции также

может иметь место не только в аналогичных метаматериалах, но и в сильно анизотропных кристаллах, причем в последнем случае данный эффект не является частотно-избирательным. Это связано с наличием на поверхностях обратных фазовых скоростей (далее будет использоваться термин "медленность") локальных вогнутостей. В случае если волновой вектор волны, преломленный на границе раздела с таким анизотропным кристаллом, попадает в вогнутый сектор поверхности медленности, луч, соответствующий данной волне, будет испытывать отрицательную рефракцию. Необходимо отметить, что первые попытки описания именно такой акустической отрицательной рефракции в кристалле относятся к 2004 году, причем рассмотрение данного явления проводилось на уровне численного моделирования по аналогии с электромагнитным случаем. В то же время в полной мере известные аналитические методы кристаллоакустики не применялись. В настоящей диссертационной работе впервые была разработана теория распространения акустических пучков в условиях отрицательной рефракции в анизотропном кристалле. Кроме того, новые волновые свойства и явления, связанные с отрицательной рефракцией, как будет показано ниже, могут проявляться и в другом важном применении сфокусированных акустических волн – в акустической микроскопии, в случае, когда изучаемым образцом является акустически анизотропный материал. Необходимо подчеркнуть, что отрицательная рефракция в кристаллоакустике непосредственно связана с анизотропией среды, в которой распространяются волны. Как было указано выше, в сильно анизотропных кристаллах вопрос о распространении локализованной (сфокусированной) акустической энергии исследован недостаточно полно. Таким образом, часть данной диссертационной работы посвящена получению аналитических решений для сфокусированных полей акустических пучков в анизотропных средах, исследованию их пространственного распределения и условий фокусировки. При этом выводы и результаты, полученные при рассмотрении задач фокусировки и волноводного (локализованного) распространения акустических волн в анизотропных средах столь же актуальны и для других типов волн, имеющих вогнутости на соответствующих поверхностях медленности. В качестве примера можно привести спиновые волны, магнитоупругие волны, электромагнитные волны в плазме и прочие. С этой точки зрения условия локализации волновых пучков в среде с неоднородным профилем скорости являются столь же общими и могут применяться для волн любой природы.

Другим важным аспектом применения разрабатываемой в данной диссертационной работе теории локализованных акустических волн является анализ поведения таких волн в ограниченных структурах – резонаторах. Этот вопрос имеет особую актуальность вследствие широкого распространения различных резонансных систем в практических применениях.

Реализацией одного из таких применений являются, например, кристаллические резонаторы (в частности, кварцевые), которые используются как основной частотно-задающий элемент во многих радиоэлектронных системах. При этом основной подход к расчету таких резонаторов, видимо вследствие исторических причин их возникновения и разработки, основан на априорном задании формы таких резонаторов в виде элементов с плоскими и сферическими отражающими поверхностями по аналогии с обыкновенными изотропными резонаторами наподобие тех, что используются в лазерной оптике. С другой стороны, материал пьезорезонаторов в большинстве случаев представляет собой анизотропный кристалл, и потому для правильного описания акустических полей в этих резонаторах необходимо последовательная теория распространения акустических волн в таких ограниченных структурах. Развиваемый в настоящей диссертационной работе подход на основе параксиальных акустических пучков позволяет получить аналитические выражения для полей акустических мод в пьезорезонаторах.

Задача о локализации и концентрации акустической энергии, как уже было указано, является весьма интересной как с теоретической, так и с практической точки зрения. Для ее решения используются не только плоско-выпуклые резонаторы, но и различные отражающие поверхности и замкнутые объемы более сложной и интересной формы. Например, одной из интересных и новых форм таких резонаторов является резонатор в виде пирамиды, исследованию которых также посвящена часть настоящей диссертационной работы.

Таким образом, актуальность работы обусловлена широким применением в настоящее время анизотропных материалов и объектов в устройствах акустоэлектроники и акустооптики, их исследованием в акустической микроскопии, а также фундаментальной важностью изучения в акустике явлений дифракции, фокусировки, волноводного распространения и резонанса.

## **ЦЕЛЬ РАБОТЫ**

Цель настоящей работы состоит в обнаружении и теоретическом изучении новых особенностей акустических явлений дифракции, фокусировки, волноводного распространения и резонанса в средах, форма или анизотропия которых имеет элементы радиальной симметрии.

## **НАУЧНАЯ НОВИЗНА**

1. Показано, что традиционные представления о прямолинейности распространения волновых лучей и потоков волновой энергии имеют ограниченную применимость. А именно, потоки энергии акустических волн от точечного силового гармонического

источника в однородном изотропном твердом теле, как показал проведенный точный расчет, не являются радиальными, а содержат осциллирующую угловую составляющую.

2. Впервые рассмотрена возможность создания акустического аналога линзовой линии на основе планарных периодических кристаллических слоев, в которых фокусировка реализуется за счет анизотропии и вызванной ею отрицательной рефракции.
3. Выявлена новая возможность возникновения дополнительных сигналов из-за отрицательной рефракции при акустомикроскопическом исследовании анизотропных пластин.
4. Предсказан новый эффект волноводной локализации в градиентных анизотропных средах с профилем скорости, который согласно традиционным представлениям является антиволноводным, т.е. должен приводить не к локализации волнового поля, а к формированию зоны тени.
5. Реализована оригинальная процедура нахождения явных выражений для коэффициентов локальной аппроксимации поверхности медленности объемных акустических волн эллипсоидом в общем анизотропном случае. На ее основе разработана последовательная схема перехода от задачи распространения акустических пучков в средах с эллипсоидальной анизотропией к изотропной задаче, что позволило получить корректные, в отличие от ранее опубликованных, аналитические результаты для гауссовых пучков с учетом их анизотропного сноса.
6. Разработан альтернативный подход к анализу мод планарно-выпуклых кристаллических резонаторов, основанный на использовании анизотропных решений для гауссовых пучков. Подход позволил смоделировать тонкие эффекты анизотропного расщепления и снятия вырождения мод, наблюдавшиеся ранее в эксперименте [1].
7. Впервые получено точное аналитическое решение, описывающее волновые резонансы в объеме пирамиды. Решение относится к случаю акустических резонансов в пирамидальной полости, заполненной идеальной жидкостью или газом, имеющей форму правильной пирамиды с квадратным основанием и взаимно ортогональными противоположными боковыми гранями.

## **НАУЧНАЯ И ПРАКТИЧЕСКАЯ ЗНАЧИМОСТЬ РАБОТЫ**

1. Исследование энергетических характеристик силового точечного источника в безграничном однородном изотропном твердом теле позволяет сделать вывод о границе применимости классических научных представлений о точечном источнике

акустических волн, как об идеальном объекте, имеющем в дальнем поле пространственно-однородную структуру поля.

