Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
Физический факультет

На правах рукописи

Соболевский Андрей Николаевич

Динамика и сингулярности в моделях инерционного переноса масс

01.01.03 – Математическая физика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Москва – 2013

Работа выполнена в *Институте проблем передачи информации им. А. А. Харкевича Российской академии наук*

Официальные оппоненты:

Д.ф.-м.н., академик РАН, гл. науч. сотр. ИТФ им. Л.Д. Ландау РАН

Синай Яков Григорьевич

Д.ф.-м.н., вед. науч. сотр. ИТПЗ РАН

Желиговский Владислав Александрович

Д.ф.-м.н., профессор, декан факультета управления и прикладной математики МФТИ *Шананин Александр Алексеевич*

Ведущая организация: *Математический институт им. В.А. Стеклова РАН*

Защита состоится «____» ____________ 2014 г. в ____ часов на заседании диссертационного совета *Д 501.002.10* при *Московском государственном университете им. М. В. Ломоносова*, расположенном по адресу: *Москва, 119991, Ленинские горы, д. 1, стр. 2, физический факультет МГУ.*

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке физического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова.

Автореферат разослан «____» ____________ 2014 г.

Отзывы и замечания по автореферату в двух экземплярах, заверенные печатью, просьба высылать по вышеуказанному адресу на имя ученого секретаря диссертационного совета.

Ученый секретарь

диссертационного совета

д.ф.-м.н., профессор *Подпись* *Поляков П. А.*

Общая характеристика работы

Актуальность работы. Уравнения движения бесструктурной сплошной среды — такой, как жидкость, газ или пылевидное вещество в космологии — лежат в основе целого спектра моделей математической физики. «Крайними точками» этого спектра являются идеальная жидкость, описываемая уравнением Эйлера $\partial_t v + (v \cdot \nabla)v + \nabla p = 0$ при условии несжимаемости $\nabla \cdot v = 0$, и абсолютно сжимаемое (давление $p = 0$) пылевидное вещество, частицы которого движутся по инерции, не испытывая влияния со стороны соседних частиц. Согласно известной теореме Я. Бренье (Y. Brenier) [1], произвольное смещение элементов сплошной среды в евклидовом пространстве может быть разложено в композицию двух факторов: отображения, обладающего несжимаемостью (т. е. сохраняющего объемы), и инерционного переноса элементов массы вдоль векторов некоторого потенциального поля смещений.

Оба предельных типа динамики, «несжимаемый» и инерционный, обладают богатой геометрической структурой, которую важно изучить с точки зрения их приложений в моделях математической физики. Хорошо известно [2], что уравнение Эйлера может быть переформулировано как движение по инерции на бесконечномерном искривленном конфигурационном многообразии — группе сохраняющих объем диффеоморфизмов SDiff. В свою очередь, модель нелинейного переноса в одномерном случае допускает аналогичную формулировку над полугруппой монотонных отображений как выпуклым подмножеством подходящего функционального пространства (гл. 4 настоящей диссертации), а в многомерном случае при условии потенциальности принимает вид уравнения Бернулли или нестационарного уравнения

1 Brenier Y. Polar factorization and monotone rearrangement of vector-valued functions // Communications in Pure and Applied Mathematics. 1991. Vol. 44, no. 4. Pp. 375–417.

2 Арнольд В. И., Хесин Б. А. Топологические методы в гидродинамике. М.: МЦНМО, 2007. 392 с.

Гамильтона–Якоби

$$\partial_t \varphi + H(t, x, \nabla\varphi(t, x)) = 0 \qquad (x \in \mathbf{R}^d), \tag{1}$$

где φ — потенциал поля импульсов.

Глобальные решения этого нелинейного уравнения в общем случае негладки и определены лишь в некотором обобщенном смысле: среди известных подходов к такому определению, в частности, можно назвать вязкостные решения М. Г. Крандалла и П.-Л. Лионса (M. G. Crandall, P.-L. Lions) [3, 4], минимаксные решения Н. Н. Красовского и А. И. Субботина [5] и др. Если гамильтониан $H(t, x, p)$ является выпуклым по аргументу p, обобщенные решения, определенные каждым из этих способов, совпадают и являются полувогнутыми функциями, т. е. представимы в виде разностей вогнутых функций и подходящих квадратичных форм. Все это обусловливает ту значительную роль, которую в данном круге вопросов играют выпуклый анализ и выпуклая геометрия.

Модель нелинейного инерционного переноса массы возникает, в частности, в задачах распространения волн в средах без дисперсии, а также при исследовании возникновения крупномасштабной структуры Вселенной в приближении Зельдовича («модель слипания» в теории гравитационной неустойчивости в космологии) [6, 7]. Особый интерес представляют вопросы о возмож-

---

3 Crandall M. G., Lions P.-L. Viscosity solutions of Hamilton–Jacobi equations // Trans. Amer. Math. Soc. 1983. Vol. 277, no. 1. Pp. 1–42.

4 Crandall M. G., Ishii H., Lions P.-L. User's guide to viscosity solutions of second order partial differential equations // Bull. Amer. Math. Soc. 1992. — July. Vol. 27, no. 1. Pp. 1–67.

5 Субботин А. И. Обобщенные решения уравнений в частных производных первого порядка. Перспективы динамической оптимизации. Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003.

6 Гурбатов С. Н., Малахов А. Н., Саичев А. И. Нелинейные случайные волны в средах без дисперсии. Современные проблемы физики. М.: Наука, 1990. 216 с.

7 Гурбатов С. Н., Саичев А. И., Шандарин С. Ф. Крупномасштабная структура Вселенной. Приближение Зельдовича и модель слипания // Успехи физических наук. 2012. Т. 182, № 3. С. 233–261.

ности явного построения решений соответствующих уравнений и о структуре сингулярностей, возникающих в таких решениях, а также о динамике течения внутри сингулярностей. Рассмотрению этих вопросов посвящены главы 1–4 настоящей диссертации.

В последние годы были опубликованы обширные каталоги пространственных координат (красных смещений) галактик [8, 9]. Вместе с данными многолетних наблюдений тонкой анизотропии реликтового излучения в экспериментах WMAP и Planck [10, 11] возник массив данных, обеспечивающих гораздо более точное определение космологических параметров и более полное описание крупномасштабной структуры распределения масс, чем это было возможно раньше. Тем самым возросла актуальность моделей, позволяющих интерпретировать полученные данные и извлекать из них физически значимую информацию. В частности, в рамках представленного в диссертации круга идей был развит метод реконструкции динамической истории формирования крупномасштабной структуры распределения масс и пекулярных скоростей галактик, представленный в главе 5.

Цели и методы диссертационного исследования. Целью цикла исследований, отраженных в диссертационной работе, является математическое исследование сингулярных решений уравнения Гамильтона–Якоби и некоторых его аналогов, рассматриваемых как математические модели физических явлений (формирование крупномасштабной структуры распределения масс

---

8 2dFGRS Team. The 2dF Galaxy Redshift Survey. URL: http://magnum.anu.edu.au/~TDFgg/ (дата обращения: 19 января 2013 г.)

9 SDSS Collaboration. Sloan Digital Sky Survey. URL: http://www.sdss.org/ (дата обращения: 19 января 2013 г.)

10 Wilkinson Microwave Anisotropy Probe. Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP). 2012. URL: http://map.gsfc.nasa.gov/ (дата обращения: 23 января 2013 г.)

11 European Space Agency. The Planck Mission. 2013. URL: http://www.esa.int/Our_Activities/Space_Science/Planck (дата обращения: 23 января 2013 г.)

в космологии).

Исследование направлено на построение физически естественной динамики частиц среды, описываемой уравнением Гамильтона–Якоби и его аналогами, внутри формирующихся в такой среде сингулярностей, разработку метода частичного восстановления этой динамики по наблюдаемому распределению масс для приложений к обработке астрономических данных, а также исследованию структуры стационарных обобщенных решений уравнения Гамильтона–Якоби и препятствий к их формированию.

Этой целью определяется существенное единство диссертационной работы, которая сочетает аналитические вычисления, исследование математических проблем механики сплошной пылевидной среды математическими методами (методами теории обобщенных вязкостных решений нелинейных уравнений в частных производных, теории динамических систем, теории транспортной оптимизации) и результаты, допускающие сравнение с экспериментальными (наблюдательными) данными (численный метод массового восстановления смещений и пекулярных скоростей элементов скрытого вещества по крупномасштабным каталогам галактик).

Научная новизна и значение результатов. Диссертация охватывает результаты, полученные диссертантом на протяжении примерно 15 лет. Все выносимые на защиту результаты являются новыми. Кратко охарактеризуем их с сегодняшних позиций, останавливаясь также на работах коллег, послуживших источниками и мотивировкой представленных в диссертации исследований.

Результаты, изложенные в гл. 1 и опубликованные в [8, 13], представляют интерес с точки зрения построения обобщенных решений уравнения Гамильтона–Якоби, определенных на бесконечных интервалах времени. Гл. 2 посвящена исследованию структуры таких решений, удовлетворяющих дополнительному условию периодичности градиента решения, и аналогичной конструкции в теории одномерной транспортной оптимизации.

Гл. 2 состоит из двух частей, охватывающих разделы 2.1–2.6 и 2.7–2.11 соответственно. Результаты, изложенные в первой части этой главы и опубликованные в [3, 4], были независимо получены диссертантом и Вейнаном И [12]. Внимание каждого из нас обратил на этот круг задач Я. Г. Синай, которого заинтересовала неоконченная работа Ю. Мозера [13], появившаяся в виде препринта в 1997 г. и ставшая в конце 1990-х гг. одним из источников «слабой теории КАМ». Представленная в диссертации конструкция, связанная с редукцией задачи к функциональному уравнению, оригинальна, но является менее общей и мощной, чем инструментарий, представленный в работах А. Фати [14], который в настоящее время стал стандартным. Поэтому с точки зрения современного состояния предмета основным результатом данного раздела является критерий единственности решения в терминах числа вращения, впервые полученный в работах автора [3] и Вейнана И [12]. Интерес представляет также связь с «идемпотентным анализом», с точки зрения которого полученные результаты относятся к спектральной теории идемпотентно-линейного оператора Беллмана [4].

Вторая часть гл. 2 посвящена недавно замеченному (2009-10 гг.) применению подхода, построенного в последовательной аналогии со «слабой теорией КАМ», к задаче транспортной оптимизации на окружности. Речь идет об использовании таких идей, как (i) поднятие задачи на универсальную накрывающую, позволяющую перенести все рассмотрения в линейное пространство,

---

12 E W. Aubry-Mather theory and periodic solutions of the forced Burgers equation // Communications on Pure and Applied Mathematics. 1999. Vol. 52, no. 7. Pp. 811–828.

13 Jauslin H. R., Kreiss H. O., Moser J. On the forced Burgers equation with periodic boundary conditions // Differential Equations: La Pietra 1996 / Ed. by M. Giaquinta, J. Shatah, S. R. S. Varadhan. Proceedings of Symposia in Pure Mathematics. Vol. 65. Providence, RI: American Mathematical Society, 1999. Pp. 133–155.

14 Fathi A. Weak KAM from a PDE point of view: viscosity solutions of the Hamilton–Jacobi equation and Aubry set // Proc. R. Soc. Edinburgh: Sect. A Math. 2012. Vol. 142. Pp. 1193–1236.

