УДК 551.511.32:536.758

БАЗИС ОРТОГОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ ДЛЯ ОПИСАНИЯ ВЕРТИКАЛЬНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ ХАРАКТЕРИСТИК В АТМОСФЕРЕ ЗЕМЛИ

В. П. Юшков

(*кафедра физики атмосферы*)

E-mail: atm@phys.msu.su

Для описания случайных метеорологических полей в атмосфере предлагается система ортогональных функций, построенных в форме собственных решений задачи Штурма–Лиувилля. Анализируется семейство решений этой задачи над поверхностью сферы в зависимости от двух параметров, один из которых связывает внутреннюю энергию с оператором Лапласа, а второй описывает граничное условие на этой поверхности.

Введение

Использование ортогональных собственных функций (ОСФ) в качестве базиса разложения случайных полей в геофизике является широко употребительным, и список таких исследований насчитывает уже не одну сотню работ (см., напр., ссылки в [1–3]). Так, например, в глобальных спектральных моделях базисными являются сферические функции, которые входят в частные решения уравнений Лапласа и Гельмгольца в сферических координатах, что позволяет использовать их в численных схемах прогноза погоды и климата [4–7]. После работ А. М. Обухова о случайных полях [8, 9] (в том числе случайных полях на сфере) большое распространение получили эмпирические ортогональные собственные функции (ЭОСФ или EOF в английской транскрипции) [1, 3, 10, 11].

Гораздо меньше подобных работ можно видеть об ортогональных функциях по вертикальной координате, хотя их применение в синоптических и климатических моделях обсуждалось в некоторых работах (см., напр., [2, 12]). Это объясняется, по-видимому, трудностью выбора такой системы функций, разложение по которой основных синоптических характеристик (температуры, давления, скорости и направления ветра (или функции тока и вихря)) приводило бы к достаточно быстрой сходимости коэффициентов разложения, с тем, чтобы относительно небольшое число коэффициентов описывало основные закономерности распределения этих характеристик и их естественной изменчивости.

В настоящей работе предлагается такая система ОСФ, по которой можно провести разложение поля плотности атмосферы, а такие характеристики, как температура (внутренняя энергия) и скорость ветра (или момент импульса), при разложении по этой же системе функций представляются собственными значениями или средними для каждой моды разложения. Такой подход позволяет использовать законы сохранения массы, энергии, импульса и момента импульса всей атмосферы, так как каждая мода характеризует свойства всей атмосферы.

В первом приближении поверхность Земли рассматривается в форме сферы, а геопотенциал пропорционален $1/r$. В этом приближении не рассматривается влияние силы Кориолиса на распределение плотности воздуха, а влияние центробежного ускорения учитывается через геопотенциал (сумму гравитационного потенциала и потенциала центробежной силы), который зависит только от высоты над поверхностью. По существу это стандартная замена геопотенциальных координат сферическими с наибольшими ошибками метрической формы у поверхности Земли около 0.17% [13]. В такой упрощенной постановке построенные ОСФ могут служить основой для нахождения в последующем более точных приближений методами теории возмущений.

Постановка задачи

Нам необходимо найти систему функций, ортогональных вне сферы радиуса R_0, действительных, убывающих на бесконечности и квадратично интегрируемых. Первая (главная) или несколько первых ОСФ должны иметь вертикальный масштаб характерный для наблюдаемого распределения плотности.

Будем искать эту систему функций $\{\psi_i\}_{i=0}^{\infty}$ как решения задачи Штурма–Лиувилля с самосопряженным линейным оператором энергии для центрального поля:

$$-\frac{\gamma^2}{2m_a}\Delta\psi_i - \frac{GMm_a}{r}\psi_i = E_i\psi_i, \tag{1}$$

где γ — постоянная, связывающая распределение плотности через оператор Лапласа с внутренней энергией этого распределения [14], m_a — масса атмосферы, M — масса Земли, $-\frac{GMm_a}{r}$ — гравитационный потенциал, E — полная энергия распределения. Форму, или моду, стационарного распределения ψ обычно называют «волновой функцией», а само уравнение хорошо известно как уравнение Шрёдингера.