2. Развитое в настоящей работе обобщение метода параксиального и параболического уравнения на случай анизотропной среды с различными локальными типами поверхности медленности дает возможность для изучения широкого круга явлений, связанных, в частности, с отрицательной рефракцией. Новые аналитические решения для автоколлимированных пучков в присутствии фоновой фокусировки могут быть использованы для построения волноводов с сильно подавленными дифракционными потерями.
3. На основе знаний о распространении акустической энергии в анизотропных кристаллах возможно создание акустических линз и линзовых линий, обладающих уникальным свойством – отсутствием привязанности локализованных колебаний к какой-либо геометрической оси симметрии. В частности, это позволяет проектировать резонаторы и сенсоры с плоскими отражающими поверхностями.
4. В акустической микроскопии обнаруженный физический механизм, который приводит к дополнительным осцилляциям в выходном сигнале и связан с присутствием отрицательной рефракции в образце, позволяет определить способы изучения внутренних упругих характеристик таких образцов и усилить контраст получаемой информации.
5. Рассмотренные условия локализации акустических волн в анизотропных средах при антиволноводном профиле фазовой скорости, т.е. в случае, когда фазовая скорость имеет на оси волновода максимум, а не минимум, необходима как для фундаментального понимания процесса распространения в неоднородной анизотропной среде в целом, так и, в частности, для разработки и создания устройств с подавленной дифракционной расходимостью волноводных пучков. Выводы этой части диссертации являются общими и применимы, в принципе, для волн любой природы, имеющих локальную вогнутость на поверхности медленности. Простая физическая интерпретация волноводных мод позволяет объяснить возможность существования таких мод на языке лучевой теории.
6. Применение теории параксиальных пучков для анализа локализованных колебаний в ограниченных системах – в частности, в пьезорезонаторах, позволяет аналитически рассчитывать форму отражающих поверхностей, необходимую для минимизации дифракционных и рефракционных потерь. В свою очередь, это дает возможность увеличить добротность резонаторов, а также указать на необычный вариант их формы в случае, если они изготовлены из кристаллов с отрицательной рефракцией. А именно



плоско-выпуклый тип резонаторов должен быть заменен в таком случае на плоско-вогнутый.

7. Исследуемые автором резонаторы пирамидальной формы используются, в частности, в качестве эжекторов сверхмалых капель и квантовых точечных резонаторов. В настоящей работе были получены простые аналитические выражения для собственных мод подобных пирамидальных резонаторов, причем данные результаты согласуются с экспериментальными и эмпирическими наблюдениями. С научной точки зрения эта задача также интересна возможностью сравнения волнового и лучевого решений, которые здесь дают одинаковые результаты.

### **ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ, ВЫНОСИМЫЕ НА ЗАЩИТУ**

1. Потоки энергии акустических волн от точечного монохроматического силового источника в однородном изотропном твердом теле имеют осциллирующую угловую составляющую, т.е. не являются радиальными и в ближнем, и в дальнем поле.
2. В периодической системе плоскопараллельных анизотропных слоев с отрицательной рефракцией выбором толщины слоев достигается подавление дифракционной расходимости и формирование квазиволноводных акустических пучков.
3. Отрицательная рефракция в анизотропных образцах вызывает появление дополнительных осцилляций в выходном сигнале акустического микроскопа, когда фокус микроскопа смещается в область не под поверхностью образца, как для известных ранее осцилляций, а над поверхностью.
4. Волноводный захват изгибных волн в неоднородных кристаллических пластинах в направлении, где угловая зависимость волновых чисел локально описывается вогнутой кривой, происходит в том случае, когда скорость в этом направлении достигает не минимума, как в изотропных средах, а максимума.
5. Аппроксимацию поверхности медленности кристаллов эллипсоидом для нахождения аналитических решений для акустических пучков в целях упрощения целесообразно изначально проводить не в определителе матрицы уравнения Грина-Кристоффеля, а в ее элементах. Корректное решение для пучков находится сведением эллипсоидальной анизотропии к полной изотропии поворотами и масштабированием координат в физическом и фазовом пространствах.
6. Теория планарно-выпуклых кристаллических резонаторов на основе анизотропных решений для гауссовых пучков является более строгой альтернативой известному подходу, согласно которому поля в резонаторах с искривленной поверхностью локально аппроксимируются полями плоскопараллельного резонатора.

7. Одна четверть мод акустического резонатора в форме пирамидальной полости с квадратным основанием и ортогональными противоположными гранями, с заполнением идеальным газом или жидкостью, представляет собой симметричную комбинацию вырожденных мод куба, составленного из шести одинаковых пирамид указанной формы.

## **АПРОБАЦИЯ РАБОТЫ**

Результаты работы докладывались на следующих научных конференциях:

Международные конференции студентов, аспирантов и молодых ученых по фундаментальным наукам «Ломоносов-2005», «Ломоносов-2006», «Ломоносов-2007» (Москва), Форум "Всемирный год физики в Московском Университете" (Москва, 2006), 20th European Frequency and Time Forum (Braunschweig, Germany, 2006), Всероссийские научные школы-семинары «Волны-2006», «Волны-2007», «Волны-2011» (Москва), XIX сессия Российского акустического общества (Нижний Новгород, 2007), IEEE Ultrasonics Symposium (Rome, Italy, 2009), «Days on Diffraction» (Санкт-Петербург, 2011), «Ломоносовские чтения» (Москва, 2011);

а также на семинарах кафедры акустики физического факультета МГУ (2005-2011), лаборатории акустики Университета Мена (LAUM, Le Mans, France, 2007), лаборатории физической механики Университета Бордо 1 (LMP, Bordeaux, France, 2006), и семинаре теоретического отдела ИОФАН под руководством А.А. Рухадзе (Москва, 2010).

## **ВКЛАД АВТОРА**

Все материалы, вошедшие в данную диссертационную работу, подготовлены либо лично автором, либо совместно с соавторами работ, опубликованных по теме диссертации.

## **ПУБЛИКАЦИИ**

По теме диссертации опубликовано в журналах и сборниках 17 печатных работ (из них 3 статьи в рецензируемых журналах, входящих в список ВАК). Перечень основных публикаций приведен в отдельном списке работ автора после основного списка литературы.

## **СТРУКТУРА И ОБЪЁМ ДИССЕРТАЦИИ**

Диссертация состоит из введения, 5 глав, заключения и списка цитируемой литературы. Общий объем составляет 200 страниц, включая 40 рисунков, и 200 библиографических ссылок.

## **СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ**

**Во введении** обоснована актуальность темы, сформулированы предмет исследования и цели работы, определена научная и практическая значимость проведённых исследований, представлена информация об апробации и вкладе автора, приведены основные положения, выносимые на защиту, а также кратко изложено содержание диссертации по главам.

**В первой главе** приведен анализ теоретических и экспериментальных работ по вопросам распространения акустической энергии в различных средах. Изложен обзор основной литературы по методам расчета и описания потоков акустической энергии, исследованиям в области отрицательной рефракции и метаматериалов, разработки и создания различных типов кристаллических резонаторов, исследованиям распространения акустических пучков в анизотропных средах, а также теоретическим основам акустической микроскопии и фокусировки энергии.

**Во второй главе** рассмотрена задача о распространении акустических волн от точечного векторного монохроматического источника в однородной изотропной среде. Задача об акустическом поле такого источника решалась еще в работе Рэля, но вопрос о пространственном распределении потоков энергии был решен впервые в данной диссертационной работе. Изначально постановка задачи сводилась к проверке того факта, что в дальнем поле потоки энергии от любого точечного источника являются радиальными. Это свойство волновой энергии является общим практически для любых типов волн и до сих пор под сомнение не ставилось. Однако на основе известного точного аналитического решения в настоящей работе показано, что даже в дальнем поле существует нерадиальная составляющая потока энергии. Этот результат проиллюстрирован на рис. 1. Точечная сила действует вдоль оси  $Z$ .

