Доказательство.

1. Для $f(\cdot) \in \overline{\mathcal{L}}(X)$ имеет место «интегральное представление»

$$f(x) = \sup_{y \in X} \min(\delta_y(x), f(y)), \ x \in X.$$

В силу свойства (6) и линейности $\overline{p}(\cdot)$

$$\overline{p}(f(\cdot)) = \sup_{y \in X} \overline{p}(\min(\delta_y(\cdot), f(y))) =$$
$$\sup_{y \in X} \min(f(y), \overline{p}(\delta_y(\cdot))) = \sup_{y \in X} \min(f(y), \varphi(y)).$$

Доказательство утверждения 2 не отличается от доказательства теоремы 4.3. Утверждение 3 очевидно. ■

Теорема 2 определяет максимальное продолжение $\overline{p}(\cdot)$ возможности $p(\cdot)$ нечетких событий, заданных характеристическими функциями из $\mathcal{L}(X)$ на класс любых нечетких событий с характеристическими функциями из $\overline{\mathcal{L}}(X)$, и дает представление продолженной возможности $\overline{p}(\cdot)$ в виде интеграла (7) характеристической функции нечеткого события $f(\cdot) \in \overline{\mathcal{L}}(X)$ по возможности $\overline{P}(\cdot)$.

Замечание 3. Для любой функции $f(\cdot) \in \mathcal{L}(X)$ имеют место следующие представления:

$$f(x) = \sup_{0 \le \alpha \le 1} \min(\lambda, \chi_\alpha(x)) = \sup_{0 \le \alpha \le 1} \min(\alpha, \tilde{\chi}_\alpha(x)), \ x \in X,$$

где $\chi_\alpha(\cdot)$ и $\tilde{\chi}_\alpha(\cdot)$ — характеристические функции множеств $A_\alpha = \{x \in X, f(x) = \alpha\}$ и $\tilde{A}_\alpha = \{x \in X, \ f(x) \ge \alpha\}$ соответственно. В силу свойства (6) меры и линейности (2.7) $\overline{p}(\cdot)$ отсюда следует, что

$$\overline{p}(f(\cdot)) = \sup_{0 \le \alpha \le 1} \min(\alpha, \overline{P}(A_\alpha)) = \sup_{0 \le \alpha \le 1} \min(\alpha, \overline{P}(\tilde{A}_\alpha)).$$

Второе из этих выражений известно как интеграл Sugeno, определенный в работе [5] на классе (измеримых) функций из $\mathcal{L}(X)$.

Литература

1. *Неве Ж.* Математические основы теории вероятностей. М., 1969.
2. *Пытьев Ю.П.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1997. № 3. С. 3 (Moscow University Phys. Bull. 1997. No. 3. P. 1).
3. *Майер П.А.* Вероятность и потенциалы. М., 1973.
4. *Пытьев Ю.П.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1997. № 4. С. 3 (Moscow University Phys. Bull. 1997. No. 4. P. 1).
5. *Sugeno M.* // Trans. S.I.C.E. 1972. **8**, No. 2. P. 95.

Поступила в редакцию
26.03.97

УДК 539.12

СПЕКТРАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ РАДИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЁДИНГЕРА С УДЕРЖИВАЮЩИМИ ТИПАМИ ПОТЕНЦИАЛОВ

А. С. Вшивцев*), А. В. Прокопов, В. Н. Сорокин*), А. В. Татаринцев*)

(кафедра квантовой теории и физики высоких энергий)

Впервые реализована процедура нахождения спектров на основе метода обобщенных интегральных преобразований для широкого класса радиальных уравнений Шрёдингера. Показано, что данная процедура хорошо работает для известных типов потенциалов. Одновременно этот метод позволяет получить существенно новые результаты аналитического характера для таких важных типов потенциалов, как «корнельский», что имеет значение для адронной физики.

Решение спектральной задачи для уравнения Шрёдингера со сферически-симметричными потенциалами является одной из важных задач теории спектроскопии сложных химических соединений, молекул, а также описания спектров барионных резонансов [1, 2] и мезонов кваркониев [3, 4]. Как известно, несмотря на отсутствие строгого теоретического обоснования, потенциальные модели дают неплохое описание спектров масс таких систем, как кварконий, чармоний и др. При моделировании потенциала взаимодействия этих систем обычно используют потенциалы удерживающего типа. Примером таковых может служить «корнельский» потенциал с двумя слагаемыми, из которых одно ответственно за кулоновское взаимодействие кварков, а второе соответствует удерживающему — струнному потенциалу, обеспечивающему конфайнмент.

