УДК 517.9

ИССЛЕДОВАНИЕ ФИЗИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В НЕПЕРИОДИЧЕСКИХ СИЛЬНО НЕОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ

Г. Н. Медведев, Б. И. Моргунов

(*кафедра математики*)

Рассматриваются математические модели электродинамических и термомеханических процессов в сильно неоднородных непериодических средах. Описана итерационная процедура определения коэффициентов асимптотических разложений решений уравнений электродинамики и термоупругости.

Для определения коэффициентов асимптотических преобразований уравнений теплопроводности, упругости и вязкоупругости в асимптотическом методе, предложенном в монографии [1], была использована процедура, основанная на численном интегрировании на ячейке периодичности.

В работах [2] и [3] изложены методы определения коэффициентов асимптотических преобразований уравнений электродинамики и термоупругости в сильно неоднородных периодических средах, основанные на итерационной процедуре.

В настоящей работе для случая непериодических неоднородных сред со структурой, аналогичной рассматривавшейся в [2] и [3], также реализуется итерационная процедура определения коэффициентов асимптотических разложений.

Определение коэффициентов асимптотических преобразований уравнений электродинамики и термоупругости проведем для случая неоднородной среды, свойства которой (электрические, магнитные, механические и термодинамические) быстро меняются в двух направлениях: $\xi_\alpha = x_\alpha/\varepsilon$, $\alpha = 1, 2$. Все физические характеристики среды имеют структуру, аналогичную рассматривавшейся в работах [2, 3], например, $\tau(\xi) = \tau_0 + \tau_1(\xi)$ для магнитной проницаемости.

Уравнения для коэффициентов асимптотических разложений решений основных уравнений математической физики получаются по методике, изложенной в [4], и имеют вид, обсуждавшийся в работах [2] и [3].

Например, для определения составляющих магнитного поля нужно найти решения уравнений в частных производных вида

$$\frac{\partial}{\partial \xi_\alpha}\left[\tau(\xi)\left(\frac{\partial \Phi_\beta}{\partial \xi_\alpha} + \delta_{\alpha\beta}\right)\right] = 0, \quad \beta = 1, 2. \qquad (1)$$

Для решения уравнений (1) применяется итерационная процедура, аналогичная использованной в [3]:

$$\tau_0 \frac{\partial^2 \Phi_\beta^{n+1}}{\partial \xi_\alpha \partial \xi_\alpha} = -\frac{\partial}{\partial \xi_\alpha}\left[\tau_1(\xi)\left(\frac{\partial \Phi_\beta^n}{\partial \xi_\alpha} + \delta_{\alpha\beta}\right)\right] \equiv -F_\beta^n(\xi),$$

$$\Phi_\beta^0 \equiv 0, \quad \beta = 1, 2, \quad n = 0, 1, 2 \ldots . \qquad (2)$$

Представляя функции, входящие в (4), в виде интегралов Фурье:

$$\begin{aligned} \Phi_\beta^n(\xi) &= \frac{1}{2\pi}\int \varphi_\beta^n(\eta)\, e^{i\xi\eta}\, d\eta, \\ \tau_1(\xi) &= \frac{1}{2\pi}\int T(\eta)\, e^{i\xi\eta}\, d\eta, \\ F_\beta^n(\xi) &= \frac{1}{2\pi}\int f_\beta^n(\eta)\, e^{i\xi\eta}\, d\eta, \quad \beta = 1, 2, \end{aligned} \qquad (3)$$

(здесь и далее $\int = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}$), находим, что образы Фурье $\varphi_\beta^n(\eta)$ определяются из уравнений

$$\tau_0 \eta_\alpha \eta_\alpha \varphi_\beta^{n+1}(\eta) = f_\beta^n(\eta)$$

или, подробнее,

$$\varphi_\beta^{n+1}(\eta) = \frac{1}{\tau \eta_\alpha \eta_\alpha}\left(i\eta_\alpha T(\eta)\delta_{\alpha\beta} - \right.$$
$$\left. - \frac{\eta_\alpha}{2\pi}\int T(\eta - \zeta)\zeta_\alpha \varphi_\beta^n(\zeta) d\zeta\right).$$

Далее по первой из формул (3) находятся $\Phi_\beta^n(\xi)$.