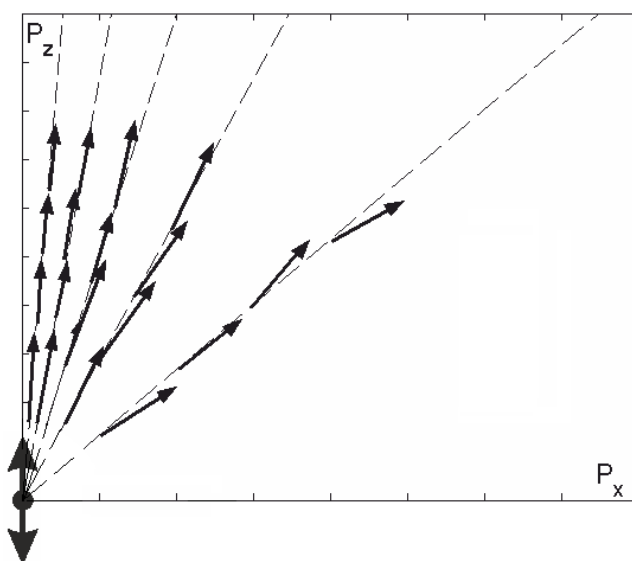


Рис. 1. Потоки акустической энергии от точечного векторного источника в сравнении с радиальными линиями в нескольких произвольных направлениях

В третьей главе проведено обобщение метода параксиального и параболического уравнения на случай распространения акустических волн в анизотропной среде для случая, когда ось пучка является осью симметрии кристалла (или анизотропного материала), в частности, при наличии вогнутостей на поверхности медленности и возможном проявлении эффекта отрицательной рефракции. Отрицательная рефракция способствует фокусировке волн даже на плоской границе раздела изотропная среда – кристалл, хотя строгая аналитическая теория такой анизотропной фокусировки акустических волн до настоящего момента в литературе не была развита. Для корректной фокусировки лучей от точечного волнового источника необходимо использовать поперечно-изотропную линзу с изотропией при повороте вокруг оси, перпендикулярной плоскости ее поверхности. Этим свойством обладают слои гексагональных кристаллов с осью  $Z$ , направленной по нормали к плоскости их границы. Поверхность медленности для акустических волн в таких кристаллах может быть вогнутой вблизи оси  $Z$ , но только для квазипоперечных волн. Такое условие выполняется, в частности, в кристалле цинка, фокусировка в котором за счет отрицательной рефракции исследовалась в работе [2]. На рис. 2 изображено сечение поверхности медленности плоскостью  $XZ$  в этом кристалле. Отметим, что для медленных квазисдвиговых волн кривая медленности имеет заметные (большие по угловому размеру) вогнутые участки вблизи оси  $Z$  (и небольшие вогнутости вблизи оси  $X$ ).

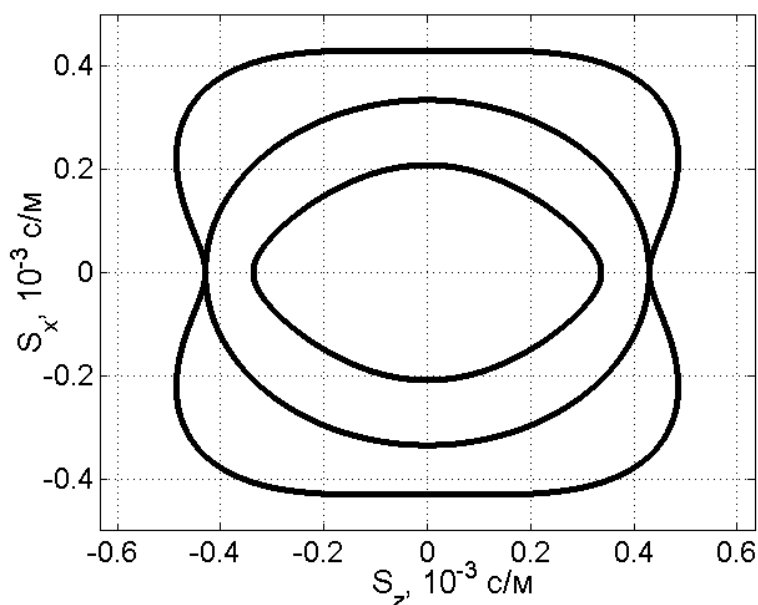


Рис. 2. Сечение поверхности медленности кристалла цинка плоскостью  $XZ$

Для построения данных кривых использованы те же упругие модули, что и в работе [2]. Удобным свойством поверхности медленности является коллинеарность нормали к этой поверхности и вектора групповой скорости. Результаты расчета сечения поверхности

групповых скоростей (т.е. волновой поверхности, определяющей форму волновых фронтов для излучения от точечного источника) на основе этого свойства показаны на рис. 3.

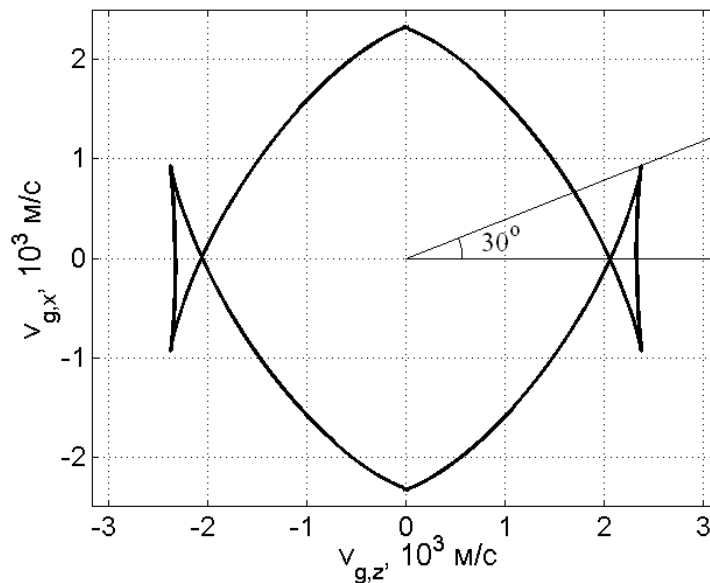


Рис. 3. Сечение XZ волновой поверхности кристалла цинка для медленной квазипоперечной моды

Так называемые "ласточки хвосты", присутствующие на рис. 3, соответствуют вогнутой области поверхности медленности вплоть до точек перегиба. При этом очевидно, что эффект фокусировки посредством анизотропной отрицательной рефракции может иметь место лишь для вогнутых участков волновой поверхности. Такие вогнутости согласно рис. 8 находятся в конусе лучевых углов примерно  $\pm 30^\circ$  от оси Z. Эти пределы определяют максимальную угловую апертуру плоских акустических линз из кристалла цинка.

Анализ распространения акустических пучков в условиях отрицательной рефракции проводился на основе параксиального уравнения, которое при распространении пучка вдоль оси симметрии кристалла имеет вид

$$\rho \ddot{u}_i = C_1 \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_1^2} + C_2 \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_2^2} + C_3 \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_3^2}. \quad (1)$$

В частности, для квази-сдвиговых волн, поляризованных вблизи оси X и распространяющихся вблизи Z  $C_1 = c_{11} - (c_{13} + c_{55})^2 / (c_{33} - c_{55})$ ,  $C_2 = c_{66}$ ,  $C_3 = c_{55}$ ,  $u_i = u_1$ . Решение уравнения (1) ищем в виде волнового пучка, распространяющегося вдоль оси  $x_3$ ,  $u_i = A(x_1, x_2, x_3) \exp(ikx_3 - i\omega t)$ , где  $k^2 = \rho \omega^2 / C_3$ , а под  $u_i$  подразумевается основная компонента смещения или иная полевая переменная акустического поля, относящаяся к этой компоненте. Предположение о слабой зависимости амплитуды  $A$  от  $x_3$  позволяет

пренебречь ее второй производной по  $x_3$ , что приводит к следующему параболическому уравнению

$$C_1 \frac{\partial^2 A}{\partial x_1^2} + C_2 \frac{\partial^2 A}{\partial x_2^2} + 2C_3 ik \frac{\partial A}{\partial x_3} = 0. \quad (2)$$

В случае одинаковых коэффициентов  $C_1$  и  $C_2$  ур. (2) сводится к более простому виду

$$\alpha \Delta_{\perp} A + 2ik \partial A / \partial x_3 = 0, \quad (3)$$

где  $\Delta_{\perp} = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}$ ,  $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ ,  $\tan \phi = x_2 / x_1$ ,  $\alpha = C_1 / C_3$ . Если же коэффициенты  $C_1$  и  $C_2$  имеют различные значения, то переход от уравнения (2) к уравнению (3) также возможен путем изменения масштабов по осям координат  $x_1$ ,  $x_2$ . Замечательным свойством параболического уравнения (3) является существование у него простых аналитических решений, описывающих трехмерную пространственную структуру волновых пучков. В общем случае решения представляются в виде эрмит-гауссовых пучков в декартовых координатах или в виде лягерр-гауссовых пучков в цилиндрических координатах [3]. Простейшим решением является гауссов пучок (нулевая мода) [3,4]

$$A = \frac{A(0)}{(1+iD)} \exp \left[ -\frac{r^2}{a^2(1+iD)} \right], \quad (4)$$