Распределение плотности вероятности (обнаружить «пробную» частицу единичной массы), выражаемое через квадрат «волновой функции», должно проявляться в среднем распределении плотности атмосферы. Поскольку распределение плотности атмосферы по высоте близко к экспоненциальному, чтобы эти функции описывали и равновесное распределение плотности, граничным условием на поверхности должно быть условие 3-го рода: $\frac{\partial\psi}{\partial r}\Big|_{r=R_0}=-\lambda\psi$.

Параметр γ определяет масштаб всех собственных функций (ниже для краткости СФ), и поэтому его нужно выбрать таким образом, чтобы наблюдаемое среднее (по времени и угловым координатам) распределение плотности атмосферы по вертикали хорошо описывалось первой СФ (точнее нулевой, если следовать традиционной нумерации основного или невозмущенного состояния). Этот параметр можно выразить через среднюю температуру T_a (скорость внутреннего движения), приведенную высоту атмосферы H_0, средний радиус Земли R_0 и массу атмосферы m_a.

Решение уравнения Шрёдингера в приближении тонкой атмосферы

Домножим обе части уравнения (1) на множитель H^2, имеющий смысл квадрата приведенной высоты для каждой моды, разделим на $-\frac{\gamma^2}{2m_a}$ и обозначим безразмерные величины следующим образом: $\frac{r}{H}=x$, $\frac{R_0}{H}=x_0$, $\frac{2m_a^2 g_0 R_0^2 H}{\gamma^2}=C$ и $-\frac{2m_a E H^2}{\gamma}=\varepsilon$. Перейдем в сферическую систему координат, используем разделение переменных, так как потенциал зависит только от радиальной координаты, выделим из лапласиана радиальную часть: $\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{2}{x}\frac{\partial}{\partial x}$. Угловая компонента решения будет сферической функцией j-го порядка. Уравнение для радиальной компоненты $\varphi(x)$ будет иметь вид:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{2}{x}\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{C}{x}\varphi-\frac{j(j+1)}{x^2}\varphi=\varepsilon\varphi.$$

Рассмотрим сначала сферически симметричные решения ($j=0$), так как нас интересует в первую очередь изменение СФ с высотой. Эта задача Штурма–Лиувилля имеет дискретный спектр собственных значений (СЗ) при отрицательных значениях энергии E. Сделав подстановку $\varphi=e^{-x/2}\phi$ и полагая $\varepsilon=1/4$, т. е. связав приведенную высоту с энергией распределения, получаем, что ϕ есть вырожденные (конфлюэнтные) гипергеометрические функции ${}_1F_1$ [15], удовлетворяющие уравнению

$$x\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+(2-x)\frac{\partial\phi}{\partial x}+(C-1)\phi=0.$$

Однако в отличие от классических полиномов Лагерра (при $C=n+1$) для решения задачи в пространстве вне сферы необходимо удовлетворить не только условию на бесконечности, которое выражается в форме квадратичной интегрируемости, но и граничному условию на поверхности, которое теперь имеет вид $\frac{\partial\phi}{\partial x}\Big|_{x=x_0}=(\frac{1}{2}-\lambda H)\phi$. Второе линейно независимое решение не является квадратично интегрируемым даже с множителем $e^{-x/2}$, и оно не может быть использовано в общем решении. Так как асимптотика интегрируемого (с весом e^{-x}) решения известна ($\phi\sim x^{-1}$ при $x\to\infty$ [16]) и поскольку нас интересуют главным образом решения в области $x\approx x_0$ ($\frac{z}{R_0}\ll 1$), для нахождения СЗ и аппроксимации точного решения можно воспользоваться теорией возмущений и использовать аналитическое решение приближенного уравнения. Для этого сделаем подстановку $\phi(x)=x^\alpha\omega(x)$. Тогда $\omega(x)$ удовлетворяет уравнению

$$x\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}+(2(1+\alpha)-x)\,\frac{\partial\omega}{\partial x}+(C-\alpha-1)\omega+\frac{\alpha(\alpha+1)}{x}\omega=0, \tag{2}$$