(ii) минимизация транспортной стоимости относительно финитных возмущений и (iii) переход к подходящей двойственной переменной, для которой может быть определен аналог «усредненного гамильтониана» или функции Мезера [15]. Сама по себе аналогия между слабой теорией КАМ и транспортной задачей Монжа–Канторовича была замечена Мезером в одной из его первых работ в указанной области [16]. Тем не менее, по-видимому, статья [11] — единственная публикация, где благодаря этой аналогии удается ввести нетривиальный «транспортный» аналог функции Мезера, который может быть эффективно вычислен, а на использовании этого обстоятельства оказывается возможным построить быстрый численный алгоритм.

Гл. 3 посвящена исследованию локальной структуры решений нестационарного уравнения Гамильтона–Якоби. Как правило, в существующей литературе оно рассматривается как уравнение для функции значения некоторой задачи оптимального управления или дифференциальной игры. Эта точка зрения позволила развить глубокую и плодотворную теорию, результаты которой использованы в настоящей диссертации. С другой стороны, в нашей работе нестационарное уравнение Гамильтона–Якоби рассматривается как модель *нелинейного инерционного переноса масс*, что приводит к новым постановкам задач: так, задача о динамике внутри сингулярных многообразий вряд ли могла бы быть даже поставлена в рамках первого подхода.

Для уравнения Бюргерса или нестационарного уравнения Гамильтона–Якоби с квадратичным гамильтонианом такая постановка впервые рассматривалась И. А. Богаевским [17, 18], работы которого мотивировали исследо-

15 Mather J. N., Forni G. Action minimizing orbits in Hamiltonian systems // Transition to Chaos in Classical and Quantum Mechanics. Springer-Verlag, 1994. Lecture Notes in Mathematics. Vol. 1589. Pp. 92–186.

16 Mather J. Minimal measures // Commentarii Mathematici Helvetici. 1989. — December. Vol. 64, no. 1. Pp. 375–394.

17 Bogaevsky I. A. Matter evolution in Burgulence. 2004. — Jul. math-ph/0407073v1.

18 Богаевский И. А. Разрывные градиентные дифференциальные уравнения и траектории в вариаци-

вание, представленное в диссертации. Поскольку метод этих работ, основанный на применении некоторого дифференциального неравенства (см. также известную книгу Х. Брезиса [19]), неприменим в случае уравнения Гамильтона–Якоби с общим строго выпуклым гамильтонианом, построенная в данной главе теория динамики в сингулярных многообразиях потребовала развития совершенно нового подхода, который удалось найти диссертанту совместно с К. М. Ханиным. Этот подход основан на учете скорости изменения решения вдоль различных кривых, который в совокупности с принципом наименьшего действия позволяет находить производные обобщенных траекторий в первом и более высоких порядках теории возмущений.

Полученные в гл. 3 результаты соотносятся также с работами П. Каннарсы (P. Cannarsa) и его соавторов о распространении особенностей [20]. Подход, принятый в этих работах, является геометрическим: в них решается вопрос о возможности вложить в сингулярное многообразие липшицеву кривую. По сравнению с этими работами в диссертации принято новое и значительно более ограничительное определение обобщенной характеристики, связанное с ее интерпретацией как траектории частицы сплошной среды, движение которой описывается уравнением Гамильтона–Якоби. Это определение позволяет не только установить существование обобщенных характеристик, но и избежать проблемы неединственности, которая обсуждается в [21].

Результаты главы 4 мотивированы статьей Вейнана И, Ю. Г. Рыкова и

онном исчислении // Математический сборник. 2006. Т. 197, № 12. С. 11–42.

19 Brezis H. Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert. North-Holland, 1973. North-Holland Mathematical Studies. Vol. 5. P. 183.

20 Cannarsa P., Sinestrari C. Semiconcave functions, Hamilton–Jacobi equations, and optimal control. Birkhauser, 2004. Progress in nonlinear differential equations and their applications. Vol. 58. P. 312.

21 Cannarsa P., Yu Y. Singular dynamics for semiconcave functions // Journal of the European Mathematical Society. 2009. Vol. 11. Pp. 999–1024.

Я. Г. Синая [22], а также заметкой А. И. Шнирельмана 1986 г. [23], о которой диссертанту любезно сообщил ее автор в 2001 г. Тогда же диссертант узнал от него о статье Я. Бренье, содержащей упомянутую выше теорему о полярном разложении [1]. Эта и другие работы Я. Бренье в дальнейшем оказали большое влияние на выбор тем исследования диссертанта и полученные им результаты — в том числе те, которые нашли отражение в гл. 4 и 5 диссертации, часть из которых получена в соавторстве с Я. Бренье.

В частности, гл. 4 посвящена исследованию геометрической формулировки динамики инерционного движения масс с прилипанием, в котором сохраняются как масса, так и импульс. Гл. 5 посвящена приложению затрагиваемого в диссертации круга идей к реконструкции динамической истории возникновения наблюдаемой крупномасштабной структуры распределения масс во Вселенной. Проблема реконструкции впервые была поставлена для Локальной группы галактик Дж. Пиблзом (J. Peebles). В его работе [24] предложен метод, основанный на приближенной численной минимизации механического действия для дискретной группы галактик. В дальнейшем метод применялся к исследованию крупномасштабной структуры в более крупных масштабах, вплоть до самых больших существующих каталогов галактик [25]. Однако на таких масштабах более естественным является применение методов непре-

22 E W., Rykov Y., Sinai Y. Generalized variational principles, global weak solutions and behavior with random initial data for systems of conservation laws arising in adhesion particle dynamics // Communications in Mathematical Physics. 1996. Vol. 177, no. 2. Pp. 349–380.

23 Shnirel'man A. I. On the principle of the shortest way in the dynamics of systems with constraints // Global analysis—studies and applications, II. Berlin: Springer, 1986. Lecture Notes in Math. Vol. 1214. Pp. 117–130.

1 См. с. 1.

24 Peebles P. J. E. Tracing galaxy orbits back in time // Astrophysical Journal. 1989. — September. Vol. 344. Pp. L53–L56.

25 Nusser A., Branchini E. On the least action principle in cosmology // Mon. Not. R. Astron. Soc. 2000. Vol. 313, no. 3. Pp. 587–595.

рывного, а не дискретного описания распределения масс.

Такой метод был предложен в [5, 6] под названием «метод МАК». Кроме относительно высокой вычислительной эффективности, он отличается от метода численной минимизации действия тем, что реконструкция сводится к корректно поставленной задаче выпуклого программирования, обладающей единственным решением. Физической основой предложенного метода является т. н. космологическая теория возмущений (см., напр., обзор Ф. Буше и др. [26]), в первых двух порядках которой поле смещений элементов массы потенциально.

Метод, предложенный в работах [5, 6] и гл. 5 диссертации, нашел применения в работах космологов S. Colombi, H. Mathis, A. Szalay, J. Silk, R. Brent Tully, B. Wandelt и их сотрудников (см. обзорный раздел диссертации). Можно также отметить неожиданное применение этого метода (взятого как частный метод транспортной оптимизации) в статистической термодинамике для оценки минимально возможного производства энтропии в неравновесном процессе [27]. Кроме того, данный метод вызвал значительный интерес со стороны математиков, специализирующихся в теории транспортной оптимизации (см., например, библиографию известной книги С. Виллани [28]).

Практическая значимость. Диссертация носит теоретический характер. Результаты, изложенные в ее первых четырех главах, могут быть использованы при дальнейших исследованиях обобщенных вязкостных решений уравнений Гамильтона–Якоби, в том числе структуры сингулярных множеств и динамики обобщенных характеристик этих решений; при построе-

26 Bouchet F. R., Colombi S., Hivon E., Juszkiewicz R. Perturbative Lagrangian approach to gravitational instability // Astronomy & Astrophysics. 1995. Vol. 296. Pp. 575–608. arXiv:astro-ph/9406013.

27 Aurell E., Mejía-Monasterio C., Muratore-Ginanneschi P. Optimal Protocols and Optimal Transport in Stochastic Thermodynamics // Phys. Rev. Lett. 2011. — Jun. Vol. 106. P. 250601.

28 Villani C. Optimal transport: Old and new. Springer-Verlag, 2009. — Dec. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Vol. 338. P. 973.

нии математических моделей нелинейной гравитационной неустойчивости и образования крупномасштабной структуры в различных вариантах «модели слипания», в частности при построении решений системы уравнений газовой динамики без давления в многомерном случае. Метод реконструкции динамики формирования крупномасштабной структуры Вселенной и пекулярных скоростей галактик (гл. 5) нашел применения для интерпретации больших массивов астрономических данных о крупномасштабной структуре распределении масс.

На защиту выносятся следующие основные результаты:

1. Продемонстрирована возможность разрушения глобальных по времени слабых решений уравнения Гамильтона–Якоби в ограниченном, но быстро меняющемся силовом поле в неограниченном пространстве. Показано, что данное явление связано с неограниченностью скорости односторонних минимизирующих траекторий.

2. Установлено существование и дан критерий единственности обобщенных решений одномерного уравнения Гамильтона–Якоби с периодическим градиентом в случае периодической внешней силы (частный вариант «слабой теории КАМ»). Предложен подход к задаче Монжа–Канторовича на окружности, основанный на конструкциях слабой теории КАМ, и основанный на нем эффективный численный алгоритм транспортной оптимизации.

3. Методом исчезающей вязкости обосновано лагранжево представление динамики частиц для многомерного уравнения Гамильтона–Якоби и системы уравнений одномерного пылевидного вещества с абсолютно неупругими столкновениями. Показано, что предельные траектории частиц в обобщенных решениях уравнения Гамильтона–Якоби односторонне дифференцируемы, а их скорости удовлетворяют условию допустимости и минимизируют некоторый выпуклый функционал. Предложено пертурбативное разложение для высших односторонних производных предельных траекторий по времени,

позволяющиее при некоторых дополнительных предположениях установить единственность таких траекторий.

4. Показано, что динамика пылевидного вещества с абсолютно неупругими столкновениями в лагранжевом представлении в одномерной ситуации может быть описана как диссипативное движение по инерции в выпуклом множестве допустимых конфигураций сплошной среды, вложенном как выпуклое подмножество в подходящее гильбертово пространство. Установлена эквивалентность этого представления с конструкцией «обобщенного вариационного принципа», предлагавшейся ранее в работах других авторов.

5. Предложен вариационный метод численной реконструкции поля смещений элементов массы, возникающего в процессе развития нелинейной гравитационной неустойчивости в космологии, исходя из данных наблюдений современного распределения масс на расстояниях порядка сотен мегапарсек. Метод основан на решении транспортной задачи Монжа–Канторовича (минимизации среднего квадрата смещения). Результаты, получаемые этим методом для пекулярных скоростей, точно согласуются с космологической теорией возмущений в первом порядке (приближение Зельдовича), а для смещений — в первом и втором порядках. При тестировании на данных прямого численного моделирования космологической эволюции продемонстрирована относительно высокая, по сравнению с существующими аналогами, точность восстановления поля смещений.