где  $D = 2\alpha x_3 / (ka^2)$ ,  $A(0)$  и  $a$  - произвольные параметры,  $A(0)$  определяет амплитуду волн,  $a$  - минимальную ширину пучка, которая соответствует точке  $x_3 = 0$ . Эта точка является фокусом для пучков, описываемых уравнением (4), поэтому параметр  $a$  определяет поперечный размер фокального пятна. Подчеркнем, что в отличие от известного изотропного решения, коэффициент  $\alpha$ , входящий в  $D$ , не равен 1. Если  $\alpha$  становится отрицательным, то это приводит к следующему интересному свойству волновых пучков. В этом случае пучки, имеющие выпуклые волновые фронты, фокусируются и сходятся, в противоположность их дифракционному расплыванию в обычном изотропном или квази-изотропном случае, когда имеет место обычная рефракция, и наоборот для пучков с вогнутыми волновыми фронтами. Это необычное свойство проявляется в тех секторах направлений распространения, где поверхность медленности является вогнутой. Известно, что пространственно локализованные моды в виде бегущих волн могут возникать в периодической системе линз вследствие последовательной фокусировки расходящихся волновых пучков [4,5]. Логично предположить, что подобное явление может наблюдаться и в периодической системе, состоящей из чередующихся слоев двух разных типов с отрицательной рефракцией лучей на их границах.

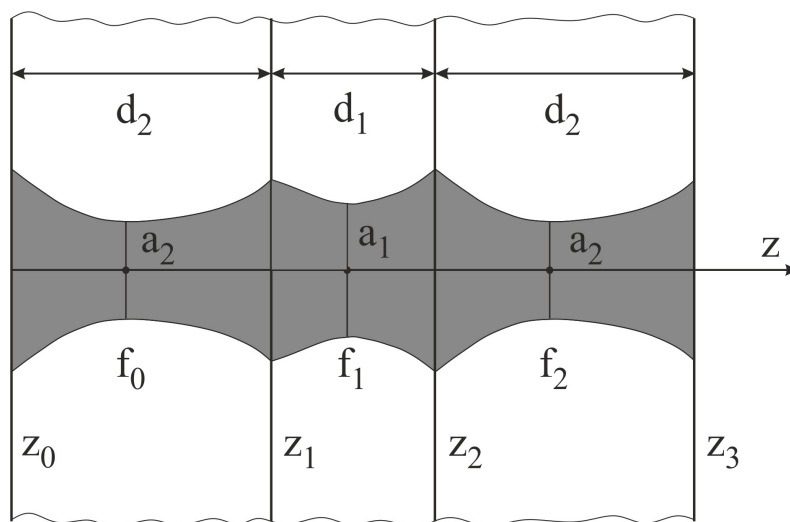


Рис. 4. Качественная картина пространственного распределения волновых полей в слоистой структуре

В диссертационной работе показано, что в случае выполнения определенного соотношения между толщинами слоев

$$d_1 / d_2 = -\alpha_2 k_1 / (\alpha_1 k_2), \quad (5)$$

в такой периодической многослойной системе могут распространяться квазиволноводные моды с сильно подавленной дифракцией (рис. 4).

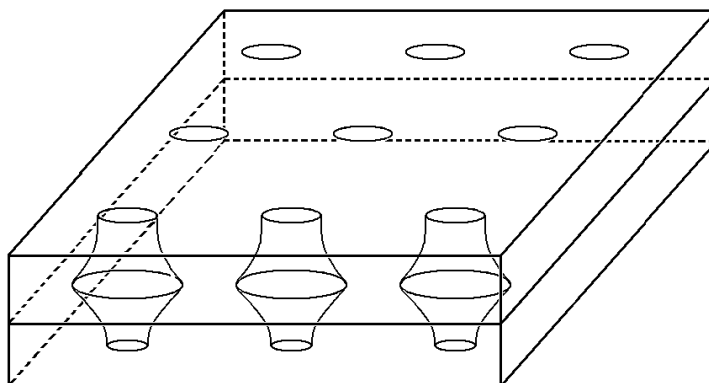


Рис. 5. Локализованные резонансные моды в качестве пикселей для тактильных и графических датчиков

В случае использования двух слоев (рис. 5) такая система превращается в двухслойный резонатор, причем указанные сфокусированные волноводные моды одновременно будут собственными модами резонатора. Уникальным свойством такой фокусировки является отсутствие для нее фиксированной оси, т.е. локализованные и слабо затухающие колебания могут возбуждаться в произвольной точке на поверхности рассматриваемых плоских кристаллических резонаторов. Для этого необходимо создавать пространственное

распределение возбуждающих сил на поверхности, соответствующее желаемому положению резонансной моды. Произвольный выбор оси локализации позволяет рассматривать такую слоистую систему как возможную матрицу для создания решетки из несвязанных или слабо связанных резонаторов

В Главе 3 также исследуется и другое влияние отрицательной рефракции акустических волн на их распространение в анизотропной среде, которое выражается в виде дополнительных осцилляций в  $V(z)$  сигнале микроскопа при смещении фокуса микроскопа в область над поверхностью образца.

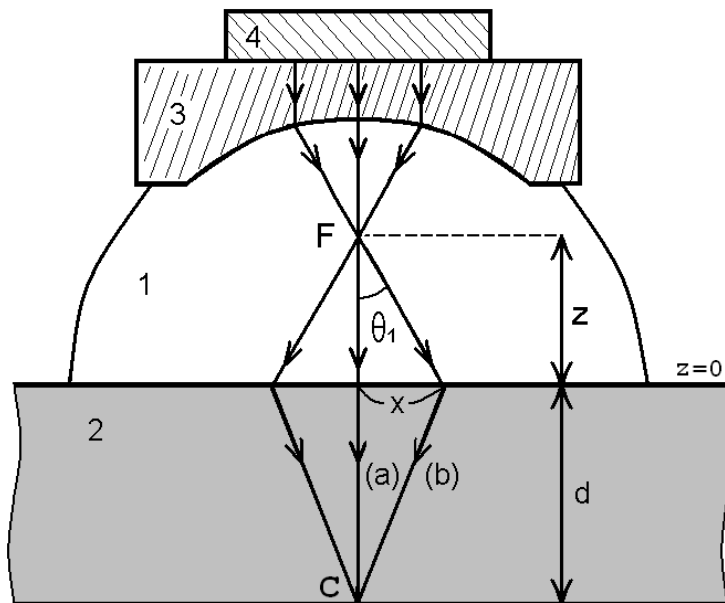


Рис. 6. Геометрия задачи о донных отражениях акустических лучей вследствие отрицательной рефракции в пластине в случае положительной дефокусировки: 1 – иммерсионная жидкость, 2 – образец, 3 – линза акустического микроскопа, 4 – ультразвуковой преобразователь.

На рис. 6 показана геометрия задачи о прохождении излучения акустического микроскопа в анизотропный образец, материал которого обладает свойством отрицательной рефракции вблизи оси микроскопа. На рис. 7 даны соответствующие поверхности медленности, характеризующие иммерсионную жидкость (находящуюся между линзой микроскопа и образцом и предназначенную для согласования акустических импедансов). В диссертационной работе исследован вопрос формирования в подобной конфигурации дополнительных сигналов в выходном сигнале  $V$  микроскопа при перемещении фокуса над поверхностью образца.





