

где

$$R_{st}(F, \hat{Q}) = \Gamma_{st;l}^l(\hat{Q}) - \Gamma_{st;t}^l(\hat{Q}) + \Gamma_{st}^l(\hat{Q})\Gamma_{lm}^m(F) + \\ + \Gamma_{st}^l(F)\Gamma_{lm}^m(\hat{Q}) - \Gamma_{sl}^m(\hat{Q})\Gamma_{mt}^l(F) - \Gamma_{sl}^m(F)\Gamma_{mt}^l(F),$$

поэтому

$$R_{st}(F, \hat{Q}) = \left(\Gamma_{st}^l(\hat{Q})\right)_{;i} - \left(\Gamma_{sl}^l(\hat{Q})\right)_{;t}.$$

Заметим, что $c^s = a_{;t}F^{st}$ и

$$\sqrt{F}F^{st}a_{;l}\Gamma_{st}^l(\hat{Q}) = Div + \frac{1}{2}\sqrt{F}F^{lp}\hat{Q}_{lp}c_{;s}^s - \sqrt{F}F^{sl}\hat{Q}_{lp}c_{;s}^p,$$

и, наконец, искомое слагаемое имеет вид:

$$a\sqrt{F}F^{st}R_{st}(F, \hat{Q}) = Div + \sqrt{F}\hat{Q}_{st}(F^{sp}c_{;p}^t - F^{st}c_{;p}^p).$$

Итак, окончательное выражение для действия:

$$S_1 = \int_{\Sigma} \hat{P}^{st}(x')F_{n_{st}}(x') + F_n^{st}(x')\hat{Q}_{n_{st}}(x') + aH_1(F, \hat{Q}) =$$

$$= \int_{\Sigma} A_{st}(x')\hat{P}^{st}(x') + B^{st}(x')\hat{Q}_{st}(x'),$$

$$A_{st} = \frac{2a}{\sqrt{F}} \left(F_{n_{st}} - \frac{1}{2}F_n F^{st} \right),$$

$$B^{st} = \frac{a}{2\sqrt{F}} \left(F_{n_{kl}}F_n^{kl} - \frac{1}{2}F_n^2 \right) F^{st} - \\ - \frac{2a}{\sqrt{F}} \left(F_n^{st}F_n^{kl}F_{n_{st}} - \frac{1}{2}F_n F_n^{st} \right) - a\sqrt{F} \left(R^{st} - \frac{1}{2}F^{st}R \right) - \\ - \sqrt{F} \left(F^{sl}c_{;l}^t - F^{st}c_{;l}^l \right).$$

Литература

1. Тимофеевская О.Д., Хрусталева О.А., Чичикина М.В. // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2003. № 4. С. 3 (Moscow University Phys. Bull. 2003. No. 4).

Поступила в редакцию
23.09.02

УДК 517.958; 621.372.8

О ЛОВУШЕЧНЫХ ВОЛНОВОДНЫХ МОДАХ, УБЫВАЮЩИХ СТЕПЕННЫМ ОБРАЗОМ

А. Н. Боголюбов, М. Д. Малых, Ю. В. Мухартова, В. Л. Пономарева

(кафедра математики)

E-mail: malykham@mtu-net.ru

Приведены примеры гофрированных (асимптотически слабо нерегулярных) волноводов, обладающих ловушечными модами при заданной частоте. Показано, что поле, существующее в таких волноводах, может спадать степенным образом с любым целым показателем степени.

Построенные в работах [1–5] волноводы, обладающие ловушечными модами, являются локально нерегулярными. Но если плоский регулярный волновод

$$\Omega_0 = \{(x, y) : x \in \mathbb{R}, 0 < y < l\}$$

ширины l лишь локально деформировать до волновода Ω так, что Ω и Ω_0 совпадают вне круга достаточно большого радиуса, то в получившемся волноводе все собственные функции $u(x, y)$ вне этого круга представимы в виде суперпозиции нормальных волн (см. [6]):

$$u(x, y) = \sum_n C_n \sin(\alpha_n y) e^{-\sqrt{\lambda - \alpha_n^2}|x|},$$

где $\alpha_n = \sqrt{\frac{\pi n}{l}}$ — собственные значения задачи Штурма–Лиувилля на отрезке $(0, l)$ с граничными условиями Дирихле. Таким образом, собственные функции $u(x, y)$ во всех упомянутых выше примерах убывают экспоненциально. Большая часть энергии таких волн сосредоточена в конечной области, в «ловушке», поэтому их называют ловушечными модами.