Апробация работы и степень достоверности результатов. Работа частично поддержана грантами РФФИ, в том числе совместными грантами РФФИ и Национального центра научных исследований Франции, а также Национального агентства по научным исследованиям Франции (ANR-07-BLAN-0235 OTARIE). Основные результаты диссертации докладывались на следующих конференциях:

- международной конференции *Kolmogorov and Contemporary Mathema-*

tics, посвященной 100-летию со дня рождения А. Н. Колмогорова (Москва, 16–21 июня 2003 г.);

- симпозиуме *Optimal Mass Transport and Dynamical Systems* (Ванкувер, Канада, 10–17 августа 2003);
- международной конференции *Математика и экономика: старые проблемы и новые подходы* памяти Л. В. Канторовича (Санкт-Петербург, 7–13 января 2004 г.);
- конференции *Recent Advances in Calculus of Variations and PDEs* (Пиза, Италия, 3–5 марта 2005 г.);
- симпозиуме *Nonlinear Cosmology Workshop* (Ницца, Франция, 25–27 января 2006 г.);
- летней школе и конференции *Optimal transportation: theory and applications* (Гренобль, Франция, 15 июня–3 июля 2009 г.);
- международной конференции *Monge-Kantorovich optimal transportation problem, transport metrics and their applications*, посвященной 100-летию со дня рождения Л. В. Канторовича (Санкт-Петербург, 4–7 июня 2012 г.);
- конференции *Optimal Transport (to) Orsay* (Орсэ, Франция, 18–22 июня 2012 г.).

Кроме этого, материалы диссертации были представлены в докладах на ряде семинаров: коллоквиуме Института Филдса по прикладной математике (Торонто, 5 ноября 2008 г.), семинаре «Асимптотические методы в сингулярно возмущенных задачах» (физический факультет МГУ, 2010 г.), семинаре по вариационному исчислению лаборатории CEREMADE (Университет Париж–Дофин, 27 сентября 2010 г.), семинаре им. В. И. Смирнова по математической физике (ПОМИ РАН, 16 мая 2011 г.), семинаре Лаборатории структурных методов анализа данных в предсказательном моделировании (МФТИ и ИППИ РАН, 22 марта 2012 г.), коллоквиуме Исследовательской лаборатории им. П. Л. Чебышёва (математико-механический факультет СПбГУ, 16 февраля 2012 г.), семинаре «Квазилинейные уравнения и обратные задачи» под руководством Г. М. Хенкина (ЦЭМИ РАН, 28 августа 2012 г.), а также на других семинарах в МГУ (на факультетах механико-математическом, физическом, ВМиК, в НИВЦ и ГАИШ), ИППИ РАН, МИТП РАН, в INRIA (Роканкур, Франция), EPFL (Лозанна, Швейцария), Georgia Institute of Technology и Emory University (Атланта, США), университете Лафборо (Великобритания) и др.

Достоверность полученных в диссертации результатов обеспечивается строгими математическими методами их получения. Адекватность метода реконструкции, описанного в гл. 5, дополнительно обоснована тестированием на данных численного моделирования космологической эволюции (п. 5.4.2).

Публикации. Результаты, полученные в диссертации, опубликованы в 15 печатных работах, из них 11 статей в рецензируемых журналах [1–11] и 4 статьи в сборниках трудов конференций [12–15].

Следует отметить, что статьи [14] и [15], включенные в библиографию как вышедшие в сборниках трудов конференций, опубликованы в тематических выпусках зарубежных рецензируемых журналов, индексируемых в базе данных Web of Science, и прошли полноценное журнальное рецензирование.

Полное доказательство результатов, анонсированных в [15], содержится в препринте arXiv:1211.7084 (Khanin K., Sobolevski A. “On dynamics of Lagrangian trajectories for Hamilton–Jacobi equations”) . Текст этого доказательства включен в гл. 3 диссертации.

Личный вклад автора. Содержание диссертации и основные положения, выносимые на защиту, отражают личный вклад автора в опубликованные работы. Подготовка к публикации части полученных результатов проводилась совместно с соавторами, причем вклад диссертанта был определяющим.

Так, в цикле работ [5–7, 10, 12, 14] диссертанту принадлежит подход к реконструкции потенциального поля смещений, основанный на решении задачи транспортной оптимизации и составляющий математическую базу метода МАК, численная реализация метода МАК, а также редукция построения приближенного решения в случае «импульсного» включения гравитационного поля к решению задачи квадратичного программирования [10].

В работах [8, 13] диссертанту принадлежит построение «ступенчатой» траектории, на которой достигается бесконечная скорость; построение ускоряющего потенциала на одной «ступени» проведено совместно с К. М. Ханиным.

В работе [9] диссертанту принадлежит «проекционная» формулировка вариационного принципа S, доказательство эквивалентности вариационных принципов S и ERS, формулировка этих вариационных принципов в случае цилиндрической и сферической симметрии, а также построение контрпримеров к применимости вариационных принципа S и ERS в многомерном случае.

В работе [11] диссертанту принадлежит подход, основанный на поднятии транспортной задачи на универсальную накрывающую и локальной минимизации относительно финитных возмущений, основная конструкция, позволяющая свести транспортную задачу к задаче минимизации специальной выпуклой функции (аналога функции Мезера), алгоритм численного решения этой задачи и оценка его сложности.

В работе [15] диссертанту принадлежат выражение для допустимой скорости как решения задачи выпуклого программирования, доказательство единственности допустимой скорости и допустимости предельных скоростей для предельных траекторий, получаемых методом исчезающей вязкости, а также идея вывода высших порядков теории возмущений для предельных траекторий.

Вся полнота вошедших в диссертацию результатов в их идейной связи представлена только в работах диссертанта. Все представленные в диссертации новые результаты, включая доказательства теорем, строго обосновывающих перечисленные идеи и конструкции, получены лично диссертантом.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, обзора литературы и содержания диссертации, пяти глав, заключения и библиографии. Общий объем диссертации 274 страницы, из них 250 страниц текста, включая 20 рисунков. Библиография включает 173 наименования на 20 страницах.

Содержание работы

Во **Введении** кратко разъясняется актуальность диссертационной работы, сформулирована цель и обоснована научная новизна исследований, указаны области практической значимости полученных результатов, представлены выносимые на защиту научные положения, а также охарактеризованы апробация, которую прошло диссертационное исследование, имеющиеся публикации и личный вклад диссертанта. Введение дополняет обзорный раздел, посвященный характеристике круга проблем, который рассматривается в диссертации, и имеющейся литературы.

Первые три главы диссертации посвящены исследованию возникновения сингулярностей и динамики внутри сингулярных множеств в обобщенных (вязкостных) решениях нестационарного уравнения Гамильтона–Якоби (1), которое рассматривается как простейшая модель нелинейного инерционного переноса масс.

Вначале напомним некоторые стандартные определения и конструкции. Будем предполагать, что гамильтониан $H(t, x, p)$ является гладкой и строго выпуклой функцией переменной импульса p, и введем функцию Лагранжа $L(t, x, v) = \max_p [p \cdot v - H(t, x, p)]$, которая при данных предположениях также является гладкой и строго выпуклой по v. Как известно, вязкостное обобщенное решение задачи Коши с начальным условием $\varphi(t=0,y)=\varphi_0(y)$ задается т. н. формулой Лакса–Олейник, которую для целей настоящей работы можно принять за конструктивное определение решения:

$$\varphi(t,x)=\inf\nolimits_{\gamma(t)=x}\big(\mathscr{A}_{0,t}[\gamma]+\varphi_0(\gamma(0))\big), \tag{2}$$

где $\mathscr{A}_{0,t}[\gamma]=\int_0^t L(t,\gamma(t),\dot\gamma(t))\,\mathrm{d}t$ есть механическое действие, связанное с траекторией γ, а точная нижняя грань берется по классу всех абсолютно непрерывных траекторий $\gamma\colon [t_1,t_2]\to\mathbf{R}^d$, удовлетворяющих $\gamma(t_2)=x$. Определим

$$L_{t_1,t_2}(y,x)=\inf\nolimits_{\gamma(t_1)=y,\ \gamma(t_2)=x}\mathscr{A}_{t_1,t_2}[\gamma]. \tag{3}$$

При сделанных выше предположениях о лагранжиане эта точная нижняя грань достигается на траектории $\gamma^{y,x}_{t_1,t_2}\colon [t_1,t_2]\to\mathbf{R}^d$. Будем называть такие траектории лагранжевыми минимизирующими траекториями.

В **главах 1** и **2** рассматривается теория глобальных по времени обобщенных решений уравнения Гамильтона–Якоби. Основную роль в построении таких решений играют минимизирующие траектории γ^x_t, определенные на полубесконечном временно́м интервале $(-\infty,t)$: указанное глобальное решение задается соотношениями $u(t,x)=\dot\gamma^x_t(t)$ при всех (t,x). Чтобы доказать существование полубесконечных минимизирующих траекторий, необходимо переходить к пределу $T\to\infty$ для минимизирующих траекторий вида $\gamma^x_{t-T,t}$, определенных на конечных интервалах времени $[t-T,t]$. Для существования такого предела необходима равномерная оценка на терминальную скорость $\dot\gamma^x_{t-T,t}(t)$, получение которой становится таким образом центральной задачей всей теории.

Заметим прежде всего, что скорость минимизирующей траектории будет равномерно ограничена, если конфигурационным пространством лагранжевой системы является компактное многообразие M. Действительно, в таком случае смещение минимизирующей траектории в течение любого интервала времени ограничено диаметром многообразия, и минимизирующие траектории, определенные на достаточно длинных интервалах времени, не могут иметь больших скоростей.

В случае непериодического потенциала можно представить себе ситуацию, в которой минимизирующая траектория проводит подавляющую долю времени в некоторой «благоприятной» области $\mathbf{R}^d$, которая может лежать далеко от предписанной терминальной точки x, и затем очень быстро перемещается в x. При таком сценарии в точке x будет наблюдаться большая терминальная скорость, величина которой может зависеть от длины интервала времени, на котором наблюдается минимизирующая траектория. Однако имеется по меньшей мере два случая, когда такой сценарий невозможен. Во-первых, если потенциал ограничен и автономен: $U(t, x) = U(x)$, то сохраняется полная энергия и скорость произвольной лагранжевой траектории (т. е. траектории, удовлетворяющей уравнениям Эйлера–Лагранжа) будет равномерно ограничена, если в начальный момент времени частица находилась в покое. Поскольку все минимизирующие траектории лагранжевы, равномерная оценка на их скорости немедленно следует из этого результата.

Во-вторых, потенциал $U(\cdot, x)$ может периодически зависеть от первого (временнóго) аргумента. В этом случае ситуация требует более тонкого анализа. Полагаться на ограниченность скоростей лагранжевых траекторий уже нельзя: более того, периодический потенциал может разгонять лагранжевы траектории для произвольно большой скорости даже на компактном многообразии [29]. Однако А. Фати удалось показать, что скорости *минимизирующих* лагранжевых траекторий все же ограничены: его элегантное неопубликован-

29 Мазер Д. Н. Диффузия Арнольда, I: анонс результатов // Труды международной конференции по дифференциальным и функционально-дифференциальным уравнениям — сателлита Международного конгресса математиков ICM-2002 (Москва, МАИ, 11–17 августа, 2002). Часть 2. Совр. матем.: фунд. напр. Т. 2. М.: МАИ, 2003. С. 116–130.

ное доказательство приводится в приложении В к работе [13].

Примеры, построенные в **главе 1** настоящей работы, показывают, что, если отказаться от требования периодичности по времени, то выбором подходящего потенциала скорость минимизирующей траектории можно сделать сколь угодно большой. Можно даже построить «ступенчатый» потенциал, определенный при всех $t < 0$, который будет разгонять минимизирующие траектории до бесконечной скорости к моменту $t = 0$. Поэтому для таких потенциалов глобальные по времени решения не существуют даже в обобщенном смысле.

