

ФИЗИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

УДК 536.631

О РЕШЕНИИ ОДНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ФОТОТЕПЛОВОЙ ДИАГНОСТИКИ С ПРИМЕНЕНИЕМ МЕТОДА РЕГУЛЯРИЗАЦИИ А. Н. ТИХОНОВА**В. В. Алешин, В. А. Выслоух***(кафедра общей физики и волновых процессов)*

Рассмотрена задача неразрушающей диагностики одномерной среды фототепловым методом. Развита алгоритм, основанный на численной минимизации целевой функции и сплайн-аппроксимации параметров среды, который позволяет удовлетворительно диагностировать форму неоднородности.

Фототепловая диагностика — один из эффективных методов неразрушающего контроля, предназначенный для выявления неоднородностей в тонком приповерхностном слое образца. Суть метода состоит в следующем: поверхность образца нагревают модулированным по интенсивности лазерным излучением и регистрируют температуру поверхности, точнее ее компоненту, осциллирующую с той же частотой, что и нагрев. Хотя образец при этом нагревается целиком, осциллирующая компонента температуры (тепловая волна) проникает относительно неглубоко, и ее значение на поверхности несет информацию лишь о тонком приповерхностном слое вещества. Решив соответствующую обратную задачу, можно диагностировать неоднородности, содержащиеся в этом слое.

Различные подходы к решению обратной задачи активно изучались в течение последних десяти лет. При анализе обычно делались ограничивающие допущения: так, например, в работе [1] было применено первое борновское приближение, авторы [2, 3] использовали явное ограничение на производные теплоемкости и теплопроводности, в работе [4] среда представлена в виде конечного числа однородных слоев, в [5] один из профилей (теплопроводности или теплоемкости) был постоянным, а другой состоял из линейно неоднородных слоев. В работе [6] явных ограничений на неоднородности не накладывалось, однако алгоритм давал реконструкцию на основе данных лишь при одной фиксированной частоте.

В связи с этим представляет интерес разработка метода, который был бы свободен от жестких ограничений на гладкость и малость неоднородности. Один из таких подходов был предложен нами в работах [7, 8] для случая одномерных неоднородностей. Он основан на аналитическом соотношении между тепловой волной на поверхности и профилями теплопроводности и теплоемкости, которое удалось найти, используя только сеточную дискретизацию. Иными словами, поверхностный отклик получен как явная функция параметров среды. Далее был использован обычный подход к таким задачам — минимизация целевой функции, т.е. отклонения отклика, вычисленного при текущих параметрах среды, от экспериментально измеренного. Целевая

функция в данном методе допускает аналитическое вычисление градиента, поэтому для минимизации был использован весьма эффективный метод сопряженных градиентов.

Описанный подход при всех достоинствах обладает одним существенным недостатком: обобщить его на многомерный случай весьма затруднительно. В настоящей работе к той же задаче применен несколько другой подход, который как раз допускает такое обобщение. Основа его — аппроксимация теплофизических характеристик среды сплайнами и минимизация целевой функции методом прямого поиска с использованием регуляризации. Аналитическое вычисление градиента целевой функции при этом не требуется.

1. Постановка задачи

Обратную задачу рассмотрим в следующей геометрии. Неоднородная среда занимает полупространство $x > 0$, а теплофизические параметры зависят только от координаты x . Поверхность среды $x = 0$ облучается гармонически модулированным во времени с циклической частотой ω лазерным излучением с интенсивностью

$$I(t) = I_0 + \text{Re}(I e^{i\omega t}),$$

где I_0 и I — средняя интенсивность и амплитуда модуляции ($I_0 > I$). Нагрев производится в точке $r = 0$, измерение температуры — в точке r ($r^2 = y^2 + z^2$).

Определив комплексную амплитуду тепловой волны $U(x, r, \omega)$ соотношением

$$U(x, r, t) = U_0 + \text{Re}[U(x, r, \omega) e^{i\omega t}],$$

запишем для нее уравнение

$$k(x) \frac{1}{r} U_r + k(x) U_{rr} + k'(x) U_x + k(x) U_{xx} = i\omega c(x) U \quad (1)$$

с граничными условиями

$$U_x|_{x=0} = -\frac{I}{k(0)} \frac{\delta(r)}{2\pi r}, \quad U_x|_{x \rightarrow \infty} = 0, \quad (2)$$

где $k(x)$ — коэффициент теплопроводности, $c(x)$ — теплоемкость единицы объема. Введем теперь комплекс-