Однако экспоненциальное убывание не является характерным свойством собственных функций волноводных систем. Как удалось показать в работах [7, 8], в гофрированных волноводах существуют собственные функции, отвечающие заданному собственному значению, убывающие существенно медленнее. А именно, были построены такие гофрированные асимптотически слабо нерегулярные волноводы Ω , в которых собственная функция спектральной задачи

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda u = 0, \\ u|_{\partial\Omega} = 0, \\ \int_{\Omega} d\tau u^2 < \infty \end{cases} \quad (1)$$

убывает как $|x|^{-1}$, Ox — ось волновода. При этом мы, как и в упомянутых работах, придерживаемся следующей терминологии.

Волновод называется асимптотически слабо нерегулярным, если вне круга достаточно большого ра-

диуса он сколь угодно мало отличается от некоторой прямой полосы. Волновод называется регулярным гофрированным, если его границы являются периодическими функциями от x (Ox — ось волновода). Волновод называется асимптотически слабо нерегулярным гофрированным волноводом, если вне круга достаточно большого радиуса он сколь угодно мало отличается от некоторого регулярного гофрированного волновода.

Попытаемся теперь тем же, что и в работе [7], приемом показать, что существуют такие волноводы, собственные функции которых убывают как $|x|^{-n}$. Пусть $\lambda > 0$ заданное число. Рассмотрим следующую задачу:

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda u = 0, \\ u|_{y=0} = 0, \\ \int_{\mathbb{R}^+} d\tau u^2 < \infty \end{cases} \quad (2)$$

в полосе

$$\mathbb{R}^+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq y_0\}$$

при любом положительном y_0 . Если рассматривать область между узловыми линиями функции $u(x, y)$ как Ω , то функция $u(x, y)$ удовлетворяет задаче (1). Частное решение задачи (2), которое можно получить, применив к ней преобразование Фурье по x , имеет вид (см. [7]):

$$u(x, y) = \int_0^a d\omega f(\omega, \lambda) \sin(\sqrt{\lambda - \omega^2}y) \sin(\omega x), \quad (3)$$

где $f(\omega, \lambda)$ — произвольная функция своих аргументов, a — некоторая константа.

Интегрируя (3) по частям два раза и применяя лемму Лебега (см. [9]), получим следующую асимптотику для функции $u(x, y)$:

$$\begin{aligned} u(x, y) = & \frac{1}{x} \left\{ f(0, \lambda) \sin(\sqrt{\lambda}y) - \right. \\ & \left. - f(a, \lambda) \sin(\sqrt{\lambda - a^2}y) \cos(ax) \right\} + \\ & + \frac{1}{x^2} \frac{\partial f(a, \lambda)}{\partial \omega} \sin(\sqrt{\lambda - a^2}y) \sin(ax) + o\left(\frac{1}{|x|^2}\right) \end{aligned}$$

при $a^2 < \lambda$. Если первый член этого выражения не равен нулю, то мы получаем ловушечную моду гофрированного волновода, изученную в [7].