Рис. 7. Поперечное сечение поверхностей акустической медленности для образца и иммерсионной жидкости

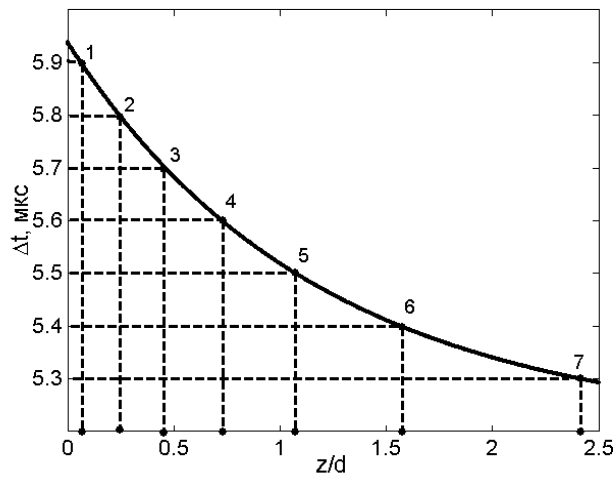


Рис. 8. Разность времен пробега лучей по траекториям типа (а) и (b) в зависимости от безразмерного расстояния дефокусировки

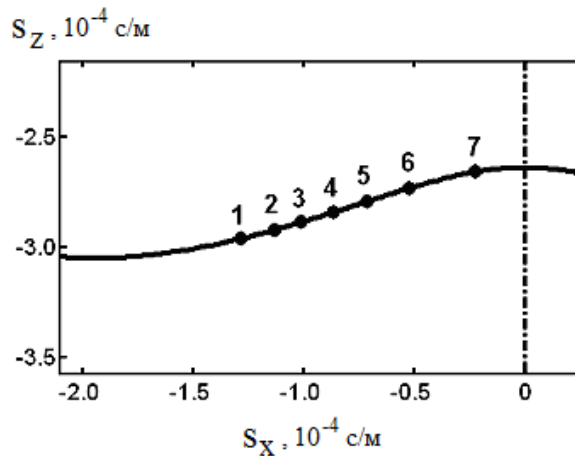


Рис. 9. Часть поверхности медленности в увеличенном масштабе с отмеченными точками, соответствующими экстремумам в выходном сигнале микроскопа

Эти дополнительные сигналы характеризуются временной задержкой (рис. 8), причем максимумы и минимумы в непрерывном режиме работы микроскопа или дополнительные импульсы в импульсном режиме однозначно соответствуют различным точкам на поверхности медленности анизотропного образца (рис. 9). Такая связь позволяет получать дополнительную информацию о внутренней структуре исследуемого материала, обладающего вблизи оси симметрии линзы свойством отрицательной акустической рефракции.

Далее в главе 3 излагается теория необычной анизотропной волноводной локализации, при которой традиционный волноводный профиль скорости заменяется на антиволноводный для изгибных волн в тонких кристаллических пластинах с переменной плотностью.

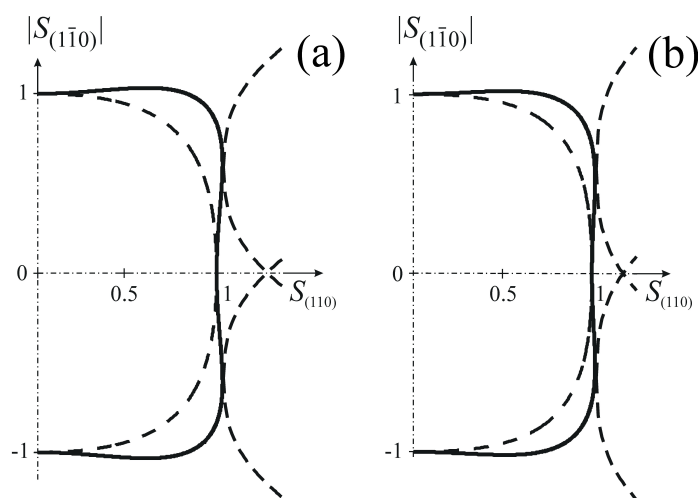


Рис. 10. Действительные и комплексные ветви кривых медленности ( $S$ ) для изгибных волн в кристаллических пластинах из (а) лития и (б) парателлурифта. Действительные ветви показаны сплошными кривыми, а комплексные - пунктирными

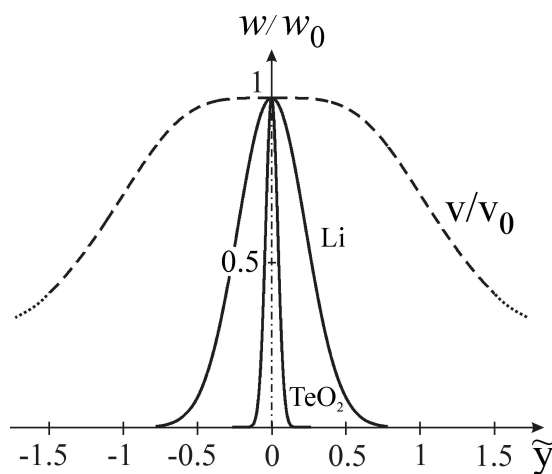
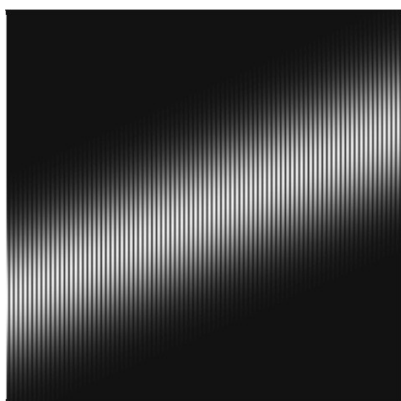


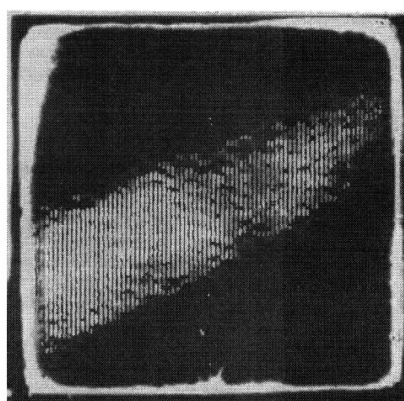
Рис. 11. Поперечные профили локальной волновой скорости  $v$  (пунктир) и волнового поля  $W$  (сплошные кривые) для изгибных волноводных волн в кристаллических пластинах из лития и парателлурифта. Безразмерная горизонтальная координата  $\tilde{y} = \sqrt[4]{|\gamma_4|}y$  выбрана таким образом, что профили скорости для обоих кристаллов в этом представлении совпадают.

Точное аналитическое решение для изгибных волн, полученное в настоящем разделе, описывает локализованные волноводные моды в случае наличия "антиволноводного" профиля скорости в анизотропной градиентной среде с локальной вогнутостью медленности. Фактически, этот "антиволноводный" профиль становится волноводным, поскольку в изучаемом случае он приводит к возникновению волноводного эффекта. Для полученного решения относительная ширина волноводного пучка сингулярно уменьшается при стремлении локальной кривизны кривой медленности к нулю.

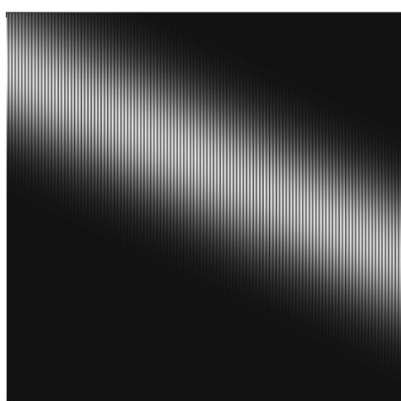
**В четвертой главе** метод параболического уравнения обобщается на случай произвольной анизотропии. С этой целью разработана методика получения коэффициентов локальной эллипсоидной аппроксимации поверхности медленности. Это позволило создать общий алгоритм получения решений для поля акустических гауссовых пучков в кристаллах, распространяющихся вблизи выбранного направления (не совпадающего с направлением фононной фокусировки). Приведены примеры применения алгоритма в сравнении с известными экспериментальными данными (рис. 12, рис. 13).