Перейдем к точной формулировке результатов. Рассматривается гамильтониан вида $H(t,x,p) = |p|^\alpha/\alpha + U(t,x)$, где $\alpha > 1$, которому соответствует лагранжиан $L(t,x,v) = |v|^\beta/\beta - U(t,x)$, где $\alpha^{-1}+\beta^{-1} = 1$, так что гамильтониан и лагранжиан связаны друг с другом преобразованием Лежандра. Функция U удовлетворяет условиям $0 \le U(t,x) \le C$, $|\nabla U(t,x)| \le C$ для всех $t \in \mathbf{R}$, $x \in \mathbf{R}^d$ (будем называть такие потенциалы *допустимыми*). Пусть траектория $\gamma^x_{t_1,t_2}\colon [t_1,t_2] \to \mathbf{R}^d$ является минимизирующей и удовлетворяет условиям $\dot\gamma^x_{t_1,t_2}(t_1) = 0$, $\gamma^x_{t_1,t_2}(t_2) = x$. Имеют место следующие результаты (нумерация теорем здесь и ниже соответствует тексту диссертации; в некоторые формулировки теорем в автореферате внесены несущественные изменения в целях сокращения текста).

Теорема 1.1. *Существует такая константа $K_1(C,\beta) > 0$, что для любого отрезка времени $[t_1,t_2]$ достаточно большой длины $T = t_2 - t_1$ и любого $x \in \mathbf{R}^d$ выполнена оценка $|\dot\gamma^x_{t_1,t_2}(t_2)| \le K_1(\log T)^{2/\beta}$.*

Теорема 1.2. *Существует такая константа $K_1(C,\beta) > 0$, что для любого отрезка времени $[t_1,t_2]$ достаточно большой длины и любого $y \in \mathbf{R}^d$ существует допустимый потенциал U, определенный на $[t_1,t_2] \times \mathbf{R}^d$, для которого $|\dot\gamma^x_{t_1,t_2}(t_2)| \ge K_2(\log T)^{2/\beta}/2^{\beta/(\beta-1)}$ для любого x, отстоящего от y*

не далее чем на $R_T = \frac{K^2}{2}(\log T)^{2/\beta}$.

Теорема 1.3. *Существует «ступенчатый» допустимый потенциал* U, *определенный при всех* $t < 0$, *для которого* $\limsup_{t\to\infty} |\dot\gamma^x_{-t,0}(0)| = \infty$ *при всех* $x \in \mathbf{R}^d$. *Такой потенциал можно выбрать непрерывным по* t.

Доказательства этих теорем проведены в диссертации в виде серии лемм. Ограничимся наброском доказательства в случае $\beta = 2$ и в одномерном пространстве $\mathbf{R}^d = \mathbf{R}$, который содержит все основные идеи, но более обозрим, чем общий случай.

Для краткости будем записывать минимизирующую траекторию $\gamma^x_{t_1,t_2}$ как γ^x. При $t_1 < t < t_2$ введем обозначения $s = t_2 - t$ и

$$w(s) = |\gamma^x(t_2) - \gamma^x(t_2 - s)|/s.$$

Фиксируем отрезок $[t_1, t_2] = [-T, 0]$ и определенную на нем минимизирующую траекторию γ^x, где $\gamma^x(0) = x$. Предоложим, что $0 \le s_1 \le s_2 \le T$ и абсолютная величина средней скорости на отрезке $[-s_2, -s_1]$ возрастает от $w_2 = w(s_2)$ до $w_1 = w(s_1) > w_2$.

Требование минимизации механического действия позволяет получить априорную оценку на прирост средней скорости:

$$1 + \frac{(w_1 - w_2)^2}{2C} \le \frac{s_2}{s_1}. \qquad (4)$$

Действительно, по неравенству Иенсена получаем для допустимого потенциала оценку

$$\mathscr{A}_{-s_2,0}[\gamma^x] = \mathscr{A}_{-s_2,-s_1}[\gamma^x] + \mathscr{A}_{-s_1,0}[\gamma^x] \ge \frac{1}{2}[s_1 w_1^2 + \frac{1}{s_2 - s_1}(s_1 w_1 - s_2 w_2)^2] - C s_2.$$

С другой стороны, рассмотрим на $[-s_2, 0]$ траекторию γ, концевые точки которой совпадают с $\gamma^x(-s_2)$ и x, а скорость постоянна. Поскольку γ^x минимизирует действие, а потенциал U является допустимым, получаем

$$\mathscr{A}_{-s_2,0}[\gamma^x] \le \mathscr{A}_{-s_2,0}[\gamma] \le \frac{1}{2} s_2 w_2^2.$$

Комбинируя последние два неравенства, получим

$$s_1 w_1^2 + \frac{1}{s_2 - s_1}(s_1 w_1 - s_2 w_2)^2 - 2Cs_2 \le s_2 w_2^2,$$

откуда следует неравенство $s_1 s_2 (w_1 - w_2)^2/(s_2 - s_1) \le 2Cs_2$, равносильное (4).

Смысл неравенства (4) в том, что рост абсолютной величины средней скорости в *арифметической* прогрессии возможен лишь при не менее чем *геометрической* прогрессии соответствующих значений времени. Поэтому наибольший возможный прирост средней скорости на интервале времени длиной T должен быть пропорционален $\log T$. Желаемая оценка на терминальную скорость $\dot{\gamma}^x(0)$ получается отсюда при учете двух дополнительных наблюдений: во-первых, чем короче интервал времени, тем ближе друг к другу значения терминальной и средней скорости из-за характерной для допустимого потенциала ограниченности ускорения, а во-вторых, значение средней скорости в начальный момент времени $-T$ ограничено априорно: $w^2(T) \le 2C$. Действительно, для допустимого потенциала в силу неравенства Иенсена $\mathscr{A}_{-T,0}[\gamma^x] \ge Tw^2(T)/2 - CT$, но в то же время $\mathscr{A}_{-T,0}[\gamma^x]$ ограничено сверху действием траектории, неподвижно находящейся в точке x, которое в силу сделанных предположений неположительно.

Для построения ускоряющего потенциала в теореме 1.2 заметим, что траектория $-g_T(t_2 - t)$, заданная функцией $g_T(s) = K\int_0^s \log\frac{T}{u}\,\mathrm{d}u$, при всех $t_1 < t < t_2$ имеет с точностью до множителя K скорость, максимально возможную в соответствии с теоремой 1.1. Поэтому потенциал U, определенный для некоторого $y \in \mathbf{R}$ формулой $U(t,x) = U_C(x - y + g_T(t_2 - t))$, где функция $U_C \in C^1$ удовлетворяет условиям $0 \le U_C(\xi) \le C$ при всех ξ, $U_C(\xi) = C$ при $\xi \le -2$, $U_C(\xi) = 0$ при $\xi \ge 0$ и $-C \le U_C'(\xi) \le 0$ при $-2 \le \xi \le 0$, является допустимым и удерживает минимизирующие траектории настолько близко к $-g_T(t_2 - t)$, насколько возможно. Действительно, если минимизирующая траектория удовлетворяет условию $\gamma^x(t_2 - 1) < -g_T(1)$, нетрудно получить оценку на ее среднюю скорость $w(1)$, обеспечивающую желаемую оценку снизу терминальной скорости. Если же для минимизирующей траектории $\gamma^x(t_2 - 1) \geq -g_T(1)$, то построением подходящих «пробных» траекторий можно доказать, что при не слишком больших s траектория $\gamma^x(t_2 - s)$ должна выходить на ту же границу $-g_T(s)$, откуда вновь следует необходимая оценка на среднюю и терминальную скорость.

Наконец, покажем, как можно «склеить» последовательность ускоряющих потенциалов при $t < 0$, чтобы добиться разгона минимизирующей траектории, определенной на отрицательной полуоси времени, до бесконечной скорости к моменту $t = 0$ (теорема 1.3). Положим $T_1 = S_1 = \bar{T}$, где $\bar{T}$ достаточно велико, чтобы при $T > \bar{T}$ выполнялась теорема 1.2, и определим по индукции $T_n = \mathrm{e}^(S_{n-1}^\sigma$, $S_n = S_{n-1} + T_n$, где $\sigma > 2$ (в случае общего степенного гамильтониана $\sigma > \beta^2/2(\beta - 1)$), а также $X_n = \sum_{1 \leq i \leq n} g_{T_i}(T_i)$, $n = 1, 2, \ldots$. Потенциал, определенный формулой $U_\infty(x, t) = U_C(x - X_{n-1} + g_{T_n}(-t - S_{n-1})$ при $-S_n < t \leq -S_{n-1}$, является допустимым и при можно проверить, что для минимизирующей траектории γ_n^x, определенном в этом потенциале при $-S_n \leq t \leq 0$, имеет место оценка $\dot{\gamma}_n^x(0)| \geq \mathrm{const}, (\log T_n)^{\frac{2}{\beta} - \frac{1}{\sigma}}$ при $|x| \leq \mathrm{const}\,(\log T_n)^{2/\beta}$. Отсюда следует искомое утверждение о бесконечной терминальной скорости минимизирующих траекторий, определенных на бесконечной полуоси времени.

Результаты гл. 1 опубликованы в [8, 13].

Если потенциал периодичен по времени, решения уравнения Гамильтона–Якоби выходят на режим, также характеризуемый периодичностью. Это показано в **главе 2**, где построен частный вариант так называемой «слабой теории КАМ» для решения уравнения Гамильтона–Якоби на окружности $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$ с периодической внешней силой. Гамильтониан предполагается натуральным, т. е. имеет вид $H(t, x, p) = H_0(p) + U(t, x)$, где функция $H_0(\cdot) \in C^2(\mathbf{R})$ строго выпукла и суперлинейна, а $U \in C^2(\mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2)$ — потенциал, периодичный по пространственной и временной переменной.

При $U(t,x) \equiv 0$ уравнение (1) имеет однопараметрическое семейство классических решений $\varphi^a(t,x) = ax - H_0(a)t$. Следующая теорема обобщает этот факт на случай произвольного периодического потенциала:

Теорема 2.1. *В сделанных предположениях для любого $a \in \mathbf{R}$ существует обобщенное вязкостное решение уравнения* (1), *имеющее вид*

$$\varphi^a(t,x) = ax - H(a)t + s^a(t,x), \quad s^a \in C(\mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2). \tag{5}$$

Здесь H — выпуклая функция, удовлетворяющая неравенствам

$$\min_{(t,x)\in\mathbf{R}^2} U(t,x) \le H(a) - H_0(a) \le \max_{(t,x)\in\mathbf{R}^2} U(t,x). \tag{6}$$

Доказательство основано на представлении решения в виде $\varphi(t,x) = \min_\xi [\varphi_0(\xi) + L_{0,t}(\xi,x)]$, которое следует из (2), (3). Стандартными методами нетрудно показать (**Леммы 2.4–2.8**), что функция $L_{s,t}(x,y)$ диагонально периодична: $L_{s,t}(x+1,y+1) = L_{s,t}(x,y)$, локально липшицева, обладает свойством коцикла $L_{s,t}(x,y) = \min_z [L_{s,\tau}(x,\xi) + L_{\tau,t}(\xi,y)]$ при любых $s < \tau < t$, а разность $\frac{1}{t-s}L_{s,t}(x,y) - L_0(\frac{y-x}{t-s})$, где L_0 — преобразование Лежандра функции H_0, равномерно ограничена теми же константами, что и $-U(t,x)$. Кроме того, $L_{s,t}(x,y)$ обладает *свойством Монжа* (**Предложение 2.9**, **Следствие 2.10**):

$$L_{s,t}(x_1,y_1) + L_{s,t}(x_2,y_2) < L_{s,t}(x_1,y_2) + L_{s,t}(x_2,y_1) \tag{7}$$

при $x_1 < x_2$, $y_1 < y_2$, $s < t$. Для доказательства последнего свойства рассматриваются пересекающиеся минимизирующие траектории, соединяющие x_1 с y_2 и x_2 с y_1, и проверяется, что с помощью перезамыкания траекторий в окрестности точки пересечения сумма соответствующих действий может быть строго уменьшена.