Задача вычисления спектров энергий для уравнения Шрёдингера с различными типами потенциалов давно привлекает к себе исследователей и решается многими способами: прямым вычислением при заданных граничных условиях, налагаемых на волновые функции, вариационными методами, различными модификациями, комбинирующими аналитические и численные подходы. Значительное продвижение получил квазиклассический метод, который хорошо зарекомендовал себя для довольно широкого класса задач квантовой механики [5, 6]. Представляет интерес «интуитивный» подход, обсуждаемый в работе [7], который, по-видимому,

*) Московский государственный институт радиотехники, электроники и автоматики (технический университет).

тесным образом связан с решением обратной задачи рассеяния [8].

В настоящей работе продолжается развитие метода, предложенного в работах [9, 10], который существенным образом учитывает характер асимптотического поведения волновых функций при больших значениях параметра r (что эквивалентно малым импульсам). Этот метод фактически обобщает метод интегральных преобразований со специальным видом ядер, обеспечивающих правильное асимптотическое поведение волновых функций. Как было показано в работах [9–11], такой подход оказывается весьма плодотворным для нахождения низколежащих уровней спектра. Отметим, что именно низколежащие спектральные уровни в задачах изучения барионных резонансов и мезонов кваркониев играют существенную роль. Последнее обстоятельство позволяет надеяться на то, что развитие этого метода, предложенное в статье, окажется полезным для задач ядерной спектроскопии.

С учетом сказанного в настоящей работе дан точный алгоритм приведения радиального уравнения Шрёдингера к алгебраической задаче на собственные значения, из которой методом последовательных приближений можно получить спектр исходного уравнения. Эта процедура оказывается весьма простой как для аналитических вычислений, так и для численного счета, что позволяет получить некоторые приближенные аналитические формулы для нижних уровней энергии, которые могут быть полезны при обсуждении качественного поведения спектра исследуемой модельной системы. Следует особо отметить, что получаемая теория возмущений оказывается сходящейся. Этот результат представляет самостоятельный интерес и указывает на правомерность развиваемого метода и возможность его использования при решении конкретных задач.

В качестве примера в настоящей работе мы рассмотрим сферически-симметричные «запирающие» потенциалы следующего вида:

$$U_k(r) = a^2 r^k - Z/r, \qquad a > 0, \qquad k = 1, 2, \tag{1}$$

имеющие важное значение в приложениях адронной физики.

Подробно построение быстро сходящейся процедуры теории возмущений с учетом алгебраической симметрии изложено в работе [9]. В данной статье метод переносится на случай потенциалов (1).

Рассмотрим радиальную часть уравнения Шрёдингера в следующем виде:

$$\left[-\frac{d^2}{dr^2} + U_{\text{eff}}(r)\right] R(r) = \lambda R(r). \tag{2}$$

Полагаем, что полная волновая функция решения содержит наряду с радиальной частью еще и стандартную угловую зависимость:

$$\psi_{nlm}(\mathbf{r}, t) = \frac{R_n(r)}{r} V_{lm}(\theta, \varphi). \tag{3}$$

В этом случае эффективный потенциал в (2) будет иметь хорошо известный вид:

$$U_{\text{eff}}(r) = \frac{l(l+1)}{r^2} + U_k(r). \tag{4}$$

Если потенциал $U_k(r)$ не содержит отрицательных степеней старше чем r^{-1} (как в случае (1)), поведение радиальной части волновой функции $R(r) \sim r^{l+1}$ в нуле будет определяться именно первым слагаемым в (4). Сделаем замену $R(r) \sim r^{l+1} \cdot F(r)$, где $F(0) \neq 0$. Полученное уравнение запишем в удобной для дальнейших преобразований форме:

$$F'' + \frac{2}{r}(l+1)F' + [\lambda - U(r)]F = 0. \tag{5}$$

1. Спектральная задача для корнельского потенциала

Для потенциала (1), линейно зависящего от переменной r, постоянная $a^2 > 0$ может быть исключена путем одновременной замены переменной в уравнении (5): $r \to a^{-2/3} r$ и введения «безразмерных» комбинаций параметров: $\lambda^* = \lambda a^{-4/3}$, $z^* = z a^{-2/3}$. Решения уравнения (5) будем искать в виде ряда

$$F(r) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{f_k} r^k, \qquad f_k = \left(\frac{2}{3}\right)^{2k/3} \frac{\Gamma\left(\frac{2k+4l+5}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{4l+5}{3}\right)}. \tag{6}$$