При $f(0, \lambda) = f(a, \lambda) = 0$ функция $u(x, y)$ убывает как $|x|^{-2}$, но ее узловые линии не образуют волновода (рис. 1). Поэтому получить собственные функции задачи (1), убывающие как $|x|^{-2}$, этим путем не удастся. Зато без труда можно построить волноводы, в которых существуют ловушечные моды, убывающие как $|x|^{-3}$. В самом деле, при

$$\frac{\partial f(a, \lambda)}{\partial \omega} = \frac{\partial f(0, \lambda)}{\partial \omega} = 0$$

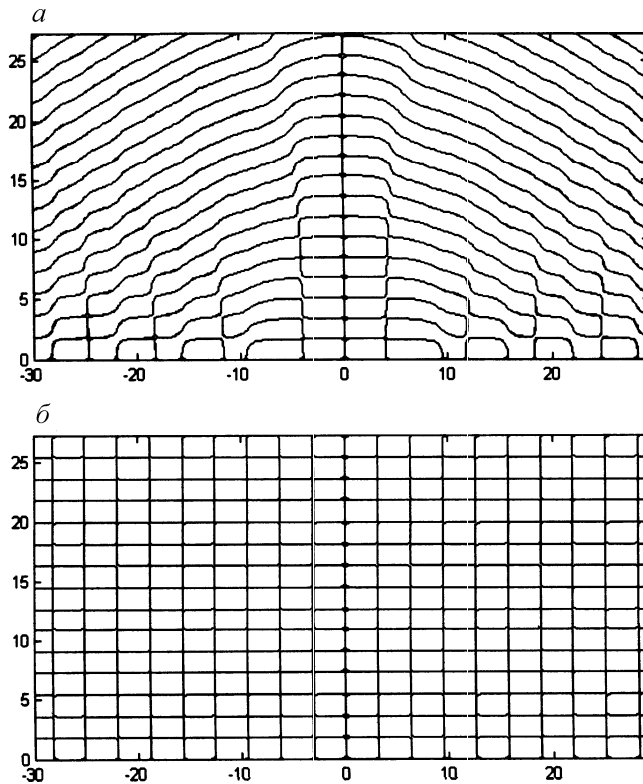


Рис. 1. Узловые линии функции $U(x, y)$ (а) и ее асимптотика порядка $O\left(\frac{1}{x^2}\right)$ при $\lambda = 4$, $a = 1$, $\frac{\partial}{\partial \omega} f(0, \lambda) = 2$, $\frac{\partial}{\partial \omega} f(a, \lambda) = 3$ (б)

функция $u(x, y)$ имеет асимптотику

$$\begin{aligned} u(x, y) = & \frac{1}{x^3} \left\{ \frac{\partial^2 f(a, \lambda)}{\partial \omega^2} \sin(\sqrt{\lambda - a^2}y) \cos(ax) - \right. \\ & \left. - \frac{\partial^2 f(0, \lambda)}{\partial \omega^2} \sin(\sqrt{\lambda}y) \right\} + o(|x|^{-3}). \end{aligned}$$

Поэтому область между узловыми линиями функции $u(x, y)$, которую можно принять за область Ω из задачи (1), ограничена кривыми, выходящими при больших x на асимптотику

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f(a, \lambda)}{\partial \omega^2} \sin(\sqrt{\lambda - a^2}y) \cos(ax) - \\ - \frac{\partial^2 f(0, \lambda)}{\partial \omega^2} \sin(\sqrt{\lambda}y) = 0, \end{aligned}$$

и, следовательно, представляет собой гофрированный волновод (рис. 2).

Для того чтобы построить волноводы, ловушечные моды которых убывают как $|x|^{-2}$, обратимся к более общей вспомогательной задаче:

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda u = 0, \\ \int_{-\infty}^{+\infty} dx u(x, y)^2 < \infty \quad \forall y \geq 0. \end{cases} \quad (4)$$