Решение φ задачи Коши с начальными данными $\varphi_0 = ax + s_0(x)$, где $s_0 \in C(\mathbf{R}/\mathbf{Z})$, имеет вид $\varphi(t,x) = ax + s(t,x)$. В силу периодичности потенциала по времени это решение естественно рассматривать в целые моменты времени $n = 1, 2, \ldots$ Обозначим $s_n(x; a, s_0) = \min_\xi [s_0(\xi) + L_{0,n}(\xi, x) - a(x-\xi)]$. Из свойств функции $L_{s,t}(x,y)$ следует (**Предложение 2.11**, **Следствие 2.12**), что все s_n липшицевы с общей константой, зависящей лишь от свойств гамильтониана и параметра a.

Положим $H_n(a) = \frac{1}{n}\min_x\ s_n(x; a, 0)$; тогда выполнено **Предложение 2.13**, согласно которому существует такая выпуклая функция $H(a)$ («усредненный гамильтониан»), что $|H_n(a) - H(a)| \leq C(a)/n$, где $C(a)$ — константа, определяемая величиной a и липшицевыми свойствами $L_{s,t}(x,y)$, а разность $H(a) - H_0(a)$ ограничена теми же константами, что $U(t,x)$. Доказательство этого факта базируется на субаддитивности $H_n(a)$ по n. В свою очередь, это дает возможность доказать, что существует предел

$$\liminf_{n\to\infty} [s_n(x; a, s_0) + nH(a)] = s^a(x),$$

который удовлетворяет функциональному уравнению

$$s^a(x) = \min_\xi [s^a(\xi) + L_{0,1}(\xi, x) - a(x-\xi)] + H(a) \tag{8}$$

и потому определяет решение вида (5), если положить $\varphi_0(x) = ax + s^a(x)$. Тем самым теорема 2.1 доказана.

Любой функции $s^a \in C(\mathbf{R}/\mathbf{Z})$, удовлетворяющей функциональному уравнению (8), сопоставим многозначное отображение $Y^a\colon x \mapsto \arg\min_\xi [s^a(\xi) + L_{0,1}(\xi, x) - a(x-\xi)]$. Можно показать (**Лемма 2.14**, **Предложение 2.15**), что отображение Y^a сохраняет порядок, удовлетворяет условию $Y^a(x+1) = Y^a(x)+1$, а последовательность непустых множеств $M_n = (Y^a)^n\mathbf{R}/\mathbf{Z}$ является убывающей по включению и имеет непустое замкнутое пересечение M^a, причем любая его открытая окрестность $U \supset M^a$ содержит все множества M_n, начиная с некоторого номера. На множестве M^a отображение Y^a однозначно, является гомеоморфизмом и обладает *числом вращения* $\omega(a)$.

Пусть s_1^a и s_2^a — два непрерывных периодических решения функционального уравнения (8) и Y_1^a — многозначное отображение, соответствующее функции s_1^a. Легко проверить, что $s_1^a(x) - s_2^a(x) \geq s_1^a(y) - s_2^a(y)$ для любых $x \in \mathbf{R}$ и $y \in Y_1^a(x)$ (**Лемма 2.18**). Отсюда нетрудно вывести, что на всякой орбите отображения Y_1^a (а значит, и на замыкании орбиты) разность функций s_1^a и s_2^a постоянна. Следовательно, и отображения Y_1^a и Y_2^a, соответствующие каждой из функций, совпадают на замыкании любой из своих орбит.

Для каждой точки x из какого-либо инвариантного множества M^a определена двусторонняя последовательность $x_k = (Y^a)^k x$, $k \in \mathbf{Z}$. Из определения отображения Y^a, связывающего его с минимизацией механического действия, может быть выведено **Предложение 2.17**, согласно которому все такие последовательности минимизируют действие относительно «финитных» возмущений. Точнее, для всех $-\infty < k_1 < k_2 < \infty$ и любых конечных наборов $(y_{k_1}, y_{k_1+1}, \ldots, y_{k_2})$ таких, что $y_{k_1} = x_{k_1}$ и $y_{k_2} = x_{k_2}$, выполнено неравенство $\sum_{k_1 \leq k < k_2} L_{0,1}(x_k, x_{k+1}) \leq \sum_{k_1 \leq k < k_2} L_{0,1}(y_k, y_{k+1})$. Это позволяет применить результаты С. Обри [30], согласно которым при иррациональном числе вращения $\omega(a)$ инвариантное множество M^a совпадает с замыканием любой траектории. В свою очередь, отсюда выводится

Теорема 2.2. *Пусть s^a — непрерывная периодическая функция, существование которой установлено в теореме 2.1, а $\omega(a)$ — соответствующее число вращения. Если оно иррационально, то функция s^a определена единственным образом с точностью до аддитивной константы.*

Круг идей, на которых основаны перечисленные результаты слабой тео-

30 Aubry S., Le Daeron P. Y. The discrete Frenkel–Kontorova model and its extensions I. Exact results for the ground-states // Physica D: Nonlinear Phenomena. 1983. Vol. 8, no. 3. Pp. 381–422.

рии КАМ, допускает плодотворный перенос на задачу вычисления транспортного расстояния между распределениями массы на окружности (**Дополнение к гл. 2**). Эта задача возникает в ряде приложений, в частности в обработке изображений и машинном зрении. Если ценовая функция удовлетворяет условию Монжа (7), а соответствующие распределения заданы на отрезках числовой прямой, оптимальное отображение является монотонным. Поэтому для мер, представляющих собой n-точечные гистограммы, задача решается за число операций, пропорциональное n. Однако для мер, заданных на окружности, наивный подход дает уже квадратичное по n число операций, потому априори нельзя исключить ни одно из n возможных выравниваний двух n-точечных гистограмм.

В Дополнении к гл. 2 транспортная задача распространяется на универсальную накрывающую окружности. В результате начальная и конечная меры становятся периодическими, а стоимость транспорта — бесконечной, однако по-прежнему имеет смысл искать такие транспортные планы, стоимость которых не может быть уменьшена никаким *локальным* изменением. Различные локально оптимальные отображения, которые не могут быть продеформированы одно в другое никаким локальным преобразованием, образуют семейство, которое можно параметризовать величиной, аналогичной числу вращения в слабой теории КАМ. Можно ввести и функцию–аналог усредненного лагранжиана (α-функции Мазера), которая оказывается эффективно вычислимой. В Дополнении к гл. 2 показано, что минимизация этой функции методом последовательных делений пополам доставляет эффективный алгоритм транспортной оптимизации на окружности. Класс ценовых функций, покрываемых этой конструкцией, состоит из всех функций, удовлетворяющих условию Монжа (7). В частности, к нему относится квадратичная функция и ценовые функции, порожденные натуральными лагранжианами с периодическим по времени потенциалом [31, 32].

Результаты гл. 2 анонсированы в [2] и опубликованы в [3, 4]. Результаты Дополнения к гл. 2 опубликованы в [11]

В **главе 3** изучается динамика траекторий внутри сингулярных многообразий обобщенных решений уравнения Гамильтона–Якоби с общим гамильтонианом вида $H(t,x,p)$, который является гладким и строго выпуклым по переменной p и соответствует лагранжиану $L(t,x,v)$, обладающему такими же свойствами. В этом случае связь скоростей и двойственных к ним импульсов осуществляется по формулам $v = \nabla_p H(t,x,p)$, $p = \nabla_v L(t,x,v)$.

В автореферате ограничимся локальным исследованием в сингулярной точке, в которой обобщенное решение φ может быть представлено как поточечный минимум конечного числа гладких «ветвей» φ_i, каждая из которых является классическим решением уравнения Гамильтона–Якоби. Общий случай подробно рассмотрен в диссертации.

В любой точке (t,x) классическое решение уравнения Гамильтона–Якоби может быть представлено в виде

$$\varphi(t+\tau, x+\xi) - \varphi(t,x) = \tau\partial_t\varphi + \xi\cdot\nabla\varphi + \ldots = -\tau H(t,x,\nabla\varphi) + \xi\cdot\nabla\varphi + \ldots,$$

где отброшенные слагаемые имеют порядок $o(|\tau|+|\xi|)$. Поэтому в сингулярной точке имеем представление

$$\varphi(t+\tau, x+\tau v) - \varphi(t,x) = \tau \min_i (v\cdot p_i - H_i) + \ldots, \tag{9}$$

где $p_i = \nabla\varphi_i(t,x)$, $H_i = H(t,x,p_i)$. Выпуклый многогранник с вершинами $(-H_i, p_i)$ представляет собой супердифференциал функции φ в точке (t,x); он обозначается $\partial\varphi(t,x)$ и в регулярных точках сводится к обычному пространственно-временному градиенту.

31 Knill O. Jürgen Moser, selected chapters in the calculus of variations. Birkhäuser Verlag, 2003.

32 Bernard P., Buffoni B. Optimal mass transportation and Mather theory // Journal of the European Mathematical Society. 2007. Vol. 9. Pp. 85–121.

Если заменить обобщенное решение φ его гладкой регуляризацией φ^μ — например, решением уравнения

$$\partial_t \varphi^\mu + H(t, x, \nabla\varphi^\mu) = \mu\Delta\varphi^\mu), \tag{10}$$

то кривизна графика, бесконечная в сингулярной точке (t, x), оказывается как бы «размазанной» по ее малой окрестности. Градиент $\nabla\varphi^\mu$ принимает в этой окрестности всевозможные значения из супердифференциала $\partial\varphi(t, x)$. Поэтому можно неформально представлять себе супердифференциал как множество значений градиента в инфинитезимальной окрестности сингулярной точки.

Проследим за траекторией частицы, начинающей движение из сингулярной точки со скоростью v. По физическому смыслу задачи ее скорость должна соответствовать одному из «наличных» в этой точке значений импульса, т. е. некоторому элементу p-проекции супердифференциала $\partial\varphi(t, x)$.

В действительности о возможных значениях скорости такой частицы можно сказать больше. При малом положительном τ, когда частица уже покинула исходное положение, решение $\varphi(t + \tau, x + \tau v)$ будет определяться не всеми ветвями φ_i, а лишь теми, для которых достигается минимум в (9). Ветви решения, которые не вносят вклад в этот минимум, могут быть отброшены. Обозначим соответствующее множество индексов $I(v) = \arg\min_i(v \cdot p_i - H_i)\}$ и постулируем, что скорость любой траектории частицы, перемещающейся внутри сингулярного многообразия, должна удовлетворять следующему условию допустимости (**Определение 3.1**): скорость v^* называется допустимой, если соответствующее ей значение импульса $p^* = \nabla_v L(t, x, v^*)$ лежит в выпуклой оболочке векторов p_i, для которых $i \in I(v^*)$:

$$v^* \in \nabla H_p(t, x, \operatorname{conv}\{p_j \colon j \in I(v^*)\}). \tag{11}$$

Полезно сравнить эту формулу с определением обобщенных характеристик по П. Каннарсе, которое содержит еще одну операцию взятия выпуклой оболочки *после* применения нелинейного отображения $\nabla_p H(t, x, \cdot)$. Хотя это определение выглядит естественно с точки зрения теории дифференциальных включений, в действительности оно вносит излишний произвол в определение скорости и приводит к потере единственности, отмеченной П. Каннарсой [21].