Таким же образом решаются уравнения типа (1) с другими физическими характеристиками вместо $\tau(\xi)$, имеющими ту же структуру, для определения компонент электрического поля, а также температуры и поперечных перемещений в термомеханических задачах.

Для определения функций, входящих в выражения продольных компонент вектора перемещений, приходится решать системы уравнений вида

$$\frac{\partial}{\partial \xi_1}\left(\nu + \nu\frac{\partial U}{\partial \xi_1} + \lambda\frac{\partial V}{\partial \xi_2}\right) + \frac{\partial}{\partial \xi_2}\left(\mu\frac{\partial U}{\partial \xi_2} + \mu\frac{\partial V}{\partial \xi_1}\right) = 0,$$
$$\frac{\partial}{\partial \xi_1}\left(\mu\frac{\partial V}{\partial \xi_1} + \mu\frac{\partial U}{\partial \xi_2}\right) + \frac{\partial}{\partial \xi_2}\left(\lambda + \lambda\frac{\partial U}{\partial \xi_1} + \nu\frac{\partial V}{\partial \xi_2}\right) = 0.$$

Обобщением итерационной процедуры (2) является процедура

$$\nu_0 \frac{\partial^2 U^{n+1}}{\partial \xi_1^2} + (\nu_0 - \mu_0)\frac{\partial^2 V^{n+1}}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} + \mu_0 \frac{\partial^2 U^{n+1}}{\partial \xi_2^2} =$$

$$= -F^1(U^n, V^n), \qquad (4)$$

$$\mu_0\frac{\partial^2 V^{n+1}}{\partial\xi_1^2}+(\nu_0-\mu_0)\frac{\partial^2 U^{n+1}}{\partial\xi_1\partial\xi_2}+\nu_0\frac{\partial^2 V^{n+1}}{\partial\xi_2^2}= \\ =-F^2(U^n,V^n),\quad n=0,1,\ldots,$$

где

$$F^1(U^n,V^n)=\frac{\partial}{\partial\xi_1}\left(\nu_1+\nu_1\frac{\partial U^n}{\partial\xi_1}+\lambda_1\frac{\partial V^n}{\partial\xi_2}\right)+ \\ +\frac{\partial}{\partial\xi_2}\left(\mu_1\frac{\partial U^n}{\partial\xi_2}+\mu_1\frac{\partial V^n}{\partial\xi_1}\right),$$

$$F^2(U^n,V^n)=\frac{\partial}{\partial\xi_1}\left(\mu_1\frac{\partial V^n}{\partial\xi_1}+\mu_1\frac{\partial U^n}{\partial\xi_2}\right)+ \\ +\frac{\partial}{\partial\xi_2}\left(\lambda_1+\lambda_1\frac{\partial U^n}{\partial\xi_1}+\nu_1\frac{\partial V^n}{\partial\xi_2}\right).$$

Представим функции, входящие в (4), в виде интегралов Фурье:

$$U^n(\xi)=\frac{1}{2\pi}\int u^n(\eta)\,e^{i\xi\eta}\,d\eta,\quad V^n(\xi)=\frac{1}{2\pi}\int v^n(\eta)\,e^{i\xi\eta}\,d\eta,$$
$$\lambda_1(\xi)=\frac{1}{2\pi}\int\Lambda(\eta)\,e^{i\xi\eta}\,d\eta,\qquad \mu_1(\xi)=\frac{1}{2\pi}\int M(\eta)\,e^{i\xi\eta}\,d\eta,$$
$$\nu_1(\xi)=\frac{1}{2\pi}\int N(\eta)\,e^{i\xi\eta}\,d\eta,\quad F^n_\beta(\xi)=\frac{1}{2\pi}\int f^n_\beta(\eta)\,e^{i\xi\eta}\,d\eta, \tag{5}$$