Заметим сначала, что ее решение, удовлетворяющее граничному условию Неймана

$$\frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0,$$

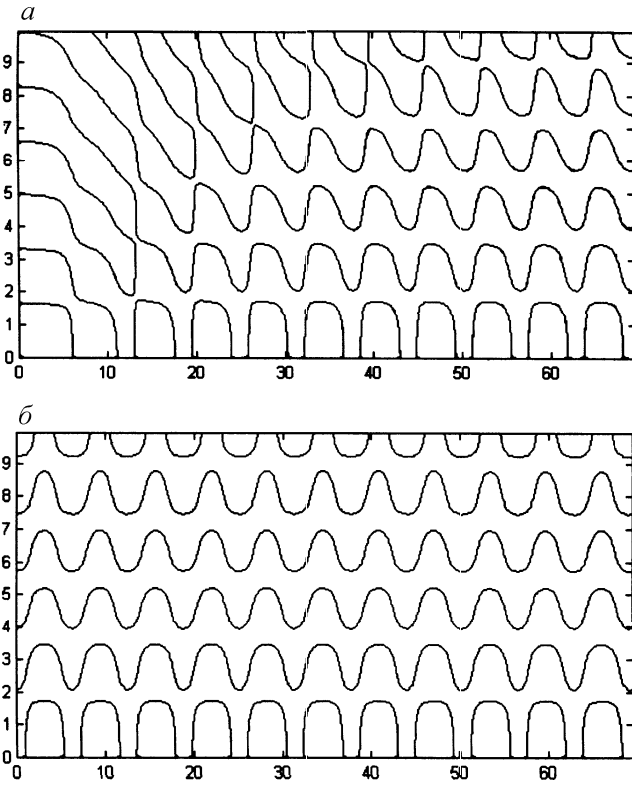


Рис. 2. Узловые линии функции $U(x, y)$ (а) и ее асимптотика порядка $O\left(\frac{1}{|x|^2}\right)$ при $\lambda = 4$, $a = 1$, $\frac{\partial^2}{\partial \omega^2} f(0, \lambda) = 2$, $\frac{\partial^2}{\partial \omega^2} f(a, \lambda) = 4$ (б)

тоже можно использовать для построения новых волноводов, ловушечная мода которых убывает как $|x|^{-1}$. В самом деле, решение этой задачи имеет вид

$$u(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} dk \varphi(k, \lambda) \cos(\sqrt{\lambda - k^2} y) e^{-ikx}.$$

В частности, взяв при $\lambda > a^2$

$$\varphi(k, \lambda) = \begin{cases} \frac{1}{2i}, & k \in (0, a), \\ -\frac{1}{2i}, & k \in (-a, 0), \\ 0, & k \in (-\infty, -a) \cup (a, \infty), \end{cases}$$

получим следующее решение задачи (4):

$$u(x, y) = \int_0^a dk \cos(\sqrt{\lambda - k^2} y) \sin(kx). \quad (5)$$

Значит, в областях между узловыми линиями функции $u(x, y)$ задача (1) имеет ловушечную моду. Эти области являются гофрированными волноводами, а сами ловушечные моды убывают как $|x|^{-1}$, поскольку

$$u = -\frac{1}{x} \left\{ \cos(\sqrt{\lambda - a^2} y) \cos(ax) + \cos(\sqrt{\lambda} y) \right\} + o(|x|^{-1}).$$

Вид этих кривых представлен на рис. 3, 4 (линия $y = 0$ в данном случае не является узловой).