Оказывается, что громоздкое на первый взгляд условие самосогласованности (11) в точности является условием достижения оптимума в некоторой задаче минимизации строго выпуклой функции. Это наблюдение разом гарантирует существование и единственность (в силу строгой выпуклости) допустимой скорости во всех точках течения, заданного обобщенным решением уравнения Гамильтона–Якоби. Более точно, имеет место следующая

Теорема 3.2. *В любой точке (t, x) существует единственное значение допустимой скорости v^*, которое является решением задачи минимизации строго выпуклой функции $\hat{L}(v) = L(t, x, v) - \min_i (v \cdot p_i - H_i)$ по переменной v.*

Доказательство представляет собой простое вычисление в рамках субдифференциального исчисления. Заметим, что при $H(t, x, p) = |p|^2/2 + U(t, x)$ данная задача сводится к вычислению центра наименьшей сферы, содержащей точки p_i — именно в таком, отчасти загадочном виде этот результат появился в работах И. А. Богаевского [17, 18].

Заметим также, что функции $\hat{L}$ можно придать следующий «вариационный» смысл. Рассмотрим бесконечно малое смещение из точки (t, x) со скоростью v. Легко видеть, что с точностью до членов первого порядка по $\mathrm{d}t$

$$\varphi(t, x) + L(t, x, v)\,\mathrm{d}t - \varphi(t + \mathrm{d}t, x + v\,\mathrm{d}t) = \hat{L}(v)\,\mathrm{d}t.$$

---

21 См. с. 7.

17 См. с. 6.

18 См. с. 6.

Поэтому допустимое значение скорости минимизирует скорость роста расхождения между минимально возможным значением действия (значением функции φ) и значением механического действия вдоль траектории частицы. Иными словами, траектория внутри сингулярного многообразия не может быть минимизирующей, но проходит таким образом, чтобы скорость, с которой накапливается расхождение ее механического действия и минимально возможного значения, задаваемого функцией φ, была минимальной. Именно в таком виде этот «принцип Гюйгенса» для движения частиц в потоке, заданном обобщенным решением φ, был сформулирован при первой публикации в обзоре Ж. Бека и К. Ханина [33], соответствующий фрагмент которого был написан диссертантом.

Эти рассуждения, однако, остаются эвристическими, пока не подведена строгая база под основное понятие допустимой скорости. Для этого может быть применен метод исчезающей вязкости. Известно, что при умеренных предположениях о регулярности начального данного в задаче Коши для (10) эта задача обладает гладким решением φ^μ, локально липшицевым с константой, которая не зависит от μ. Более того, при $\mu \to 0$ решение φ^μ сходится к единственному вязкостному решению, обладающему той же константой Липшица. Доказательства этих фактов при $\varphi(0, \cdot) \in C^{2,\alpha}(\mathbf{R}^d)$ можно найти, в частности, в известной книге П.-Л. Лионса [34].

Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\dot{\gamma}^\mu(t) = \nabla_p H(t, \gamma^\mu, \nabla\varphi^\mu(t, \gamma^\mu)), \quad \gamma^\mu(0) = y.$$

При $\mu > 0$ оно имеет единственное решение, которое непрерывно зависит от начальной точки y. Зафиксируем некоторую пространственно-временную

33 Bec J., Khanin K. Burgers turbulence // Physics Reports. 2007. Vol. 447, no. 1-2. Pp. 1–66. 0704.1611.

34 Lions P. Generalized solutions of Hamilton–Jacobi equations. Pitman Boston, 1982. P. 317. ISBN: 0273085565.

точку (t_0, x_0) с $t_0 > 0$ и выберем такую последовательность траекторий γ^{μ_i}, чтобы $\gamma^{\mu_i}(t_0) \to x_0$ и $\mu_i \to 0$ при $i \to \infty$. Равномерно липшицево свойство решений φ^{μ_i} гарантирует, что кривые γ^{μ_i} равностепенно непрерывны (а значит, равномерно ограничены) на некотором интервале времени, содержащем t_0. Поэтому найдется кривая $\bar\gamma$, которая является равномерным пределом $\gamma^{\mu_{i'}}$ по некоторой подпоследовательности $\mu_{i'}$. Заметим, что все кривые $\gamma^{\mu_{i'}}$ и $\bar\gamma$ являются равномерно липшицевыми с константой, не зависящей от μ, и $\bar\gamma(t_0) = x_0$.

Пусть далее $\bar v$ есть некоторое (вообще говоря, не единственное) предельное значение односторонней производной «вперед» по времени кривой $\bar\gamma$ в момент t_0, т. е. пусть $\bar v = \lim_{\tau_k \to 0} \frac{1}{\tau_k}[\bar\gamma(t_0 + \tau_k) - \bar\gamma(t_0)]$ для некоторой последовательности $\tau_k \to 0$. Оказывается, что имеет место следующая

Теорема 3.3. *Так построенная предельная скорость $\bar v$ является допустимой в точке (t_0, x_0).*

В силу единственности допустимой скорости это значение скорости является не просто предельной точкой, а однозначно определенным пределом, и негладкий поток предельных траекторий является касательным к всюду однозначно определенному, хотя и разрывному полю допустимых скоростей.

Доказательство теоремы 3.3 основано на наблюдении, что само решение φ^μ в определенном смысле является аналогом функции Ляпунова для регуляризованного потока γ^μ: точнее, вдоль его траекторий возрастает величина $\varphi^\mu(t, \gamma^\mu) - p^* \cdot \gamma^\mu$, достигающая максимума на траектории с допустимой скоростью. Поэтому любая траектория, скорость которой отличается от допустимой, не может возникать при описанном выше предельном переходе.

Наконец, отметим, что при формальном предположении достаточной гладкости потока производные высших порядков предельной траектории в сингулярной точке могут быть получены при помощи некоторой пертурбативной процедуры, описанной в разд. 3.5 диссертации и обобщающей на более высокие порядки рассуждения, проведенные при формулировке условия допустимости в первом (линейном) порядке, т. е. для скоростей.

Результаты этой главы диссертации опубликованы в [15], а также в двух текстах, написанных нами для обзорных статей других авторов: разд. 4.2 обзора Ж. Бека и К. Ханина [33], где впервые была опубликована характеризация допустимой скорости как скорости, минимизирующей избыточный рост действия вдоль лагранжевой траектории, и разд. 5.6 обзора С. Н. Гурбатова и др. [7]. Доказательство теоремы 3.3 и пертурбативное разложение для предельных траекторий содержатся в препринте arXiv:1211.7084 (Khanin K., Sobolevski A. "On dynamics of Lagrangian trajectories for Hamilton–Jacobi equations"), опубликованном на arXiv.org и находящемся на рецензировании в журнале Discr. Cont. Dyn. Syst.

В **главе 4** диссертации рассматривается математическая модель возникновения сингулярностей в потоке пылевидного вещества (решениях системы уравнений газовой динамики без давления) в вариантах свободного и самогравитирующего вещества.

В отличие от модели предыдущих глав, основанной на уравнении Гамильтона–Якоби, пылевидное вещество в газовой динамике без давления не является абсолютно пассивным. Его бесконечно малые частицы рассматриваются как носители двух мер: меры массы и обобщенной меры импульса (заряда или векторной меры). В регулярной части потока происходит пассивный перенос обеих мер, но при попадании на сингулярность частицы сталкиваются абсолютно неупруго с сохранением массы и импульса.

Благодаря этому скорость элементов сингулярного многообразия определяется не только локальной структурой потока, но и предысторией совокупности частиц, образовавших сингулярность. Поэтому, хотя сингулярности, об-

---

33 См. с. 29.

7 См. с. 2.

разующиеся в потоке пылевидного вещества, качественно устроены так же, как сингулярности решений уравнения Гамильтона–Якоби, количественные характеристики их движения не совпадают.

Динамика пылевидного вещества, частицы которого сталкиваются абсолютно неупруго, изучалась в ряде работ, среди которых наиболее важную роль в контексте настоящей диссертации играет статья Вейнана И, Ю. Г. Рыкова и Я. Г. Синая [22]. В ней для случая одномерного (плоскосимметричного) течения построено явное представление решения — т. н. «обобщенный вариационный принцип», аналогичный конструкции Лакса–Олейник для уравнения Гамильтона–Якоби, но учитывающий также распределение масс. Будем называть данный вариационный принцип *вариационным принципом ERS*, чтобы отличить его от еще одной вариационной конструкции, предложенной А. И. Шнирельманом [23], которую мы называем *вариационным принципом S*.

В данной главе изучается система уравнений

$$\partial_t \rho + \partial_x(\rho u) = 0, \quad \partial_t(\rho u) + \partial_x(\rho u^2) = 0, \tag{12}$$

выражающая динамику пылевидного вещества, частицы которого движутся по инерции и не взаимодействуют друг с другом на расстоянии. Начальные распределения масс и скоростей задаются функциями $\rho(0, x) = \rho_0(x)$ и $u(0, x) = u_0(x)$, на которые в зависимости от точной постановки задачи налагаются те или иные условия регулярности.

Для корректного определения модели требуется задать закон взаимодействия частиц при соударении. В данной работе предполагается, что в таком случае частицы сталкиваются абсолютно неупруго (отсюда название «модель слипания»).

Для гладких решений уравнений (12) выполнено дифференциальное со-

---

22 См. с. 8.

23 См. с. 8.

отношение $\partial_t u + u\,\partial_x u = 0$, выражающее сохранение скорости вдоль траектории частицы, и поэтому до столкновений частицы движутся равномерно и прямолинейно. Кластеры слипшихся частиц могут образовываться только из соседних частиц, поскольку их траектории не могут пересекаться.

Чтобы частица, при $t = 0$ находившаяся в точке y_0, оставалась свободной к моменту $t > 0$, центры масс произвольных групп частиц, примыкающих к ней слева и справа, не должны пересекать траекторию этой частицы, т. е. при любых $y' < y_0 < y''$ должны выполняться неравенства [22]

$$\frac{\int_{y'}^{y_0}(y + tu_0(y))\rho_0(y)\,\mathrm{d}y}{\int_{y'}^{y_0}\rho_0(y)\,\mathrm{d}y} \le y_0 + tu_0(y_0) \le \frac{\int_{y_0}^{y''}(y + tu_0(y))\rho_0(y)\,\mathrm{d}y}{\int_{y_0}^{y''}\rho_0(y)\,\mathrm{d}y}. \qquad (13)$$

С другой стороны, пусть группа частиц, вначале расположенных на интервале (y^-, y^+), к моменту $t > 0$ слипается и образует кластер, к которому с обеих сторон примыкают свободные частицы. Тогда масса, скорость и координата этого кластера задаются выражениями

$$m = \int\limits_{y^-}^{y^+}\rho_0(y)\,\mathrm{d}y, \quad u = \frac{1}{m}\int\limits_{y^-}^{y^+}u_0(y)\rho_0(y)\,\mathrm{d}y, \quad x = \frac{1}{m}\int\limits_{y^-}^{y^+}(y + tu_0(y))\rho_0(y)\,\mathrm{d}y. \qquad (14)$$

В совокупности формулы (13), (14) позволяют определить для любой частицы, находившейся в начальный момент в точке y, ее положение $x(t, y)$ в момент времени $t > 0$, не вычисляя динамику в промежуточные моменты времени. Для этого, однако, необходимо решить систему неравенств (13).

Получить явное выражение для $x(t, y)$ можно двумя способами, каждый из которых связан с минимизацией некоторого функционала.