и, считая последний член вблизи поверхности постоянным и равным $\frac{\alpha(\alpha+1)}{x_0}$, решения уравнения (2) в области $\frac{x-x_0}{x_0}\ll 1$ можно аппроксимировать обобщенными полиномами Лагерра $L_n^{2\alpha+1}$, если подобрать параметр аппроксимации α так, что $C-1-\alpha+\frac{\alpha(\alpha+1)}{x_0}=n$. Если представить теперь C в форме $\frac{\varkappa}{x_0}$, поскольку $C\sim H$, то

$$\begin{gathered}\frac{\varkappa+\alpha(\alpha+1)}{x_0}-(\alpha+1)=n\\ \text{или}\quad x_0=\frac{\varkappa+\alpha(\alpha+1)}{\alpha+n+1}.\end{gathered} \tag{3}$$

Таким образом, x_0 можно рассматривать как спектральный параметр, выбор которого теперь определяется граничным условием $\frac{\partial\omega}{\partial x}\Big|_{x=x_0}=\left(\frac{1}{2}-\frac{\lambda R_0}{x_0}-\frac{\alpha}{x_0}\right)\omega$. Подставляя в это граничное условие решение в форме полинома Лагерра, находим корень уравнения:

$$L'^{2\alpha+1}_n(x)=\left(\frac{1}{2}-\frac{\lambda R_0}{x}-\frac{\alpha}{x}\right)L_n^{2\alpha+1}(x), \tag{4}$$

который и должен равняться x_0.

Первые собственные функции и собственные значения

Рассмотрим характер первых СФ и поведение первых СЗ. Основное состояние ($n=0$) должно удовлетворять двум условиям: $\frac{x_0}{2}=\lambda R_0+\alpha$ и $x_0=\frac{\varkappa}{(\alpha+1)}+\alpha$. Соответственно $\frac{\varkappa}{\alpha+1}=2\lambda R_0+\alpha$ или

$$\alpha=-\left(\lambda R_0+\frac{1}{2}\right)\pm\sqrt{\left(\lambda R_0-\frac{1}{2}\right)^2+\varkappa}.$$

Поскольку интегрируемые решения существуют только для $\alpha>-1$, подходящим является первый корень. Для изотермической атмосферы $\alpha_0=0$, при этом $\varkappa=2\lambda R_0$ и $x_0=2\lambda R_0$.

Введение параметра α, который необходим для выполнения граничного условия, не изменяет поведения самой СФ вблизи поверхности, поскольку $\left(\frac{x}{x_0}\right)^{\alpha} \approx e^{(\alpha/x_0)y}$ (здесь $y = x - x_0 = \frac{z}{H_0}$, где z — высота над поверхностью) и, следовательно, $\varphi_0 \sim e^{-(1/2-\alpha/x_0)y} = e^{-(\lambda R_0/x_0)y} = e^{-\lambda z}$.