Коэффициенты f_k выбираются из соображений симметризации матрицы Якоби, в которую входят коэффициенты a_k, и условия правильного асимптотического поведения волновой функции на бесконечности: $R(r) \sim \exp\left[-(2/3)r^{3/2}\right]$, совпадающего в данном случае с асимптотикой известной функции Эйри. Кроме того, выбор коэффициентов в предложенном виде позволяет правильно подобрать ядро обобщенного интегрального преобразования Лапласа (преобразования Миттаг–Лефлера). Полученное подстановкой (6) в (5) рекуррентное соотношение будет иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} &(k+2)a_{k+2} - \left(k + 2l + \frac{2}{3}\right) a_{k-1} + \\ &+ \left(\frac{2}{3}\right)^{1/3} \frac{z^*}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)} B\left(\frac{2k+4l+6}{3}; \frac{1}{3}\right) a_{k+1} + \\ &+ \left(\frac{2}{3}\right)^{-1/3} \frac{\lambda^*}{\Gamma\left(-\frac{1}{3}\right)} B\left(\frac{2k+4l+6}{3}; -\frac{1}{3}\right) a_k = 0. \end{aligned} \tag{7}$$

После введения производящей функции $\Phi(w) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k w^{2k/3}$ оно преобразуется к интегро-дифференциальному уравнению:

$$\begin{aligned} &\left[\left(1 - w^2\right)\Phi' - \frac{4l+5}{3} w \Phi\right] + \\ &+ \frac{z^*}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)} \left(\frac{2}{3}\right)^{4/3} w^{-1/3} I + \frac{\lambda^*}{\Gamma\left(-\frac{1}{3}\right)} \left(\frac{2}{3}\right)^{2/3} w^{1/3} I^* = 0, \end{aligned} \tag{8}$$

где

$$I(w) = \int_0^1 dt \cdot t^{(4l+1)/3} (1-t)^{-2/3} \Phi(wt),$$
$$I^*(w) = \int_0^1 dt \cdot t^{(4l+3)/3} (1-t)^{-4/3} \Phi(wt).$$

Выделяя явным образом полюсную особенность функции в точке $w = 1$, $\Phi(w) = (1-w^2)^{-(4l-5)/6} H(w)$, где $H(w) \equiv x^{(4l+5)/6} (1-x)^{(-4l+2)/3} \overline{\Lambda}(x)$ и осуществляя конформное отображение комплексной плоскости w в единичный круг $x = \dfrac{1-w}{1+w}$, для новой неизвестной функции $\overline{\Lambda}(x)$ получим уравнение

$$x(1-x)\overline{\Lambda}' + \left[\frac{4l+5}{6} + \frac{4l-9}{6}x\right]\overline{\Lambda} = \frac{2^{2/3} z^*}{3^{4/3}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)} (1-x)^{-2/3} I(x) + \frac{\lambda^*}{2^{2/3} 3^{2/3} \Gamma\left(-\frac{1}{3}\right)} I^*(x). \tag{9}$$

Здесь значения интегралов I, I^* связаны с функцией $\overline{\Lambda}(x)$ преобразованиями

$$I(x) = \int_x^1 (1-u)\, u^{-2/3} \left(1 - \frac{x}{u}\right)^{-2/3} \overline{\Lambda}(u)\, du,$$
$$I^*(x) = \int_x^1 (1-u)^{5/3} u^{-4/3} \left(1 - \frac{x}{u}\right)^{-4/3} \overline{\Lambda}(u)\, du.$$

В соответствии с общей теорией [9, 12] необходимое асимптотическое поведение волновой функции реализуется лишь в том случае, если $x = 0$ является регулярной точкой функции $\overline{\Lambda}(x)$. Это позволяет искать такие решения в виде ряда по неотрицательным степеням:

$$\overline{\Lambda}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k x^k. \tag{10}$$

Вычисляя интегралы I, I^* с помощью прямого и обратного интегрального преобразования Меллина, легко получить в этом случае рекуррентное соотношение для коэффициентов A_k:

$$\left(n + \frac{2}{3}l + \frac{5}{6}\right) A_n - \left(n - \frac{2}{3}l + \frac{1}{2}\right) A_{n-1} = = \overline{z} \sum_{k=0}^{\infty} F_{nk} A_k + \overline{\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} G_{nk} A_k. \tag{11}$$