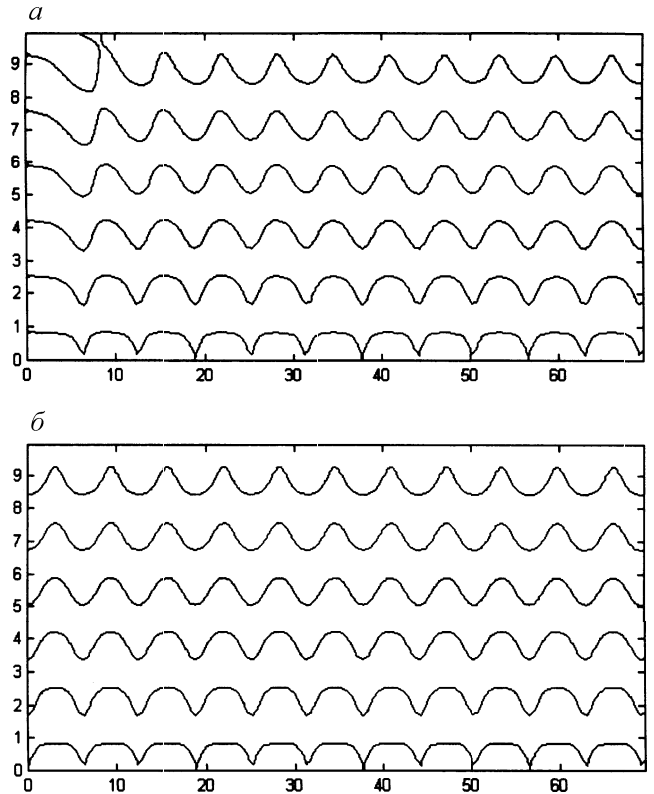


Рис. 3. Узловые линии функции $U(x, y)$ (а) и ее асимптотика при $\lambda = 2$, $a = 0.8$ (б)

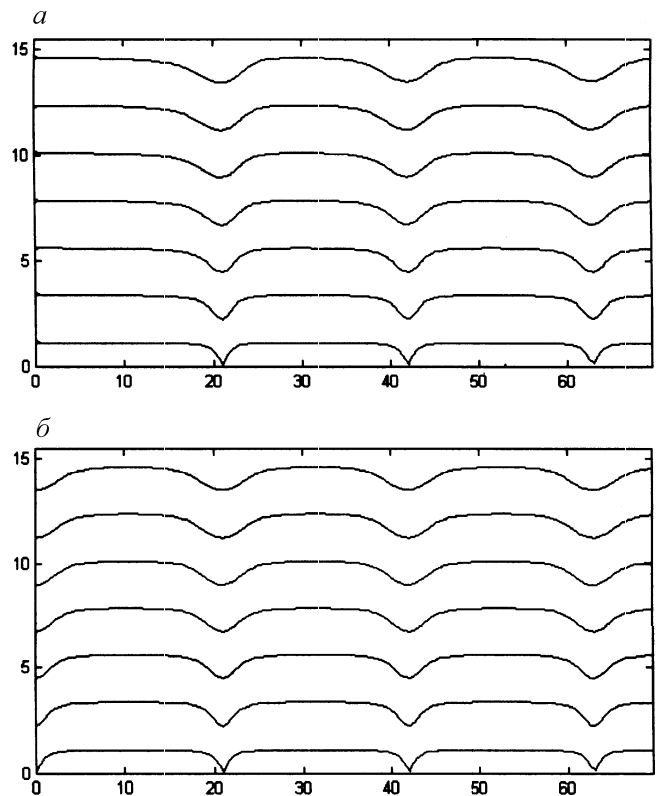


Рис. 4. Узловые линии функции $U(x, y)$ (а) и ее асимптотика порядка $O\left(\frac{1}{|x|}\right)$ при $\lambda = 2$, $a = 0.3$ (б)

Построим теперь волновод, ловушечная мода которого убывает как x^{-2} , используя частное решение (4) следующего вида:

$$u(x, y) = \int_0^a d\omega f(\omega, \lambda) \sin(\sqrt{\lambda - \omega^2}y) \times (\sin(\omega x) + \cos(\omega x)). \quad (6)$$

Область, заключенная между узловыми линиями этого решения, имеет ловушечную моду, однако линия $y = 0$ не является узловой. В случае, когда $f(a, \lambda) = f(0, \lambda) = 0$, первый член асимптотики полностью исчезает и основную роль играет второй:

$$u(x, y) = \frac{1}{x^2} \left\{ \frac{\partial f(a, \lambda)}{\partial \omega} \sin(\sqrt{\lambda - a^2}y) \times (\sin(ax) + \cos(ax)) - \frac{\partial f(0, \lambda)}{\partial \omega} \sin(\sqrt{\lambda}y) \right\} + o(x^{-2})$$