Следующая СФ — линейная по x: $\omega_1 = 2(\alpha+1) - x$. Обозначим точку поверхности теперь x_1, тогда

$$(2(\alpha+1) - x_1)\left(\frac{1}{2} - \frac{\lambda R_0}{x_1} - \frac{\alpha}{x_1}\right) = -1 \quad \text{и} \quad x_1 = \frac{\varkappa + \alpha(\alpha+1)}{\alpha+2}. \tag{5}$$

Если выбрать α_1 так, что $\alpha_1(\alpha_1+1) \approx \varkappa$, то $x_1 \approx 2\alpha_1$. Для изотермической атмосферы ($\varkappa = 2\lambda R_0$) $\alpha_1 \approx \sqrt{2\lambda R_0}$. При этом $1 \ll \alpha_1 \ll \varkappa$ и $x_1 = 2(\alpha_1+1) - \delta$, так что из (5) $\delta = \frac{2(\alpha_1+1)}{\lambda R_0} \ll 1$. Или $x_1 = 2(\alpha_1+1)\left(1 - \frac{1}{\lambda R_0}\right) \approx 2\sqrt{2\lambda R_0} \ll x_0$. Если теперь выразить первую СФ через размерную высоту над поверхностью z, то

$$\omega_1 = 2(\alpha_1+1) - (x_1 + \frac{z}{H}) = \frac{2(\alpha_1+1)}{\lambda R_0} - \frac{z}{H} \approx$$
$$\approx \frac{x_1}{\lambda R_0} - \frac{z}{H} = \frac{1-\lambda z}{\lambda H},$$

и ноль этой функции лежит на высоте $z = \frac{1}{\lambda} = 2H_0$.

При $\lambda R_0 \gg 1$ и $x_n \approx 2\alpha_n \ll \lambda R_0$ x_n близки к одному из нулей полиномов Лагерра, поэтому если в качестве первого приближения к решениям уравнения (4) брать первые нули полиномов, то все эти нули будут выше поверхности $x = x_n$. Более точная аппроксимация возможна при $|\alpha| < 1$. При этом точное решение аппроксимируется полиномом большой степени m, а x_n выбирается из условия расположения n корней уравнения $L_m^{2\alpha+1}(x) = 0$ выше поверхности.

Для нахождения последующих СФ имеет смысл решать систему двух уравнений (4) и (3) численно, выбирая в качестве первого приближения $\alpha_n = \sqrt{\varkappa}$ и $x_n = 2\sqrt{\varkappa}$. Итерационная процедура (например, по методу Ньютона), позволяет быстро найти оба параметра α_n и x_n. Заметим, что соотношение между α_n и x_n может варьироваться в зависимости от близости $\varkappa$ к $2\lambda R_0$. После того как найдено собственное значение x_n или $E_n = -\frac{1}{4}\frac{\gamma^2}{2m_a R_0^2}x_n^2$, СФ исходного точного уравнения могут быть рассчитаны численно во всей области $r \geqslant R_0$. На рис. 1 представлен характер первых собственных функций для $n = 1\ldots 4$ при $\varkappa = 2\lambda R_0$, а в таблице приведены точные значения параметра аппроксимации α_n и безразмерной координаты поверхности x_n для полиномиальной аппроксимации малой и большой степени, а также для численного расчета функции Куммера ${}_1F_1$ с помощью пакета MAPLE. Поверхность, как видим, лежит вблизи первого нуля СФ,