ную функцию $T(x, s, \omega)$, связанную с исходной комплексной амплитудой преобразованием Ханкеля нулевого порядка:

$$T(x, s, \omega) = \int_0^{\infty} J_0(sr)U(x, r, \omega)rdr. \quad (3)$$

Уравнение для спектральной амплитуды $T(x, s, \omega)$ является уравнением в полных производных:

$$T_{xx} + \frac{k'(x)}{k(x)}T_x = \left(i\omega \frac{c(x)}{k(x)} + s^2 \right) T, \quad (4)$$

граничные условия имеют вид

$$T_x|_{x=0} = -\frac{1}{2\pi k(0)}, \quad T_x|_{x \rightarrow \infty} = 0. \quad (5)$$

Обратную задачу применительно к рассматриваемому случаю поставим следующим образом: зная величину $T(0, s, \omega)$, которую легко найти из экспериментально измеренного профиля температуры поверхности с использованием преобразования Ханкеля (3), необходимо вычислить величины $c(x)$ и $k(x)$.

2. Алгоритм решения задачи

Решение задачи разделяется на три этапа: 1) дискретизация переменных и функций, описывающих среду; 2) выбор алгоритма вычисления поверхностного отклика по заданным параметрам среды; 3) выбор целевой функции и ее численная минимизация.

Дискретизация. В уравнение (4) входят функции $c(x)/k(x) = a(x)$ и $k'(x)/k(x) = b(x)$. Возьмем в качестве переменных для минимизации величины $a(x_q)$ и $b(x_q)$, где x_q ($q = 1, \dots, N_q$) — значения x на пространственной сетке. Выбор числа точек N_q продиктован следующими компромиссными соображениями: с одной стороны, шаг сетки должен быть достаточно мал (меньше характерного размера неоднородности), с другой — число узлов разбиения N_q должно быть как можно меньше для сокращения вычислительных затрат. На практике использовалось N_q порядка 20.

Выбор алгоритма решения прямой задачи. Для нахождения отклика был применен развитый нами ранее метод цепных дробей [7, 8]. Для достижения требуемой точности необходим шаг существенно меньший, чем шаг основной сетки x_q . Значения $a(x_j)$ и $b(x_j)$ в узлах вспомогательной сетки x_j ($j = 1, \dots, N_j$) были получены по точкам $a(x_q)$ и $b(x_q)$ с помощью аппроксимации бикубическими сплайнами, типичное число вспомогательных узлов $N_j = 250$. Заметим, что прямую сеточную задачу в данном случае можно решать и стандартными методами (например, методом прогонки), так как аналитическое вычисление градиента целевой функции не требуется.

Минимизация целевой функции. Введем нормированное отклонение (невязку) заданного и вычисленного откликов как функцию параметров среды:

$$F(\{a_q\}, \{b_q\}) = \sum_{l,p} \left| \frac{T(0, s_p, \omega_l) - T^{\text{exp}}(0, s_p, \omega_l)}{T^{\text{hom}}(0, s_p, \omega_l)} \right|^2. \quad (6)$$

Здесь $T^{\text{exp}}(0, s, \omega)$ — экспериментально полученный отклик, $T^{\text{hom}}(0, s, \omega)$ — решение для однородной среды, индексы p и l относятся к сеткам по параметру s и частоте ω соответственно. Если теперь задать ненулевую погрешность экспериментальных данных δ , то любая среда (т.е. совокупность $\{a_q\}$ и b_q) такая, что ее отклик отличается от заданного меньше чем на δ , может рассматриваться как решение. При этом нет гарантии, что все эти «решения» будут близки к истинному профилю неоднородности. Действительно, проведенные вычисления показывают, что при значении невязки δ (порядка 1%) получаются профили с гигантскими осцилляциями, совершенно не похожие на истинный профиль, т.е. задача является некорректно поставленной. Поэтому, следуя А. Н. Тихонову, модифицируем по методике [9] целевую функцию следующим образом:

$$T(\{a_q\}, \{b_q\}) = F(\{a_q\}, \{b_q\}) + \alpha \sum_q ((a_q - a_0)^2 + b_q^2). \quad (7)$$

Дополнительное второе слагаемое представляет собой квадрат расстояния от текущего профиля до однородного, умноженный на параметр регуляризации α , a_0 соответствует однородной среде. При заданном $\delta > 0$ величину α целесообразно выбирать так, чтобы выполнялось соотношение $F(\{a_q^{\text{min}}\}, \{b_q^{\text{min}}\}) = \delta^2$, где $\{a_q^{\text{min}}\}, \{b_q^{\text{min}}\}$ — элемент, на котором достигается минимум $T(\{a_q\}, \{b_q\})$.

Для численной минимизации был избран метод главных осей [10] как один из наиболее эффективных среди алгоритмов прямого поиска. Внутри каждого цикла итераций программа производит одномерные минимизации вдоль направлений главных осей, найденных на предыдущем цикле, после чего строит по найденным точкам квадратичную форму, точка минимума которой используется в последующем цикле.