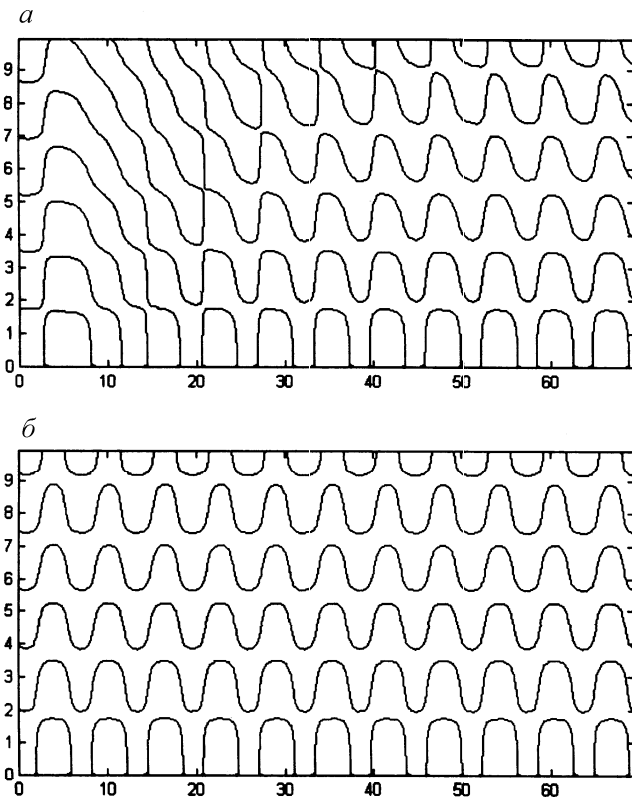


Рис. 5. Узловые линии функции $U(x, y)$, заданной соотношением (6), (а) и ее асимптотика порядка $O(\frac{1}{x^2})$ при $\lambda = 4, a = 1, \frac{\partial}{\partial \omega} f(0, \lambda) = 2, \frac{\partial}{\partial \omega} f(a, \lambda) = 3$ (б)

при условии $a^2 < \lambda$. Узловые линии $u(x, y)$, ограничивающие область Ω , стремятся к кривым

$$\frac{\partial f(a, \lambda)}{\partial \omega} \sin(\sqrt{\lambda - a^2}y) (\sin(ax) + \cos(ax)) - \frac{\partial f(0, \lambda)}{\partial \omega} \sin(\sqrt{\lambda}y) = 0.$$

Области между этими кривыми представляют собой регулярные гофрированные волноводы (рис. 5).

Все сказанное выше можно обобщить на случай, когда $f(\omega, \lambda)$ и ее частные производные по ω до $(n-1)$ порядка включительно равны нулю при $\omega = a$. В этом случае получаются волноводящие системы, соответствующие заданному λ и имеющие собственные функции, убывающие как $|x|^{-n}$. Поэтому мы можем констатировать, что существуют гофрированные волноводы, ловушечные моды которых убывают как $|x|^{-n}$ при любом натуральном n .

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты 02-01-00271, 03-01-00166) и программы «Университеты России» (грант УР.02.03.010).

Литература

1. Rellich F. // Studies and essays presented to R. Courant. N. Y., 1948.
2. Jones D.S. // Proc. Camb. Phil. Soc. 1954. **49**. P. 668.
3. Evans D.V., Levitin M., Vassiliev D. // J. Fluid Mech. 1994. **261**. P. 21.
4. Evans D.V., Porter R. // Quart. J. Mech. Appl. Math. 1998. **51**. P. 263.
5. Davies E.B., Parnowski L. // Quart. J. Mech. Appl. Math. 1995. **51**. P. 477.
6. Ильинский А.С., Кравцов В.В., Свешников А.Г. Математические модели электродинамики. М., 1991.
7. Боголюбов А.Н., Делицын А.Л., Малых М.Д. // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2001. № 6. С. 65 (Moscow University Phys. Bull. 2001. No. 6. P. 79).
8. Боголюбов А.Н., Делицын А.Л., Малых М.Д. // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. 2003. **43**. № 1. С. 127.
9. Федоряк М.В. Асимптотика. Интегралы и ряды. М., 1987.

Поступила в редакцию 11.12.02