

УДК 551.466

## НЕЛИНЕЙНЫЙ МЕХАНИЗМ ФОРМИРОВАНИЯ ЦУНАМИ В ОКЕАНЕ В ПРИБЛИЖЕНИИ СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

**М. А. Носов, С. В. Колесов**

(кафедра физики моря и вод суши)

E-mail: nosov@phys.msu.ru

**Излагаются результаты математического моделирования механизма образования цунами за счет нелинейной передачи энергии от «высокочастотных» упругих колебаний водного слоя, вызванных деформациями дна, к «низкочастотным» поверхностным гравитационным волнам. Проводится сравнительный анализ эффективности генерации цунами поршневым и нелинейным механизмами.**

### Введение

Волны цунами — самый известный эффект воздействия сейсмических движений дна на океан. Существующее ныне представление о генерации цунами землетрясением как о простом вытеснении воды в результате остаточных деформаций дна является по крайней мере неполным, хотя эффект вытеснения, вероятно, преобладает в большинстве случаев. В работах [1–3] нами было показано, что для адекватного описания процессов в океане над очагом подводного землетрясения, как правило, необходим учет сжимаемости воды. Свойство сжимаемости воды проявляется в том, что в результате землетрясения возникают не только гравитационные волны (цунами), но и упругие колебания водного слоя с инфразвуковыми частотами. В отличие от гравитационных волн упругие колебания не проникают на мелководье [4] и поэтому не могут прямо отразиться на амплитуде волны цунами на побережье. Но дополнительный вклад в амплитуду цунами упругие колебания все же могут обеспечить путем нелинейной передачи энергии от «высокочастотных» колебаний к «низкочастотным» гравитационным волнам. Такой механизм образования цунами впервые рассматривался в работе [5], которая вплоть до появления наших исследований [6, 7] оставалась единственной по данной тематике. Основной целью настоящей работы является сравнительный анализ эффективности действия поршневого и нелинейного механизмов генерации цунами.

### Математическая модель

В основе математической модели нелинейного механизма формирования цунами лежит предположение о том, что водный слой участвует в двух движениях: медленном (среднем) и быстром (колебательном), т. е. скорость течения, давление и плотность представимы в виде сумм:

$$\mathbf{v} = \langle \mathbf{v} \rangle + \mathbf{v}, \quad p = \langle p \rangle + p', \quad \rho = \langle \rho \rangle + \rho'. \quad (1)$$

Подставим формулы (1) в систему уравнений Эйлера и выполним операцию осреднения по периоду «быст-

рых» колебаний  $4H_{\max}/c$ , где  $H_{\max}$  — максимальная глубина бассейна,  $c$  — скорость звука в воде. Известно, что акустические моды с периодом большим, чем  $4H_{\max}/c$ , не существуют, следовательно, среднее движение можно описывать как движение несжимаемой жидкости. Пренебрегая квадратичным по средней скорости членом  $(\langle \mathbf{v} \rangle, \nabla) \langle \mathbf{v} \rangle$ , приходим к линеаризованной системе уравнений для среднего движения:

$$\frac{\partial \langle \mathbf{v} \rangle}{\partial t} = -\frac{\nabla \langle p \rangle}{\langle \rho \rangle} + g + \Phi, \quad (2)$$

$$\operatorname{div}(\langle \mathbf{v} \rangle) = s, \quad (3)$$

$$\Phi = -\langle (\mathbf{v}' \nabla) \mathbf{v}' \rangle + 0.5 \langle \nabla p'^2 \rangle c^{-2} \langle \rho \rangle^{-2}, \quad (4)$$

$$s = -c^{-2} \langle \rho \rangle^{-1} \operatorname{div} \langle p' \mathbf{v}' \rangle. \quad (5)$$

При получении формул (4), (5) использована связь  $p' = c^2 \rho'$ . От обычных линеаризованных уравнений Эйлера для несжимаемой жидкости выражения (2), (3) отличаются наличием двух новых членов  $\Phi$  и  $s$ , которые могут быть интерпретированы как силовое поле и распределенный источник массы. Своим происхождением новые члены обязаны нелинейности исходной системы (уравнений Эйлера). Совместное действие силового поля и распределенного источника массы способно привести к образованию гравитационных волн.

Далее для простоты будем рассматривать плоскую задачу. Начало системы координат расположим на невозмущенной свободной поверхности воды, ось  $x$  направим горизонтально, ось  $z$  — вертикально вверх. Глубину океана  $H$  будем считать постоянной. В рамках стандартных предположений линейной теории длинных волн система (2), (3) сводится к неоднородному волновому уравнению относительно смещения свободной поверхности  $\xi$ :

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - \frac{1}{gH} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{1}{gH} Q(x, t), \quad (6)$$

$$Q(x, t) = \int_{-H}^0 dz \left[ \frac{\partial \Phi_x}{\partial x} + \int_z^0 \frac{\partial^2 \Phi_z}{\partial x^2} dz - \frac{\partial s}{\partial t} \right],$$

где  $\Phi_x$  и  $\Phi_z$  — горизонтальная и вертикальная компоненты силового поля.