Здесь

$$F_{nk} = \frac{1}{n!} \sum_{m=0}^{n} C_n^m \left[\frac{\Gamma\left(n-m+\frac{2}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}\right] \left[\frac{\Gamma\left(m+\frac{2}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}\right] \times \left[\frac{\Gamma\left(k-m+\frac{1}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}\right] \left[\frac{\Gamma\left(\frac{7}{3}\right)}{\Gamma\left(k-m+\frac{7}{3}\right)}\right],$$

$$G_{nk} = \frac{1}{n!} \left[\frac{\Gamma\left(\frac{7}{3}\right)}{\Gamma\left(k-n+\frac{7}{3}\right)}\right] \left[\frac{\Gamma\left(n+\frac{4}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)}\right] \left[\frac{\Gamma\left(k-n-\frac{1}{3}\right)}{\Gamma\left(-\frac{1}{3}\right)}\right]$$

— полубесконечные матрицы, а $\overline{\lambda} = 5 \cdot 2^{-5/3} \cdot 3^{-2/3} \cdot a^{-4/3} \cdot \lambda \cdot \Gamma\left(\frac{2}{3}\right)/\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)$ и $\overline{z} = 2^{-4/3} 3^{2/3} a^{-2/3} z / \Gamma\left(\frac{1}{3}\right)$ — параметры. Дальнейшая процедура получения приближенных собственных значений энергии λ_n связана с конечным обрезанием матриц $\hat{F}$, $\hat{G}$ размерами $(N+1) \times (N+1)$, где $N = 0, 1, 2, \ldots$ Получаемое таким образом $N+1$ собственное значение λ_n, $n = 0, 1, \ldots, N$, определяет положение первых уровней спектральной задачи. Чем выше значение N, тем меньше погрешность. При этом точность первых уровней получается существенно выше.

Проиллюстрируем скорость сходимости данной процедуры на примере точно решаемой задачи. В частном случае $z = 0$, $l = 0$ из выражения (11) получаются собственные значения спектра для сферического потенциала линейного вида $U_{\text{eff}} = r$. Как хорошо известно, они совпадают с соответствующими нулями функции Эйри [12]. Для второй итерации ($N = 1$) приближенное значение для энергии основного состояния $\lambda_0(N=1) = 2{,}3377$ отличается от точного значения (первый нуль функции Эйри) $\lambda_0^{\text{exact}} = 2{,}3381$ на $0{,}017\%$. Отметим, однако, что для больших значений z необходимо брать более высокие приближения по N. В то же время описанная зависимость от параметров a и z качественно верно воспроизводится даже в случае $N = 0,1,2$. Так, например, для $N = 0$ основное радиальное состояние в потенциале данного типа будет следующим:

$$\lambda_{0,l}^{(N=0)} = 1{,}742 a^{4/3} \left(l + \frac{5}{4}\right) - 2{,}415 a^{2/3} z. \tag{12}$$

При $N = 1$ получим две серии уровней, соответствующие основному и первому возбужденному радиальным состояниям:

$$\bar{\lambda}_{0,l}^{(N=1)} = q - \sqrt{\frac{D}{4}}, \qquad \bar{\lambda}_{1,l}^{(N=1)} = q + \sqrt{\frac{D}{4}}, \tag{13}$$

где

$$q = \frac{13}{18}l - \frac{157}{168}\overline{z} + \frac{172}{144},$$
$$\frac{D}{4} = q^2 - \left(\frac{31}{36}l + \frac{113}{144} - \frac{13}{12}\overline{z}\right)\left(\frac{7}{12}l + \frac{77}{48} - \frac{35}{42}\overline{z}\right) + + \left(\frac{1}{12}l + \frac{11}{48} - \frac{11}{42}\overline{z}\right)\left(\frac{49}{36}l + \frac{49}{144} - \frac{7}{12}\overline{z}\right).$$

Для $N = 2$ решениями кубического уравнения являются значения, соответствующие трем радиальным квантовым числам: 0, 1 и 2.

Следует отметить, что удовлетворительная точность данных аналитических выражений может быть получена в ограниченной области параметров $z < z_{\max}(N)$, $a < a_{\max}(N)$, при этом граничные значения тем больше, чем больше индекс обрезания бесконечной матрицы N. Оценки граничных значений с заданной погрешностью могут быть проведены лишь численно. Сходимость данного метода определяется компактностью исходного дифференциального оператора, а ее скорость достаточно высока для проведения численных расчетов, не требующих существенных затрат ресурсов ЭВМ.