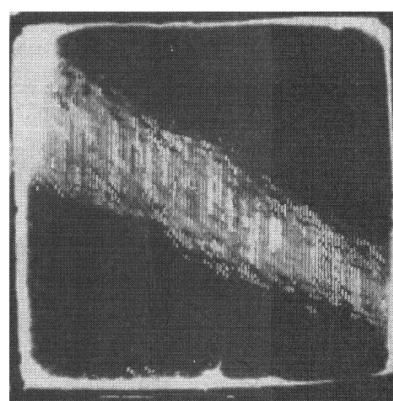
(a)



(b)



(c)



(d)

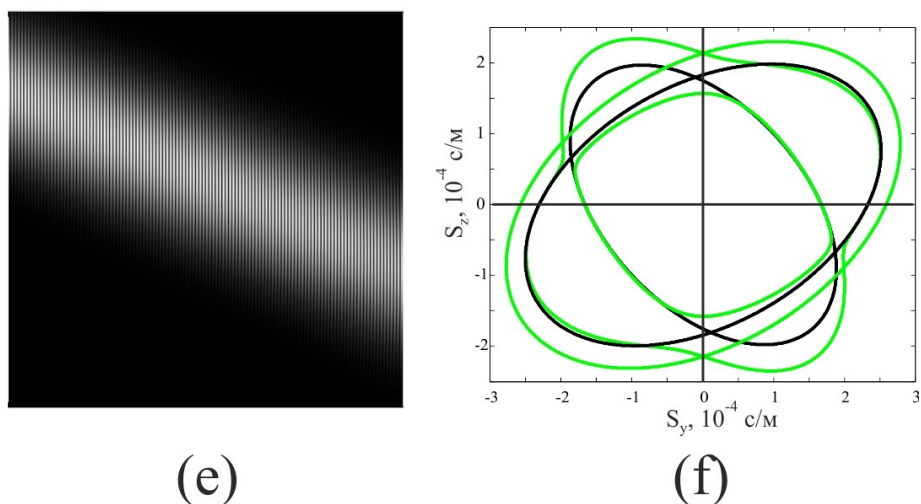


Рис. 12. Пучки квазипродольных (a),(b), квазипоперечных (c),(d) и чисто сдвиговых (e) (без учета пьезоэффекта) волн в кварце. В левой колонке все картины поля рассчитаны при помощи развиваемой в настоящем параграфе теории. Картины поля (b) и (d) взяты для сравнения теории с известным экспериментом [6]. Рисунок (f) показывает соответствующие поверхности медленности (серый цвет) и аппроксимирующие эллипсы (черный). Волны возбуждаются с левого торца кристалла.

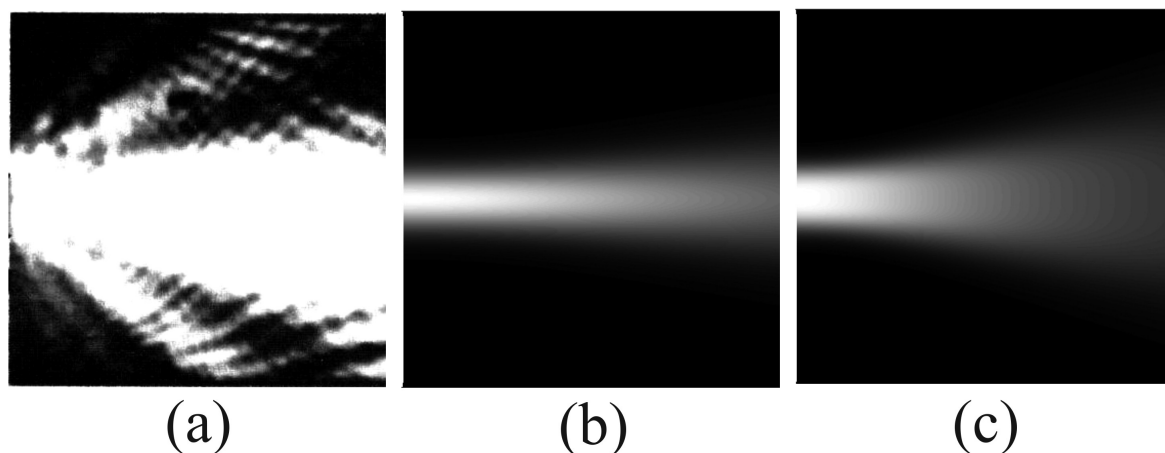


Рис. 13. Экспериментальное наблюдение (a) и теоретические расчеты (b),(c) пучка квазипоперечных волн в кристалле парателлурита

Построенные согласно развитой теории двумерные картины распределения поля акустических пучков в анизотропных кристаллах показывают качественное и количественное согласие с результатами акустооптической визуализации этих пучков в экспериментах [6,7]. Полученные решения для пучков объемных акустических волн корректно учитывают не только дифракцию пучка, но и эффект отклонения групповой скорости от фазовой в анизотропных средах.

Отметим, что в работе [8] также рассматривал параболическое приближение для кривой медленности, но в случае поверхностных волн. При этом во множителе отвечающем за спадание поля (см. уравнения (12-15) [8]) с расстоянием стоит лишь одна координата, т.е.

(в наших обозначениях)  $D \sim \mathcal{U}$ , а не их линейная комбинация, как это следует из (14.28) и (14.29). Это означает, что формулы статьи [8] могут работать только в том случае, когда направление распространения пучка является симметричным и нет сноса осевой волны пучка. В другой публикации [9] также было получено уравнение для акустического пучка, претендующее на правильность в общем анизотропном случае. Однако в этом уравнении нет всех перекрестных производных по координатам. На языке эллипсоида медленности, приближенно описывающего локальную медленность вблизи оси пучка, отсутствие перекрестных производных означает, что ось пучка совпадает с одной из главных осей эллипсоида. В такой конфигурации уравнение из работы [9] может описывать лишь только симметричные пучки, для которых отсутствует снос энергии осевой волны. Кроме того, данное уравнение выведено в системе координат такой, что ось пучка взята совпадающей с направлением потока энергии центральной волны, и согласно процедуре вывода значение угла сноса центральной волны пучка никак не влияет на конечное уравнение. Подчеркнем, что излагаемый метод построения параболического уравнения для акустических пучков в анизотропных средах правильно учитывает и дифракцию и зависимость групповой скорости от направления распространения волн, чего не было в работах [8, 9].

**Пятая глава** посвящена аналитической теории акустических резонаторов двух типов. Рассмотрены планарно-выпуклые кристаллические резонаторы, для которых решается задача о нахождении собственных мод. Моды таких резонаторов представляются в виде результата интерференции гауссовых пучков с использованием параболического уравнения для описания поля этих пучков и теории для описания данных пучков, развитой в предыдущей главе. Для этого получено сначала параксиальное волновое уравнение для пучков акустических волн, распространяющихся в кварцевом резонаторе АТ-среза. Далее параксиальное уравнение согласно вышеизложенной процедуре приведено к изотропному параболическому уравнению, и затем в известном решении этого уравнения путем возвращения к исходным координатам можно получить уравнение для параболического пучка в анизотропном кристалле кварца. Полученные результаты были использованы при расчете нескольких собственных мод колебаний кварцевого планарно-выпуклого резонатора АТ-среза, соответствующих условиям экспериментальных наблюдений в работе [1] (рис. 14).