Для вычисления величин  $\Phi$  и  $s$  требуется знание полей скорости  $\mathbf{v}'$  и динамического давления  $p'$ , которые найдем, решив задачу о линейном отклике идеальной сжимаемой жидкости на малые деформации дна. Задачу будем решать в терминах потенциала скорости течения  $F$ :

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}, \quad (7)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = -g \frac{\partial F}{\partial z}, \quad z = 0, \quad (8)$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = U(x, t), \quad z = -H, \quad (9)$$

где  $g$  — ускорение силы тяжести,  $U(x, t)$  — вертикальная скорость деформации дна. Искомые поля выражаются через потенциал следующим образом:  $v' = \text{grad } F$ ,  $p' = -\rho \partial F / \partial t$ .

Задача (7)–(9) решалась в безразмерных переменных ( $x^* = x/H$ ,  $t^* = tc/H$ ) численно явным конечно-разностным методом [4]. Скорость деформации дна задавалась следующими модельными законами:

$$U_{\text{pist}}(x, t) = v_{\text{max}} \eta(x/L) \eta(t/\tau) \\ (\text{поршневая подвижка}),$$

$$U_{\text{osc}}(x, t) = v_{\text{max}} \eta(x/L) \sin(2\pi Nt/\tau) [\theta(t) - \theta(t - \tau)] \\ (\text{колебания дна}),$$

где  $\eta(\alpha) = 0.5(\text{th}[20(\alpha - 0.15)] - \text{th}[20(\alpha - 0.85)])$ ,  $v_{\text{max}}$  — максимальное значение скорости деформации,  $\theta(t)$  — функция Хевисайда,  $L$  — горизонтальная протяженность области деформации,  $\tau$  — продолжительность процесса деформации,  $N$  — число периодов колебаний (целое число). Вид функции  $\eta(\alpha)$  показан на рис. 1. В результате поршневой подвижки образовывались остаточные смещения дна, колебания дна завершались без остаточных смещений.

Для расчета гравитационных волн, возникающих под действием нелинейного механизма, использовалось уравнение (6), записанное в безразмерных

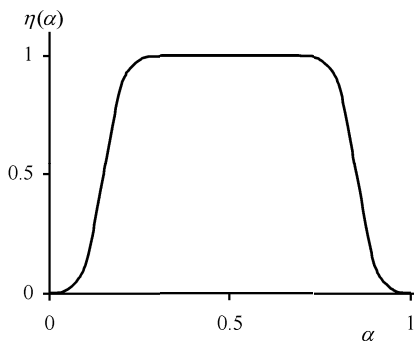


Рис. 1. Вид функции, определяющей пространственно-временной закон деформации дна

переменных ( $x^* = x/H$ ,  $t^{**} = t\sqrt{g/H}$ ,  $\xi^* = \xi g/v_{\text{max}}^2$ )

$$\frac{\partial^2 \xi^*}{\partial x^{*2}} - \frac{\partial^2 \xi^*}{\partial t^{**2}} = Q^*(x^*, t^{**}). \quad (10)$$

Уравнение (10) аппроксимировалось явной конечно-разностной схемой. На границах расчетной области реализовывалось условие свободного прохода

$$\frac{\partial \xi^*}{\partial t^{**}} = \mp \frac{\partial \xi^*}{\partial x^*}. \quad (11)$$

Так как поля  $\Phi$  и  $s$ , определяющие функцию  $Q^*$ , есть результат осреднения по промежутку времени  $\Delta t^* = 4$ , на выходе модели (7)–(9) имелся дискретный набор:  $Q^*(x^*, n\Delta t^*)$ , где  $n = 1, 2, 3, \dots$ . При переходе к решению задачи (10)–(11) шаг по пространству  $\Delta x^*$  оставался неизменным, а шаги по времени  $\Delta t^*$  и  $\Delta t^{**}$  приводились в соответствие следующим образом: в промежутке времени  $t^{**}$  от 0 до  $4\sqrt{gH}/c$  действовала функция  $Q^*(x^*, 4)$ , в промежутке от  $4\sqrt{gH}/c$  до  $8\sqrt{gH}/c$  —  $Q^*(x^*, 8)$  и т.д.

Основная часть численных экспериментов проводилась при значениях безразмерных параметров, соответствующих  $H = 4$  км,  $L = 20, 40$  и  $80$  км,  $0.26 < \tau < 26$  с. Шаг по вертикали составлял  $\Delta z = 20$  м. Шаг по горизонтали выбирался таким образом, чтобы на длину источника  $L$  приходилось 100 узлов ( $\Delta x = 200, 400$  и  $800$  м). Шаг по времени определялся условием Куранта  $\Delta t < \Delta z/c$ . При расчетах использовался шаг  $\Delta t = 0.009$  с.