Вариационный принцип ERS [22]. Введем «массовую координату» $m(y) = \int_{y_b}^{y}\rho_0(\eta)\,\mathrm{d}\eta$ и положим $\Phi_0(m) = \int_{y_b}^{y(m)}\eta\rho_0(\eta)\,\mathrm{d}\eta$, $U_0(m) = \int_{y_b}^{y(m)}u_0(\eta)\rho_0(\eta)\,\mathrm{d}\eta$, $\Phi(t, m) = \Phi_0(m) + tU_0(m)$. Нижний предел интегрирования y_b здесь может выбираться произвольно. Легко проверить, что пространственная координата может быть выражена через массовую по формуле $y(m) = \Phi_0'(m)$, а скорость — как $u_0 \circ y(m) = U_0'(m)$. Следовательно, пока частица остается свободной, ее координата имеет вид $x(t, y) = y + tu_0(y) = \partial_m \Phi(t, m)$, однако эта формула не описывает слипания частиц.

Неравенства (13), выражающие условия свободы частицы, которая при $t = 0$ находилась в точке y_0 и имела массовую координату $m_0 = m(y_0)$, в новых переменных приобретают вид

$$\frac{\Phi(t, m_0) - \Phi(t, m')}{m_0 - m'} < \frac{\Phi(t, m'') - \Phi(t, m_0)}{m'' - m_0} \tag{15}$$

для любых $m' < m_0 < m''$. Иначе говоря, в точках, соответствующих свободным частицам, график функции $\Phi(t, \cdot)$ должен совпадать с графиком выпуклой оболочки $\operatorname{conv} \Phi(t, \cdot)$ — наибольшей выпуклой функции, не превосходящей $\Phi(t, \cdot)$. Поскольку функция $\Phi(t, \cdot)$ дифференцируема, ее выпуклая оболочка тоже является дифференцируемой, и в таких точках их производные совпадают: $x(t, y(m)) = \partial_m \operatorname{conv} \Phi(t, m)$.

С другой стороны, для кластеров частиц, образовавшихся к моменту $t > 0$, на интервале значений $(m^- = m(y^-), m^+ = m(y^+))$ из формул (14) следует соотношение $x(t, y) = (\Phi(t, m^+) - \Phi(t, m^-))/(m^+ - m^-) = \partial_m \operatorname{conv} \Phi(t, m)$. Таким образом, как в кластерах, так и на свободных частицах координата $x(t, y)$ выражается производной выпуклой функции $\operatorname{conv} \Phi(t, \cdot)$ по массовой координате. Это выражение в [12] названо «обобщенным вариационным принципом», а в контектсе настоящей работы — вариационным принципом ERS. Отметим, что в случае постоянной начальной плотности вариационный принцип ERS совпадает с вариационным принципом Лакса–Олейник для уравнения Гамильтона–Якоби $\partial_t \varphi + \frac{1}{2}(\partial_x \varphi)^2 = 0$.

Вариационный принцип ERS может быть получен предельным переходом по исчезающей вязкости [1]. Для этого рассмотрим регуляризацию систе-

12 См. с. 5.

мы уравнений (12) нелинейной вязкостью, которая имеет вид

$$\partial_t \rho^\varepsilon + \partial_x(\rho^\varepsilon u^\varepsilon) = 0, \quad \partial_t(\rho^\varepsilon u^\varepsilon) + \partial_x[\rho^\varepsilon (u^\varepsilon)^2] = \varepsilon \partial_x(\rho^\varepsilon \partial_x u^\varepsilon). \tag{16}$$

с начальными условиями $\rho^\varepsilon(0,x) = \rho_0(x)$, $u_0^\varepsilon(x) = u_0(x)$. Можно показать (**Лемма 4.8**), что любому классическому решению системы (16) соответствует классическое решение уравнения

$$\partial_t \Theta + U_0^\varepsilon(\partial_x \Theta) = \varepsilon \partial_x^2 \Theta, \tag{17}$$

где $U_0^\varepsilon(m) = U_0(m) + \varepsilon \rho_0 \circ y(m)$, которое удовлетворяет начальному условию $\Theta(0,x) = \Theta_0(x)$, где функция Θ_0 является преобразованием Лежандра выпуклой функции Φ_0, и соотношению $\partial_x^2 \Theta = \rho^\varepsilon$ при всех $t \geq 0$, x. Обратно, классическому решению задачи Коши для уравнения (17), которое является сильно выпуклым по x в некоторой связной открытой области пространства-времени, соответствует классическое решение регуляризованных уравнений (16), выражаемое формулами $\rho^\varepsilon = \partial_x^2 \Theta$, $u^\varepsilon = -\partial_t \partial_x \Theta / \rho^\varepsilon$.

Методами теории вязкостных решений доказывается следующая

Теорема 4.9. *Задача Коши для уравнения (17) с указанным выше начальным условием имеет единственное вязкостное обобщенное решение при любом $\varepsilon > 0$, сходящееся при $\varepsilon \to 0$ равномерно на компактах к обобщенному вязкостному решению Θ уравнения $\partial_t \Theta + U_0(\partial_x \Theta) = 0$. Преобразование Лежандра $\Phi(t,\cdot)$ функции $\Theta(t,\cdot)$ при любом $t \geq 0$ представляет собой решение вариационного принципа ERS.*

Вариационный принцип S. Другое, неявное вариационное представление для координат частиц $x(t,y)$ было предложено в работе [23]. Сформулируем его в виде, упрощенном и более компактном по сравнению с оригиналом.

23 См. с. 8.

Определим *поле смещений* как $\xi(t,y) = x(t,y) - y$. Если пересечения траекторий не происходит, то $\xi(t,y) = tu_0(y)$, а координата $x(t,y) = y + \xi(t,y)$ монотонно возрастает вместе с y. В качестве условия регулярности для начальных данных будем предполагать, что интеграл $\int \xi^2(t,y)\rho_0(y)\,\mathrm{d}y$ сходится, т. е. ограничимся смещениями, принадлежащими гильбертову пространству $L_2(\mathbf{R};\rho_0)$ с весом $\rho_0(\cdot)$. Условимся назыать поле смещений, для которого $x(t,y) = y + \xi(t,y)$ монотонная по y, *допустимым.* Допустимые поля смещений образуют замкнутое выпуклое подмножество $\mathscr{X} \subset L_2(\mathbf{R};\rho_0)$, которое можно считать конфигурационным пространством системы частиц пылевидного вещества.

Согласно вариационному принципу S, отображение $x(t,y)$ с учетом слипания частиц определяется выражением $x(t,y) = y + \bar{\xi}(t,y)$, где $\bar{\xi}(t,\cdot)$ есть *ортогональная проекция* $\xi(t,y) = tu_0(y)$ на множество допустимых смещений $\mathscr{X}$ по отношению к гильбертовой структуре $L_2(\mathbf{R};\rho_0)$.

Теорема 4.13. *Вариационные принципы ERS и S эквивалентны.*

Доказательство состоит в проверке, что вариационный принцип ERS дает двойственное по Лежандру описание выпуклого множества $\mathscr{X}$, и подробно проведено в диссертации.

Возникает вопрос, можно ли обобщить полученные выше вариационные конструкции динамики пылевидного вещества с абсолютно неупругими соударениями на случай высших размерностей. Существование решений многомерного аналога системы уравнений (12) установлено в работе М. Севера [35]. Однако предложенное там доказательство неконструктивно и не позволяет выяснить структуру решения или построить численный алгоритм его приближенного вычисления. Напротив, оба вариационных принципа ERS и S дают

---

35 Sever M. An existence theorem in the large for zero-pressure gas dynamics // Differential Integral Equations. 2001. Vol. 14, no. 9. Pp. 1077–1092.

подробную информацию о структуре решений и могут применяться для их численного построения. Более того, когда начальное поле скоростей потенциально, эти вариационные принципы допускают естественные обобщения на многомерный случай без каких-либо предположений о симметрии начальных данных. Тем не менее удается в явном виде построить примеры неплоских или несимметричных течений, для которых указанные обобщения вариационных принципов ERS и S приводят к некорректным ответам (**разд. 4.7.2**, [9]).

Глава 5 диссертации посвящена методу реконструкции процесса возникновения крупномасштабной структуры Вселенной и поля пекулярных скоростей по каталогам положений галактик. Исходными данными для этого метода служат, в частности, обширные каталоги пространственных положений (красных смещений) и масс галактик: каталог 2dF [8], появившийся около 10 лет назад, и SDSS [9], публикация второй очереди которого была завершена в 2008 г., а третьей — ожидается в 2014 г. Этот метод, разработанный нами в сотрудничестве с французскими космологами и астрономами U. Frisch, R. Mohayaee, M. Hénon и математиками Y. Brenier и G. Loeper и получивший название «метод МАК» (Монж, Ампер, Канторович) [5], основан на сведении задачи реконструкции в приближении Зельдовича к оптимизационной транспортной задаче Монжа–Канторовича.

Удобная математическая модель нерелятивистской динамики самогравитирующего вещества, объясняющая возникновение крупномасштабной структуры Вселенной, представляет собой систему уравнений Эйлера–Пуассона, которые в плоской вселенной Эйнштейна–де Ситтера с преобладанием веще-

---

8 См. с. 3.

9 См. с. 3.

ства над излучением имеют вид

$$\partial_\tau v + (v \cdot \nabla_x v) = -\frac{3}{2\tau}(v + \nabla_x \varphi), \tag{18}$$

$$\partial_\tau \rho + \nabla_x \cdot (\rho v) = 0, \quad \nabla_x^2 \varphi = \frac{1}{\tau}(\rho - 1). \tag{19}$$

Здесь x — координата, сопутствующая расширению Хаббла, τ — некоторая функция космологического времени, называемая фактором линейного роста и представляющая собой удобную временну́ю переменную при изучении нелинейной гравитационной неустойчивости.

В правых частях уравнений Эйлера и Пуассона имеются знаменатели, пропорциональные τ. Чтобы задача не была сингулярной при $\tau \downarrow 0$, достаточно потребовать, чтобы

$$v(x, 0) + \nabla_x \varphi(x, 0) = 0, \qquad \rho(x, 0) = 1. \tag{20}$$

Поле плотности в настоящий момент времени τ_0 может быть определено из каталога наблюдаемых галактик:

$$\rho(x, \tau_0) = \rho_0(x). \tag{21}$$

Уравнение (18) можно рассматривать как уравнение Эйлера–Лагранжа для подходящего функционала действия:

$$\mathscr{I}_\alpha = \frac{1}{2} \int\limits_0^{\tau_0} \mathrm{d}\tau \int \mathrm{d}x \cdot \tau^\alpha (\rho |v|^2 + \alpha |\nabla_x \varphi|^2), \tag{22}$$

где для плоской вселенной $\alpha = \frac{3}{2}$ и минимизация производится при ограничениях, заданных уравнениями (19)–(21).