Таким образом, в диссертационной работе построена теория, позволяющая использовать параболическое уравнение для описания распространения пучков акустических волн в материале с произвольной анизотропией. Сравнение результатов теоретических расчетов с известными экспериментами и расчетными данными для акустических пучков в

кристаллах показывают, что разработанная теория правильно предсказывает как снос энергии, так и дифракцию пучка.

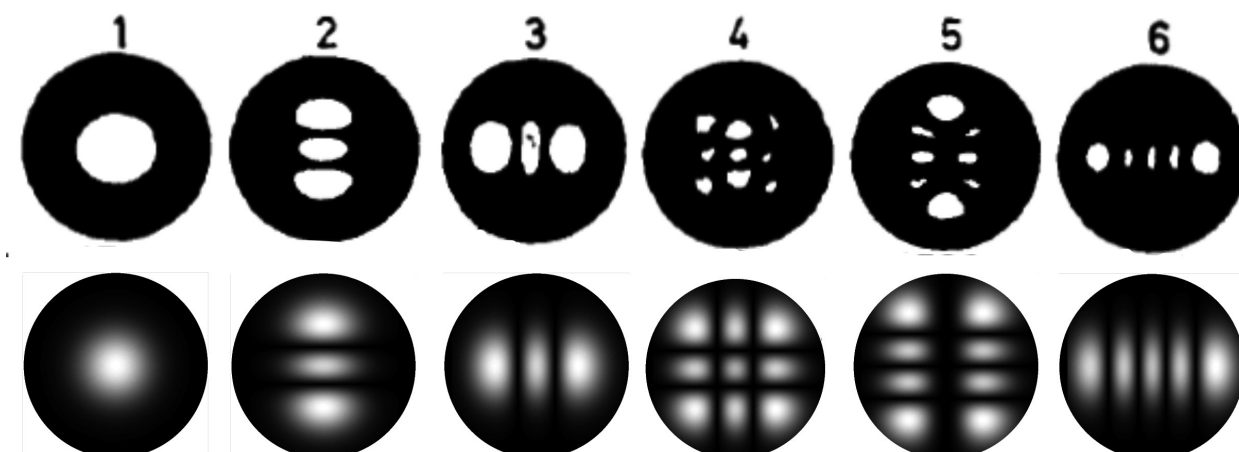


Рис. 14. Первые 6 мод планарно-выпуклого кварцевого резонатора АТ-среза. Параметры резонатора: основная рабочая частота  $\sim 4$  МГц, диаметр пластины 10 мм, радиус кривизны 10 см, размеры пучка на плоской грани  $2 \times 2$  мм. Верхний ряд – экспериментальные данные [1], нижний ряд – теоретические расчеты автора.

В общем случае форма резонаторов не ограничивается рассмотренным случаем плоско-выпуклых пластин, а может быть весьма разнообразной. Однако число известных аналитических решений для волновых мод резонаторов различной формы довольно ограничено (см. справочник [10]). Среди относительно простых по форме резонаторов можно выделить пирамидальные резонаторы. В последнее время эта форма стала исследоваться все более интенсивно, что связано, в частности, с развитием технологий селективного травления кремния. Эти технологии позволяют создавать сложные по форме структуры в микромасштабах [11]. Как оказалось, в процессе травления поверхности кристаллических кремниевых пластин, наиболее простой в реализации является именно пирамидальная форма поверхностей. В физической литературе волновые резонансы пирамид исследовались относительно слабо, несмотря на, казалось бы, их простую геометрическую форму. В уже указанном справочнике по волновым резонансам объектов разной формы [10] пирамиды вообще не упоминаются, а имеющиеся в литературе теоретические изучения этого вопроса ограничены исключительно лишь компьютерными расчетами на основе применения численных. Данный пробел восполняется в настоящей диссертационной работе, где вместо поиска общего решения волнового уравнения в произвольных пирамидальных областях дана попытка найти специальную форму пирамиды, для которой замкнутые лучевые траектории имели бы особый простой вид.

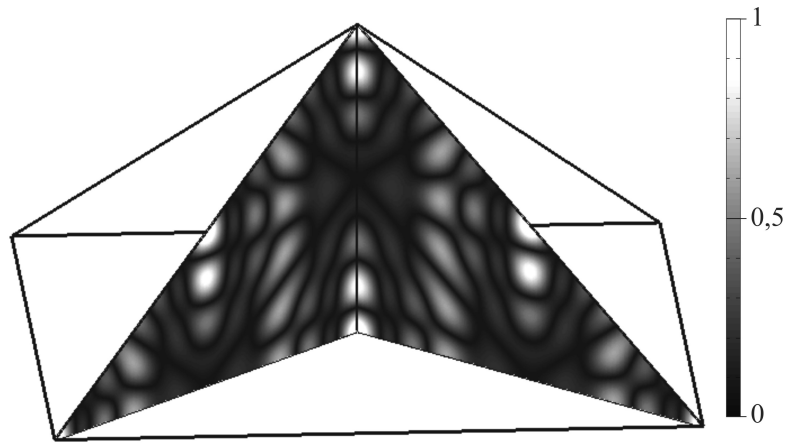


Рис. 15. Распределение амплитуды волнового поля  $|\psi|$  в боковом вырезе пирамиды для наклонной моды с квантовыми числами  $p = 4, q = 6, r = 8$ .

В работе получено точное аналитическое решение задачи о волновых резонансах в пирамидальной области. Такие решения для пирамиды до сих пор в литературе отсутствовали. Полученное решение относится к акустическим резонансам в пирамидальной полости специальной правильной формы с квадратным основанием и ортогональными противоположными боковыми гранями в случае, когда полость заполнена идеальным газом или жидкостью, а на ее стенках выполняются граничные условия Неймана. Найденные моды рассматриваемой пирамиды представляют собой симметричную комбинацию вырожденных мод куба, который можно составить из 6 идентичных таких пирамид. Детально исследованы три наиболее простых семейства мод пирамиды, соответствующие ориентации волновых векторов вдоль ребер, больших и малых диагоналей куба. Для каждого семейства исследованы положения пучностей и узлов волнового поля, построены характерные картины пространственного распределения амплитуды колебаний, определены траектории волновых лучей. Эта информация представляет интерес для возбуждения и детектирования выделенных мод пирамиды. Представленный лучевой анализ показывает, что менее симметричные наклонные моды куба также пригодны для построения резонансных решений в пирамиде. Обнаружено, что только часть из них, для которой квантовые числа, соответствующие номерам мод, имеют одинаковую четность, удовлетворяет волновому уравнению и граничным условиям. Для четных чисел общая формула для поля резонансных мод имеет вид

$$\psi(x, y, z) = \sum_{p, q, r} A_{pqr} \cos(\bar{p}x) \cos(\bar{q}y) \cos(\bar{r}z) \quad (6)$$

где  $\bar{p} = \pi p/a$ ,  $\bar{q} = \pi q/a$ ,  $\bar{r} = \pi r/a$ . Для нечетных чисел косинусы в формуле (6) заменяются синусами

(7)

Резонансные частоты для обоих типов мод (6) и (7) определяются одним и тем же выражением

$$f = (v/2a)\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}, \quad (8)$$

где  $P, Q, R$  - произвольные целые числа, соответствующие номерам мод.

Найденные моды являются либо симметричными, либо антисимметричными одновременно по всем координатам. Задача о существовании мод смешанной симметрии, т.е. мод, симметричных по одной координате и антисимметричных по другой, остается открытой. Для таких мод задача о колебаниях в пирамиде не сводится к задаче о колебаниях в составном кубе без внутренних границ. Из сравнения высокочастотной асимптотики распределения мод в спектре куба и пирамиды следует, что найденное решение согласно формуле Вейля является полным для четверти рассматриваемой пирамиды.