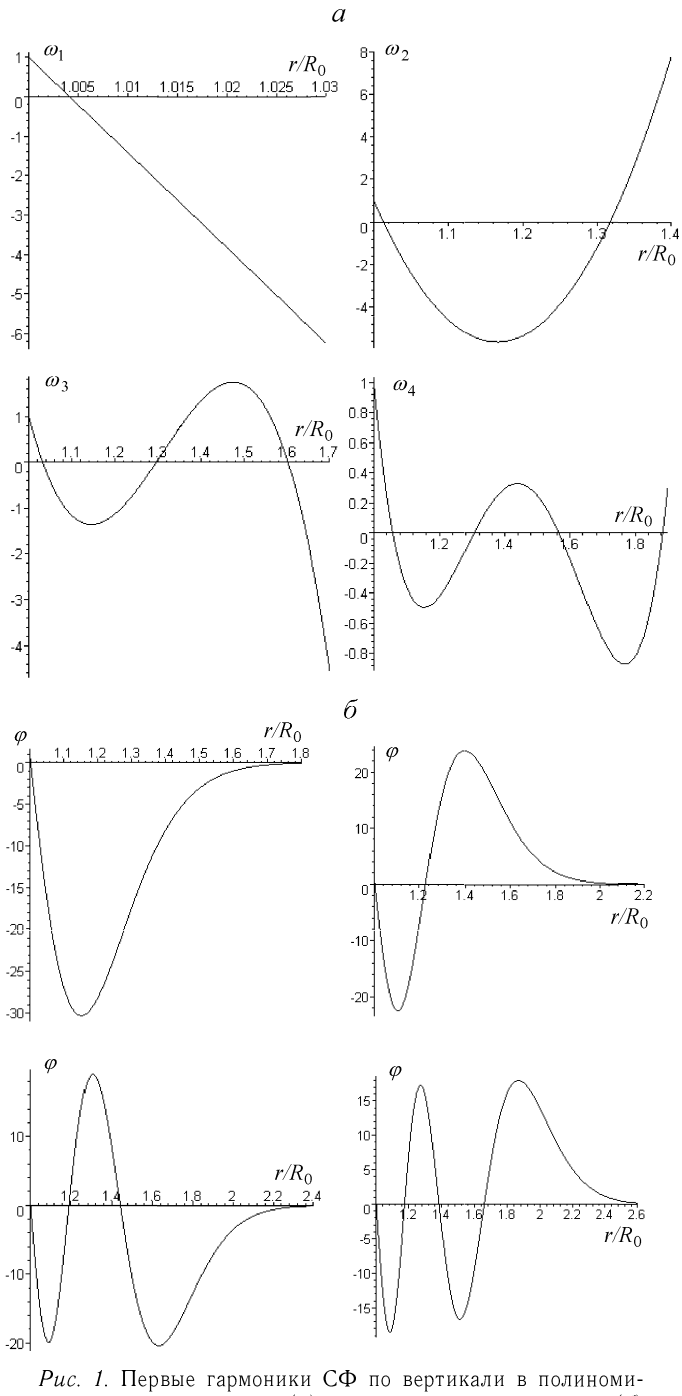

Рис. 1. Первые гармоники СФ по вертикали в полиномиальной аппроксимации (*а*) и как численное решение (*б*) при $\varkappa = 2\lambda R_0$. Высота нормирована в радиусах Земли R_0, значение на поверхности равно единице

и это позволяет оценить положение остальных нулей СФ по отношению к радиусу Земли. По существу, первые собственные функции вблизи поверхности близки к $(1-\lambda z)$, отличаясь незначительно лишь наклоном (положением нуля) и показателем экспоненты.

Параметры семейства собственных функций

«Основное состояние», которое дает близкое к среднему по времени и по поверхности (по углам) вертикальное распределение плотности атмосферы,

Значения параметра аппроксимации α_n и безразмерной координаты поверхности x_n для первых СФ

Номер гармоники	Параметр аппроксимации	Координата поверхности	Степень полинома	Параметр аппроксимации	Координата поверхности	Численное решение
1	26.18	54.212	15	−0.304	48.61	48.6154
2	27.45	50.155	17	−0.776	44.30	44.3501
3	28.23	47.214	18	−0.445	41.13	41.1204
4	28.79	44.837	19	−0.191	38.49	38.5417

позволяет оценить параметр λ. Если распределение плотности близко к равновесному, т. е. экспоненциальному, распределение «корня из плотности» близко к $\varphi_0 = \sqrt{\rho(0)}\, e^{-\lambda z}$ при $z \ll R_0$. Метеорологические наблюдения показывают, что отклонения средней плотности от экспоненциального распределения невелики и приближенно описываются линейным градиентом температуры с высотой. Поэтому в качестве первого приближения для λ можно взять значение $\lambda = g_0/(2R_\mu T_0)$, где T_0 — средняя (по времени и угловым координатам) температура поверхности, которое соответствует гидростатическому приближению. Значение T_0 близко к 287 K.