где

$$f_1^n(\eta)=i\eta_1\left(N+\{N;i\eta_1u^n\}+\{\Lambda;i\eta_2v^n\}\right)+ \\ +i\eta_2\left(\{M;i\eta_2u^n\}+\{M;i\eta_1v^n\}\right),$$
$$f_2^n(\eta)=i\eta_1\left(\{M;i\eta_1v^n\}+\{M;i\eta_2u^n\}\right)+ \\ +i\eta_2\left(\Lambda+\{\Lambda;i\eta_1u^n\}+\{N;i\eta_2v^n\}\right),$$

$$\{F(\eta);G(\eta)\}=\frac{1}{2\pi}\int F(\zeta)G(\eta-\zeta)d\zeta\quad \text{(свертка)}.$$

После подстановки указанных преобразований в итерационные уравнения (4) находим, что образы Фурье u^{n+1}, v^{n+1} определяются из системы уравнений

$$(\nu_0\eta_1^2+\mu_0\eta_2^2)u^{n+1}+(\nu_0-\mu_0)\eta_1\eta_2v^{n+1}=f_1^n(\eta),$$

$$(\nu_0-\mu_0)\eta_1\eta_2u^{n+1}+(\mu_0\eta_1^2+\nu_0\eta_2^2)v^{n+1}=f_2^n(\eta)$$

с отличным от нуля определителем $\mu_0\nu_0(\eta_1^2+\eta_2^2)$.

Затем функции $U^{n+1}(\xi), V^{n+1}(\xi)$ находятся по формулам (5).

Сходным образом исследуются физические процессы в трехмерных мелкодисперсных непериодических средах.

Литература

1. *Бахвалов Н.С., Панасенко Г.П.* Осреднение процессов в периодических средах. М.: Наука, 1984.
2. *Медведев Г.Н., Моргунов Б.И.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1998. №6. С. 47 (Moscow University Phys. Bull. 1998. No. 6. P. 54).
3. *Князев А.Б., Медведев Г.Н., Моргунов Б.И.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1999. №4. С. 57 (Moscow University Phys. Bull. 1999. No. 4. P. 74).
4. *Моргунов Б.И.* Математический анализ физико-механических процессов. М.: Изд-во МГИЭМ, 1995.

Поступила в редакцию
22.10.99

АКУСТИКА И МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА

УДК 534.222

ВОЗБУЖДЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛН СФЕРОЙ, СОВЕРШАЮЩЕЙ КОЛЕБАНИЯ КОНЕЧНОЙ АМПЛИТУДЫ В ЛИНЕЙНО-ДЕФОРМИРУЕМОЙ СРЕДЕ

Ван Нин, О. В. Руденко

(*кафедра акустики*)

Проведены расчеты формы волнового профиля и спектрального состава волны, излучаемой в среду в результате осцилляций сферически-симметричной поверхности. Показано, что локальные искажения при переходе от колебательного движения сферы к волновому движению среды возникают вследствие граничной нелинейности.

Проблема описания волн, расходящихся от пульсирующей сферической поверхности, возникает во многих прикладных задачах. Так, в случае воздействия мощных ультразвуковых полей в среде рождаются кавитационные пузырьки, которые пульсируют с большой амплитудой и схлопываются; при этом излучается нелинейная волна, а давления достигают тысяч атмосфер [1]. Сильные изменения объема могут происходить в результате колебаний полостей, образованных в результате подводного взрыва [2] или лазерного пробоя в жидкости [3].

В ситуациях, когда изменение радиуса сферы $R(t)$ нельзя считать малым по сравнению с его исходным или характерным средним значением R_0, наряду с обычными нелинейными эффектами, накапливающимися по мере распространения волны в сре-