2. Спектральная задача для потенциала $U_2(r)$

Так же как и в предыдущем случае, для потенциала $U_2(r)$ заменой $r \to r/\sqrt{a}$, $z^* = Z/\sqrt{a}$, $\lambda^* = \lambda/a$ коэффициент при старшей степени r может быть исключен.

Проводя аналогичные рассуждения, легко получить уравнение, эквивалентное (9), в виде

$$x(1-x)\overline{\Lambda}' + \left[\left(\frac{l}{2}+\frac{3}{4}-\frac{\lambda}{4}\right) + \left(\frac{l}{2}-\frac{3}{4}-\frac{\lambda}{4}\right)x\right]\overline{\Lambda} = \\ = \frac{1}{2}\overline{z}\, I(x), \tag{14}$$

$$I(x) = \int_x^1 u^{-1/2}\left(1-\frac{x}{u}\right)^{-1/3}\overline{\Lambda}(u)\,du, \qquad \overline{z} = \frac{Z^*}{\sqrt{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)},$$

а рекуррентное соотношение для коэффициентов разложения функции $\overline{\Lambda}(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} A_k x^k$ будет следующим:

$$\left(n+\frac{l}{2}+\frac{3}{4}-\frac{\lambda}{4}\right)A_n - \left(n-\frac{l}{2}-\frac{1}{4}-\frac{\lambda}{4}\right)A_{n-1} = \\ = \overline{z}\sum_{k=0}^{\infty} F_{nk}A_k, \tag{15}$$

$$F_{nk} = \frac{1}{2n!}\left[\frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\right]\left[\frac{1}{k-n+\frac{1}{2}}\right].$$

В частности, при $\overline{z} = 0$ формула (15) точно воспроизводит спектр обычного сферически-симметричного гармонического осциллятора $\lambda_n = (4n+2l+3)a = 2a(N_m + 3/2)$, где N_m — главное квантовое число. Нулевое приближение для произвольных z соответственно дает

$$\lambda_{0,l}^{(N=0)} = a(2l+3) - \sqrt{\frac{8a}{\pi}}z. \tag{16}$$

Полученные результаты могут быть использованы для сравнения с экспериментальными данными для спектров чармония, боттомония, а также для определения бегущей константы связи из этих сравнений. Предварительные оценки показывают, что в отличие от других моделей, в которых для установления соответствия спектров и параметров уравнения Шрёдингера необходимо несколько переменных, в настоящих расчетах достаточно одного параметра — бегущей константы связи. С учетом сказанного мы надеемся, что предложенную схему можно использовать для реальных систем.

В заключение авторы выражают благодарность А. И. Аптекареву, А. В. Борисову, В. Ч. Жуковскому, Н. Н. Нехорошеву, Е. Т. Шавгулидзе и Р. Н. Фаустову за полезные обсуждения и замечания.

Литература

1. *Бадалян А.М., Китороагэ Д.И., Парийский Д.С.* // Ядерная физика. 1988. **47**, № 3. С. 807.
2. *Capstick S., Isgur N.* // Phys. Rev. 1986. **D34**. P. 2809.
3. *Бадалян А.М., Китороагэ Д.И., Парийский Д.С.* // Ядерная физика. 1987. **46**, № 1. С. 226.
4. *Erichten E.* // Phys. Rev. 1980. **D21**, P. 201.
5. *Мур В.Д., Попов В.С.* // ЖЭТФ. 1993. **104**, № 1. С. 2313.
6. *Mur V.D., Popov V.S., Simonov Yu.A., Yurov V.P.* // ЖЭТФ. 1994. **105**, № 1. С. 3.
7. *Захарьев Б.Н.* Уроки квантовой интуиции. Дубна, 1996.
8. *Захаров В.Е., Манаков С.В., Новиков С.П., Питаевский Л.П.* // Теория солитонов: метод обратной задачи. М., 1980.
9. *Вшивцев А.С., Норин Н.В., Сорокин В.Н.* // ТМФ. 1996. **109**, № 1. С. 107; Изв. вузов, Физика. 1996. № 5. С. 55.
10. *Вшивцев А.С., Сорокин В.Н.* // Изв. вузов, Физика. 1994. № 1. С. 95.
11. *Вшивцев А.С., Королев А.Ф., Круглов К.Г., Татаринцев А.В.* // Изв. вузов, Физика. 1997. № 10, С. 31.
12. *Данфорд Н., Шварц Дж.Т.* Линейные операторы. Спектральная теория. М., 1966.

Поступила в редакцию
30.04.97