Постоянную γ можно найти, возвращаясь к определениям безразмерных параметров C и $\varkappa$. Если $\varkappa = 2\lambda R_0$, то

$$\gamma^2 = \frac{2m_a^2 g_0 R_0^3}{\varkappa} = \frac{m_a^2 g_0 R_0^2}{\lambda} = m_a^2 2R_\mu T_0 R_0^2.$$

При таком значении $\varkappa$ величина γ^2 имеет смысл квадрата момента импульса внутреннего движения частиц (молекул) в атмосфере.

Определение коэффициентов разложения по заданной системе СФ

Известно, что ЭОСФ могут быть найдены как СФ второго момента случайного поля $B(\mathbf{r},\mathbf{r}')$ [10]. Пусть $\{\chi_i\}$ — эмпирические ОСФ, а $\{\psi_i\}$ — теоретические ОСФ, тогда $B(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \sum_i C_i^2 \chi_i^*(\mathbf{r})\chi_i(\mathbf{r}')$, поэтому, находя СФ и СЗ второго момента $B_\rho(\mathbf{r},\mathbf{r}')$ «корня из плотности», мы получаем и коэффициенты разложения C_i средней плотности атмосферы, так что

$$\chi = \sum_i C_i \chi_i, \quad \rho = m_a \chi^2 = m_a B_\rho(\mathbf{r},\mathbf{r}). \qquad (6)$$

При использовании метода Галеркина коэффициенты разложения ЭОСФ по заданной системе теоретических ортогональных функций (ТОФ) являются собственными векторами матрицы $B_{kl} = \int \psi_k(\mathbf{r}) B(\mathbf{r},\mathbf{r}') \psi_l^*(\mathbf{r}')\, d^3r\, d^3r'$, и если ТОФ совпадают с ЭОСФ, то эта матрица будет диагональной.

Если рассмотреть среднее по времени и угловым координатам (θ,φ), т. е. «вертикальный разрез» этого момента:

$$B(z,z') = \frac{R_0^2}{\tau m_a} \int \sqrt{\rho(z,\theta,\varphi)}\sqrt{\rho(z',\theta,\varphi)}\, \sin\theta\, d\theta\, d\varphi\, dt,$$

то λ можно определить по характеристике $\vartheta = \ln\frac{\chi_0(z)}{\chi_0(0)} = \frac{1}{2}\ln\frac{B(z,z)}{B(0,0)}$, поскольку $\left.\frac{\partial\vartheta}{\partial z}\right|_{z=0} = -\lambda$. Здесь за знак интеграла выведено R_0^2, так как интегрирование реально проводится по области наблюдений до высот $z \ll R_0$, а τ — интервал интегрирования по времени — длина архива наблюдений.

Для проверки предложенного подхода и разложения поля плотности использовался климатический архив национального климатического центра данных (США) «GGUAS» [17]. Были построены различные разрезы второго момента и определены главные характеристики атмосферы. По данным этого архива — $\lambda = 0.0599$ км$^{-1}$, $H_0 = 8.354$ км и $2\lambda R_0 = 763.25$, а на рис. 2 приведен график второго момента равновесного распределения плотности $B(z,z')$, построенный по этим данным, из которого видно, что $B(z,z')$ можно описать суперпозицией небольшого числа полиномов (с экспоненциальными множителями).