### Основные результаты и выводы работы

1. Показано, что потоки энергии объемных акустических волн от точечного силового источника в однородном изотропном твердом теле, а также потоки энергии в пучке изгибных волн для направления фононной фокусировки в однородной кристаллической пластине не являются прямолинейными даже в дальнем поле.
2. Предсказаны и изучены следующие эффекты отрицательной рефракции в анизотропных средах: а) локализация акустических волн в системе из плоскопараллельных слоев; б) дополнительные сигналы в акустическом микроскопе при расположении фокуса над поверхностью образца; в) волноводная локализация изгибных волн в градиентных пластинах с антиволноводным согласно традиционным представлениям профилем скорости.
3. Разработана процедура локальной аппроксимации поверхности медленности объемных акустических волн эллипсоидом в общем анизотропном случае, и на этой основе предложено обобщение теории гауссовых пучков.
4. Развита новый подход к анализу мод планарно-выпуклых кристаллических резонаторов с использованием решений для гауссовых пучков, изучены эффекты анизотропного снятия вырождения мод в таких резонаторах.
5. Найден точные аналитические решения волнового уравнения для резонансных акустических мод пирамидальной полости специального вида, заполненной идеальным газом или жидкостью.



## Список литературы

1. *Sauerbrey G.* Investigation of resonant modes of planoconvex AT-plates // 21st Annual Symposium on Frequency Control. 1967. P. 63-71.
2. *Imamura K., Tamura S.* Negative refraction of phonons and acoustic lensing effect of a crystalline slab // Phys. Rev. B. 2004. V. 70. N. 17. 174308. 7 p.
3. *Daly B.C., Norris T.B., Chen J., Khurgin J.B.* Picosecond acoustic phonon pulse propagation in silicon // Phys. Rev. B. 2004. V. 70. N. 21. 214307. 8 p.
4. *Kogelnik H., Li T.* Laser beams and resonators // Proc. IEEE. 1966. V. 54. N. 10. P. 1312-1329.
5. *Tien P.K., Gordon J.P., Whinnery J.R.* Focusing of a light beam of Gaussian field distribution in continuous and periodic lens-like media // Proc. IEEE. 1965. V. 53. N. 2. P. 129-136.
6. *Staudt J.H., Cook B.D.* Visualization of quasilongitudinal and quasitransverse elastic waves // J. Acoust. Soc. Amer. 1967. V. 41. N. 6. P. 1547-1548.
7. *Балакий В.И., Парыгин В.Н., Чирков Л.Е.* Физические основы акустооптики М.: Радио и связь, 1985. 278 с.
8. *Mason I.M., Ash E.A.* Acoustic surface-wave beam diffraction on anisotropic substrates // J. Appl. Phys. 1971. V. 42. N. 13. P. 5343-5351.
9. *Заболотская Е.А.* Нелинейное распространение звукового пучка в кристалле // Акуст. журн. 1986. Т. 32. N. 1. С. 61-64.
10. *Blevins R.D.* Formulas for Natural Frequency and Mode Shape. Malabar, Florida: Krieger, 1984. 492 p.
11. *Meacham J.M., Ejimofor C., Kumar S., Degertekin F.L., Fedorov A.G.* Micromachined ultrasonic droplet generator based on a liquid horn structure // Rev. Sci. Instrum. 2004. V. 75. N. 5. P. 1347-1352.

## Авторские публикации

1. *Козлов А.В., Можяев В.Г.* Парадокс нерадиальности потоков энергии акустических волн от точечного источника в однородных изотропных твердых телах // Международная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых по фундаментальным наукам "Ломоносов-2005". Секц. Физ. Сб. тез. Физ. ф-т МГУ. 2005. С. 8-10.
2. *Козлов А.В., Можяев В.Г.* Анализ фокусировки акустических волн при отрицательной рефракции на плоской границе кристаллов. В сб.: Форум «Всемирный год физики в Московском университете». Конференция молодых ученых. Сб. материалов. М., 2005. С. 10-11.
3. *Kozlov A.V., Mozhaev V.G.* Localization of acoustic bulk modes due to negative refraction in crystal resonators // Proceedings of the 20<sup>th</sup> EFTF. Abstracts. Braunschweig. 2006. P. 33.
4. *Kozlov A.V., Mozhaev V.G.* Localization of acoustic bulk modes due to negative refraction in crystal resonators. In: Proceedings of 20th European Frequency and Time Forum. 2006. Braunschweig, Germany. 2007. P. 147-154.
5. *Козлов А.В., Можяев В.Г.* Проявление отрицательной рефракции в акустической микроскопии анизотропных пластин // Международная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых по фундаментальным наукам "Ломоносов-2006". Секц. Физ. Сб. тез. Физ. ф-т МГУ. 2006. С. 6-8.
6. *Козлов А.В., Можяев В.Г.* Локализованные акустические волны и резонансы в слоях кристаллов с отрицательной рефракцией. В сб.: X Всероссийская школа-семинар «Волновые явления в неоднородных средах». Звенигород, Московская область, 22-27 мая 2006 г. CD-издание. Секция 6. С. 21-23.

7. Козлов А.В., Можжаев В.Г. Локализованные акустические волны и резонансы в слоях кристаллов с отрицательной рефракцией // Изв. РАН. Сер. Физ. 2006. Т. 70. № 12. С. 1716-1721.
8. Козлов А.В., Можжаев В.Г. Структура акустических полей в пирамидальном отражателе и резонаторе // Международная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых по фундаментальным наукам "Ломоносов-2007". Секц. Физ. Сб. тез. Физ. ф-т МГУ. 2007. С. 169.
9. Козлов А.В., Можжаев В.Г. Оптимальная форма и анализ мод пьезорезонаторов на основе теории волновых пучков // Труды XI Всероссийской школы-семинара "Физика и применение микроволн" - "Волны-2007". 2007. Ч. 5. "Динамика колебательных процессов". С. 14-16.
10. Козлов А.В., Можжаев В.Г. Новый подход к анализу мод и выбору формы планарно-выпуклых пьезокристаллических резонаторов. В сб.: Сборник трудов XIX сессии Российского акустического общества. М.: ГЕОС. 2007. Т. 1. С. 267-270.
11. Kozlov A.V., Mozhaev V.G. Exact analytic solution to the problem of acoustic resonances in pyramidal cavities of particular shape. In: Abstracts. 2007 IEEE International Ultrasonics Symposium and Short Courses. 28-31 October, 2007. New York, NY, USA. P. 207-208.
12. Kozlov A.V., Mozhaev V.G. Additional signals due to negative refraction in acoustic microscopy of anisotropic plates // Phys. Lett. A. 2008. V. 372. N. 26. P. 4718-4721.
13. Kozlov A.V., Mozhaev V.G.  $V(z)$  oscillations at upward defocusing // J. Acoust. Soc. Amer. 2008. V. 123. N. 5. Pt. 2. P. 3930.
14. Kozlov A.V., Mozhaev V.G., Zyryanova A.V. Waveguide effect under "antiguinding" conditions in graded anisotropic media // J. Phys.: Cond. Matt. 2010. V. 22. N. 7. P. 075401 (11pp).
15. Козлов А.В., Можжаев В.Г. Обобщение метода параболического уравнения для расчета акустических пучков в кристаллах // Труды школы-семинара «Волны-2011». Секция 7. Акустоэлектроника и акустооптика. С. 30-34.
16. Kozlov A.V., Mozhaev V.G. Exact solutions for wave resonances in rectangular pyramidal cavity // Days on Diffraction. Proceedings. 2011. P. 92-97.
17. Можжаев В.Г., Козлов А.В. Новые решения для автоколлимированных акустических пучков в кристаллах. Ломоносовские чтения - 2011. Секция физики. Научная конференция. Сборник тезисов докладов. М.: Физический ф-т МГУ, 2011. С. 34-38.