3. Результаты численного анализа

Для тестирования описанного алгоритма была выбрана гауссова форма неоднородности. Результаты реконструкции профилей коэффициентов теплопроводности и теплоемкости приведены на рис. 1, 2. Для сравнения там же приведены профили, восстановленные методом цепных дробей. Отметим прежде всего, что реконструкция возможна лишь в области $0 < x < 1,5$, соответствующей максимальной глубине проникновения тепловой волны, так как информации о более глубоких слоях эмпирические данные не содержат. Видно, что профиль теплоемкости $c(x)$ воспроизводится существенно лучше, чем профиль теплопроводности $k(x)$. Вычисления производились на основе отклика, не искаженного шумом.

Заключение

Подведем краткие итоги. Развитый метод позволяет реконструировать форму неоднородности в приповерхностном слое образца. Жестких ограничений на малость или плавность неоднородности теплофизических

параметров при этом не накладывается. Примененный метод минимизации (метод главных осей) допускает прямое обобщение предложенного подхода на многомерный случай.

Авторы благодарны А.С. Чиркину за обсуждение

работы. Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Петербургского конкурсного центра в области фундаментального естествознания. В. Алешин благодарит также Соросовскую образовательную программу ISSEP за финансовую поддержку.

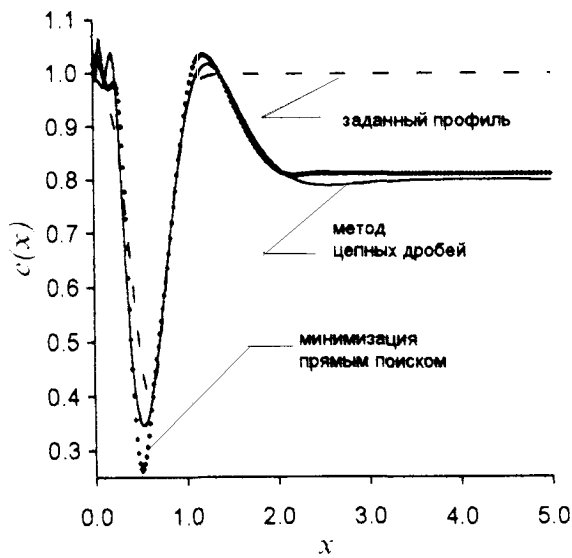


Рис. 1. Воспроизведение коэффициента теплоемкости

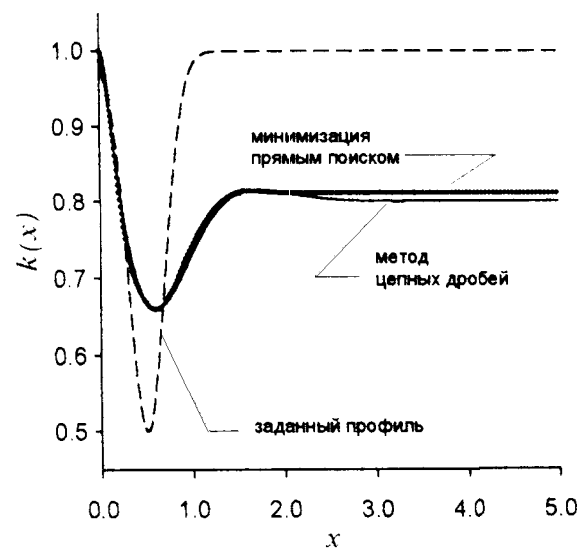


Рис. 2. Воспроизведение коэффициента теплопроводности

Литература

1. Pade O., Mandelis A. // J. de Physique. 1994. **C7**. P. 99.
2. Funak F., Mandelis A., Munidasa M. // Ibid. P. 95.
3. Mandelis A., Peralta S.B., Thoen J.J. // Appl. Phys. 1991. **70**. P. 1761.
4. Glorieux C., Fizez J., Thoen J.J. // Ibid. 1993. **73**. P. 684.
5. Lan T.T.N., Seidel U., Walther H.G.J. // Ibid. 1995. **77**. P. 4739.
6. Vidberg H.J., Jaarinen J., Riska D.O. // Can. J. Phys. 1986. **64**. P. 1178.

7. Aleshin V.V., Chirkin A.S. // Proc. SPIE. 1995. **2797**. P. 69.
8. Aleshin V., Vysloukh V. // Appl. Phys. 1997. **A64**, No. 6. P. 579.
9. Денисов А.М. Введение в теорию обратных задач. М., 1994.
10. Brent R.P. Algorithms for Finding Zeros and Extrema of Functions without Calculating Derivatives. N.Y., 1973.

Поступила в редакцию
23.05.97