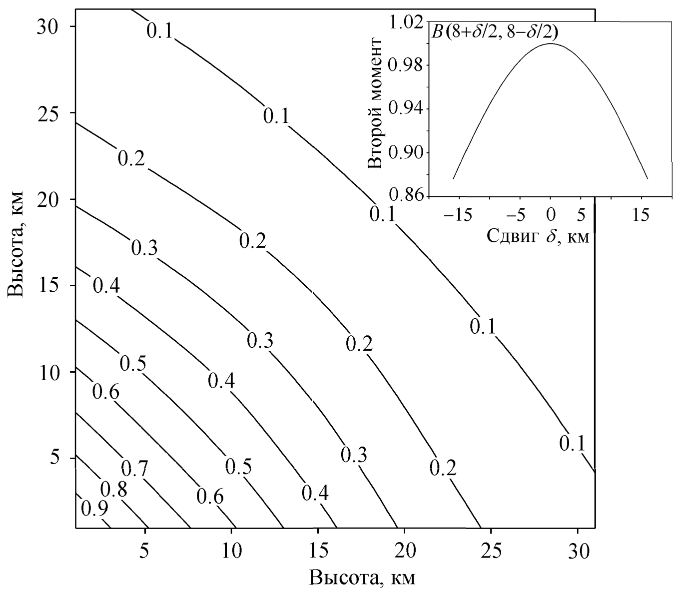

Рис. 2. Второй момент «корня из плотности атмосферы» $B(z,z')$ как функция высот. На врезке показан симметричный разрез этой функции $B(8+\delta/2, 8-\delta/2)$. Его можно аппроксимировать четным полиномом небольшой степени, что указывает на быструю сходимость ряда разложения (6)

Автор выражает глубокую признательность В. Е. Куницыну за поддержку этой работы, М. Д. Малых и А. Н. Боголюбову за помощь в математическом обосновании полученного результата, а также Я. А. Ильюшину за ценные критические за-

мечания и П. Ф. Демченко за редакционные исправления, которые немало способствовали улучшению этой статьи.

Литература

1. *Галин М.Б.* // Изв. РАН. Сер. ФАО. 2002. **38**, № 1. С. 34.
2. *Фролов А.В., Важник А.И., Цветков В.И., Астахова Е.Д.* // Метеорология и гидрология. 2000. № 2. С. 10.
3. *Shen S.S., North G.R., Kim K-Y.* // J. Climate. 1994. **7**. P. 1999.
4. *Курбаткин Г.П., Дегтярёв А.И., Фролов А.В.* Спектральная модель атмосферы, инициализация и база данных для численного прогноза погоды. СПб., 1994.
5. *Bourke W., McAvaney B., Puri K., Thurling R.* // Methods in Computational Physics. Vol. 17 / Ed. J. Chang. Academic Press, 1977.
6. *Eliasen E., Machenhauer B., Rasmussen E.* // Rep. N 2, Institute for Theoretical Meteorology; University of Copenhagen, 1970.
7. *McAvaney B.J., Bourke W., Pun K.* // J. Atmos. Sci. 1978. **35**. P. 1557.
8. *Обухов А.М.* // Тр. ГЕОФИАН. 1954. № 24 // Турбулентность и динамика атмосферы. Л., 1988.
9. *Обухов А.М.* // УМН. 1947. **2**, № 2. С. 196; Турбулентность и динамика атмосферы. Л., 1988.
10. *Обухов А.М.* // Изв. АН. Сер. Геофизика. 1960. № 3. С. 432; Турбулентность и динамика атмосферы. Л., 1988.
11. *Kim K.-Y., North G.R., Shen S.S.* // J. Climate. 1995. **9**. P. 635.
12. *Важник А. И.* // Метеорология и гидрология. 1996. № 10. С. 15.
13. *Гилл А.* Динамика атмосферы и океана. М., 1986.
14. *Юшков В.П.* // Метеорология и гидрология. 2001. № 6. С. 50.
15. *Мэтьюз Дж., Уокер Р.* Математические методы физики. М., 1972.
16. *Янке Е., Эмде Ф., Лёш Ф.* Специальные функции. М., 1977.
17. Global Gridded Upper Air Statistics CD-ROM. Asheville, 1996.

Поступила в редакцию
18.03.04