Я. Б. Зельдович предложил приближение, в котором $\alpha \downarrow 0$ и уравнение (18) принимает вид $\partial_\tau v + (v \cdot \nabla_x) v = 0$. В лагранжевых координатах $x(q, \tau)$ есть сопутствующая хаббловскому расширению координата в момент времени τ элемента массы, который в начальный момент находился в точке q:

$x(q,0)=q$. Тогда $\rho(x(q,\tau),\tau)=(\det(\partial x/\partial q))^{-1}$ и $v(x(q,\tau),\tau)=\partial_\tau x(q,\tau)$, где производная по τ берется при фиксированном q. Как было замечено Зельдовичем, в этих новых переменных нелинейное уравнение Эйлера принимает линейный вид $\partial_\tau^2 x=0$. Более того, уравнение (19) оказывается удовлетворено автоматически, а действие приобретает вид

$$\mathscr{I}_0=\frac{1}{2}\int\limits_0^{\tau_0}\mathrm{d}\tau\int\mathrm{d}q\,|\partial_\tau x(q,\tau)|^2=\frac{1}{2\tau_0}\int\mathrm{d}q\,|x_0(q)-q|^2, \tag{23}$$

Здесь положено $x_0(q)=x(q,\tau_0)$ и учтен тот факт, что траектории элементов массы, минимизирующие механическое действие, имеют вид $x(q,\tau)=q+(\tau/\tau_0)(x_0(q)-q)$. Заметим, что в силу первого условия (20) $v(q,0)=(1/\tau_0)(x_0(q)-q)=\nabla_q\bar{\Phi}(q)$ и лагранжево отображение остается потенциальным при всех $\tau>0$: $x(q,\tau)=q+\tau\nabla_q\bar{\Phi}(q)=\nabla_q\Phi(q,\tau)$, где $\Phi(q,\tau)=|q|^2/2+\tau\bar{\Phi}(q)$.

Чтобы определить в приближении Зельдовича движение сплошной среды, необходимо минимизировать функционал (23) при следующем ограничении, которое определяется представлением плотности в терминах якобиана $(\partial x/\partial q)^{-1}$ и краевыми условиями (20), (21): $\det(\partial x_0(q)/\partial q)=1/\rho(x_0(q))$. С точки зрения теории оптимизации это частный случай задачи транспортной оптимизации Монжа–Канторовича. Можно также решать уравнение Монжа–Ампера, записываемое в терминах функции $\Phi_0(q)=\Phi(q,\tau_0)$ — потенциала поля смещений $x_0(q)=\nabla_q\Phi_0(q)$:

$$\det(\partial^2\Phi_0(q)/\partial q_i\partial q_j)=1/\rho_0(\nabla_q\Phi_0(q)). \tag{24}$$

На больших космологических масштабах Лагранжево отображение $x_0(q)$ свободно от т. н. *многопотоковости* (присутствия нескольких потоков скрытого вещества с разными скоростями в одной и той же точке пространства). При отсутствии многопотоковости потенциал $\Phi_0(q)$ является выпуклым: действительно, функция $\Phi(q,\tau)=|q|^2+\tau\Phi_0(q)$ выпукла при $\tau=0$ и остается такой при $\tau > 0$, если не возникает многопотоковости. Поэтому преобразование Лежандра $\Psi_0(x) = \max_q(q \cdot x - \Phi_0(q))$, где максимум достигается в такой точке q, что $x = \nabla_q \Phi_0(q)$, преобразует уравнение (24) к более простому виду

$$\det(\partial^2 \Psi_0(x)/\partial x_i \partial x_j) = \rho_0(x). \tag{25}$$

Метод МАК (Монж, Ампер, Канторович), предложенный в [5], состоит в решении этих задач относительно $x_0(q)$ и использовании уравнения

$$v(x(q,\tau),\tau) = \partial_\tau x(q,\tau)$$

для приближенного восстановления современного поля пекулярных скоростей $v(x, \tau_0)$. На рис. 1 представлены результаты тестирования метода МАК на данных прямого численного моделирования космологической эволюции, в котором было задействовано примерно $2 \cdot 10^6$ частиц [36].

Результаты гл. 5 опубликованы в работах [5–7, 10, 12, 14].

В **Заключении** дана общая характеристика полученных в диссертации результатов в их взаимосвязи, обосновано научное единство и завершенность диссертационного исследования и обсуждаются направления его дальнейшего развития.

Список публикаций диссертанта

1. *Соболевский А. Н.* Метод малой вязкости для одномерной системы уравнений типа газовой динамики без давления // *Доклады РАН.* 1997. Т. 356, № 3. С. 310–312.

2. *Соболевский А. Н.* О периодических решениях уравнения Гамильтона–Якоби с периодической силой // *Успехи мат. наук*. 1998. Т. 53, № 6(324). С. 265–266.

36 Mohayaee R., Mathis H., Colombi S., Silk J. Reconstruction of primordial density fields // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. 2006. — January. Vol. 365, no. 3. Pp. 939–959.

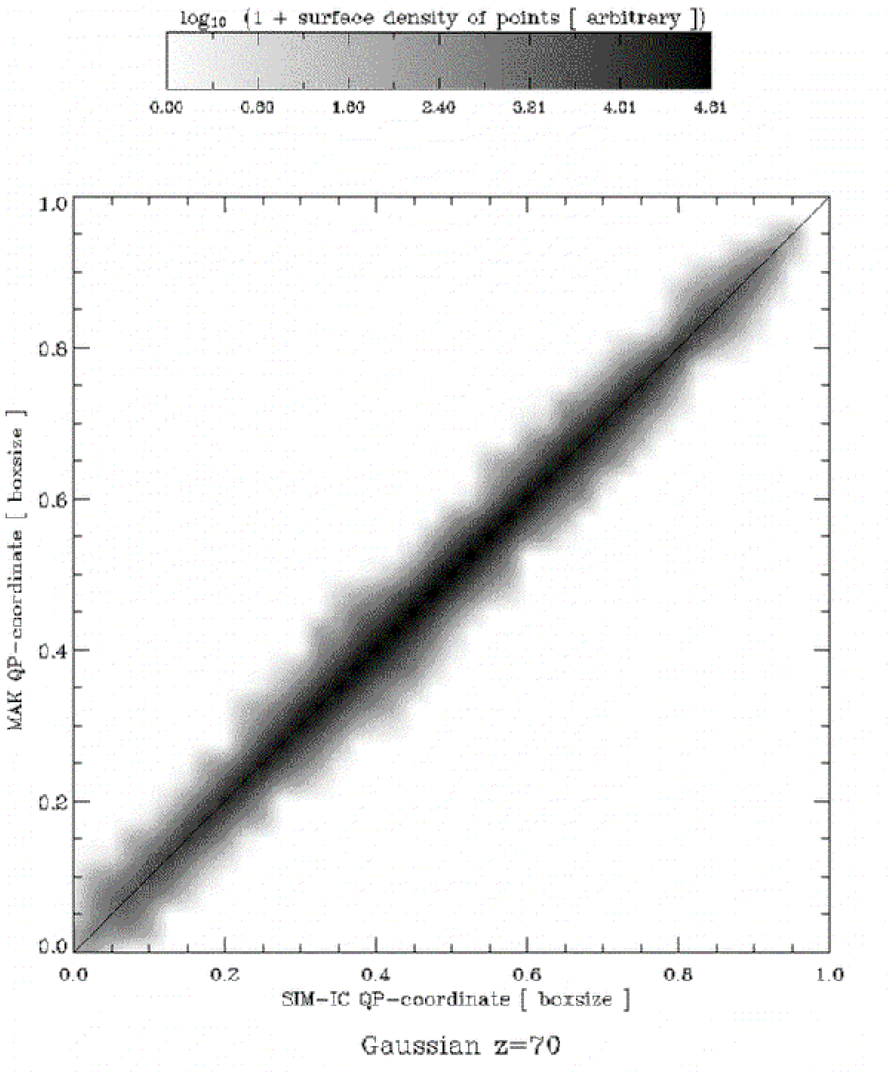

Рис. 1. Сопоставление начальных положений частиц, реконструированных по методу МАК, и их истинных начальных положение по выборке из данных прямого численного моделирования космологической эволюции для 128^3 частиц в кубической ячейке со стороной $200\,h^{-1}$ Mpc. Идеальная реконструкция соответствовала бы диагонали. Используется «квазипериодическая» координатная проекция $\tilde{q} = (q_1 + q_2\sqrt{2} + q_3\sqrt{3})/(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3})$, где значения координат q_i отнормированы на интервал $[0, 1]$. Такая квазипериодическая проекция отображает регулярную кубическую решетку в единичном кубе на единичный отрезок, причем образы никаких двух различных точек решетки не совпадают (см. подробнее [5]). Градациями серого показан десятичный логарифм локальной плотности точек, увеличенной на 1; разрешение по квазипериодической координате составляет $\frac{1}{256}$, расстояние между соседними точками кубической решетки — $\frac{1}{128}$.

3. *Соболевский А. Н.* Периодические решения уравнения Гамильтона–Якоби с периодической неоднородностью и теория Обри–Мезера // *Матем. сб.* 1999. Т. 190, № 10. С. 87–104.

4. *Sobolevskiĭ A. N.* Aubry–Mather theory and idempotent eigenfunctions of Bellman operator // *Commun. Contemp. Math.* 1999. Vol. 1, no. 4. Pp. 517–533.

5. *Frisch U., Matarrese S., Mohayaee R., Sobolevski A.* A reconstruction of the initial conditions of the Universe by optimal mass transportation // *Nature*. 2002. Vol. 417. Pp. 260–262.

6. *Brenier Y., Frisch U., Hénon M. et al.* Reconstruction of the early Universe as a convex optimization problem // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. 2003. — December. Vol. 346, no. 2. Pp. 501–524.

7. *Mohayaee R., Frisch U., Matarrese S., Sobolevskii A.* Back to the primordial Universe by a Monge–Ampère–Kantorovich optimization scheme // *Astronomy & Astrophysics*. 2003. Vol. 406. Pp. 393–401.

8. *Khanin K., Khmelev D., Sobolevskiĭ A.* On the velocities of Lagrangian minimizers // *Mosc. Math. J.* 2005. Vol. 5, no. 1. Pp. 157–169.

9. *Андриевский А. А., Гурбатов С. Н., Соболевский А. Н.* Баллистическая агрегация в симметричных и несимметричных течениях // *ЖЭТФ*. 2007. Т. 131, № 6. С. 1018–1029.

10. *Курносов А. А., Соболевский А. Н.* Вариационный подход к восстановлению пекулярных скоростей галактик // *Вестник МГУ, сер. 3. Физика, астрономия*. 2007. № 3. С. 18–21.

11. *Delon J., Salomon J., Sobolevski A.* Fast Transport Optimization for Monge Costs on the Circle // *SIAM Journal on Applied Mathematics*. 2010. Vol. 70, no. 7. Pp. 2239–2258.

12. *Соболевский А. Н., Фриш У.* Применение теории оптимального транспорта к реконструкции ранней Вселенной // Теория представлений, динамические системы. XI. *Записки научных семинаров ПОМИ.* Т. 312. СПб: ПОМИ РАН, 2004. С. 303–309.

13. *Khanin K., Khmelev D., Sobolevskiĭ A.* A blow-up phenomenon in the Hamilton-Jacobi equation in an unbounded domain // Idempotent Mathematics and Mathematical Physics / Ed. by G. L. Litvinov, V. P. Maslov; Erwin Schrödinger Institute. *Contemporary Mathematics.* Vol. 377. Providence, RI: American Mathematical Society, 2005. Pp. 161–179.

14. *Mohayaee R., Sobolevskii A.* The Monge–Ampère–Kantorovich approach to reconstruction in cosmology // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. 2008. Vol. 237, no. 14–17. Pp. 2145–2150.

15. *Khanin K., Sobolevski A.* Particle dynamics inside shocks in Hamilton–Jacobi equations // *Phil. Trans. R. Soc. A*. 2010. Vol. 168, no. 1916. Pp. 1579–1593.

Научное издание

Соболевский Андрей Николаевич

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

доктора физико-математических наук на тему:

Динамика и сингулярности в моделях инерционного переноса масс

Подписано в печать ??.02.2013.

Формат 60×90 $1/16$. Объем 2,0 п.л. Тираж 150 экз. Заказ ???.

[Название и адрес типографии]