## Результаты и их обсуждение

На рис. 2 представлен типичный временной ход функции  $Q^*(x^*)$ , отражающей действие «нелинейного источника цунами». Наибольшие абсолютные значения  $Q^*(x^*)$  достигаются не сразу, а по прошествии некоторого времени (в рассматриваемом примере при  $t^* = 8$ ), после чего интенсивность «нелинейного источника» монотонно уменьшается, что объясняется уходом упругих волн из области, где произошла деформация дна. Важно отметить,

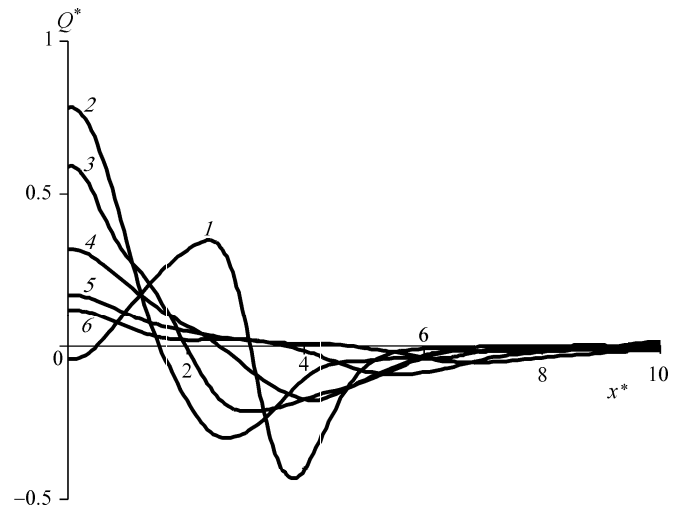


Рис. 2. Характерный вид функции  $Q^*(x^*, t^*)$ . Кривые 1–6 соответствуют  $t^* = 4, 8, 12, 16, 20, 24$ . Параметры источника:  $\tau = 8$  с,  $L = 40$  км,  $H = 4$  км

что время действия нелинейного источника заметно превосходит продолжительность подвижки дна.

На рис. 3 представлены типичные профили поверхностных волн, образованных «нелинейным источником». Действие этого источника приводит к «выталкиванию» воды из области очага, поэтому волны всегда начинаются с положительной фазы и заканчиваются отрицательной.

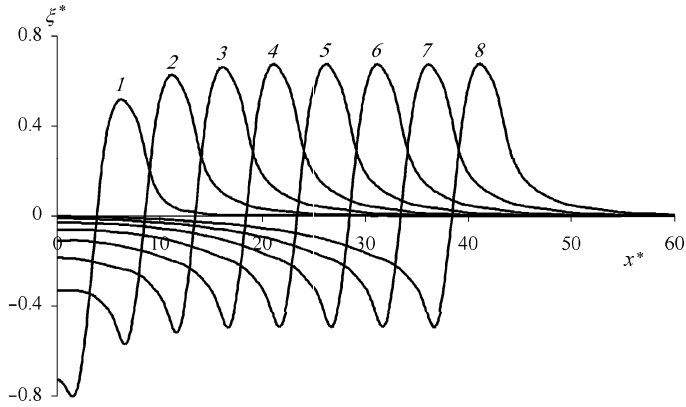


Рис.3. Профили гравитационных волн, образованных «нелинейным источником». Кривые 1–8 рассчитаны для последовательных моментов времени с интервалом 100 с. Параметры источника:  $\tau = 8$  с,  $L = 40$  км,  $H = 4$  км

По профилям сформировавшихся волн рассчитывались амплитуда

$$A_N = \frac{v_{\max}^2}{g} \left[ \max_{x^*}(\xi^*) - \min_{x^*}(\xi^*) \right] \equiv \frac{v_{\max}^2}{g} A^*(\tau^*, L^*) \quad (12)$$

и энергия

$$W_N = \rho H g^{-1} v_{\max}^4 \int_{-\infty}^{\infty} \xi^2 dx^* \equiv \rho H g^{-1} v_{\max}^4 W^*(\tau^*, L^*). \quad (13)$$

Результатом расчетов, выполнявшихся при различных продолжительностях поршневой подвижки  $\tau^*$  и размерах источника  $L^*$  ( $\tau^* = \tau c/H$ ,  $L^* = L/H$ ), стали безразмерные функции безразмерных аргументов  $A^*(\tau^*, L^*)$  и  $W^*(\tau^*, L^*)$ .

Нелинейные эффекты, очевидно, могут обеспечить заметный вклад в волну цунами только при достаточно больших скоростях деформации дна, что эквивалентно малым продолжительностям подвижки. Поэтому в расчетах мы ограничились диапазоном  $\tau < 8H/c$ . С точки зрения традиционных представлений такая подвижка может рассматриваться как мгновенная ( $\tau = 8H/c \ll L/\sqrt{gH}$ ); при мгновенной подвижке на поверхности воды формируется начальное возвышение, повторяющее форму остаточных деформаций дна. Эволюция этого возвышения и порождает волны цунами в их классическом понимании. Такой механизм генерации цунами будем называть линейным. Амплитуда цунами, сформированных линейным механизмом, может быть оценена

как амплитуда остаточных деформаций дна

$$A_L \approx \eta_0 = v_{\max} \tau C_1, \quad C_1 = \int_0^1 \eta(\alpha) d\alpha \approx 0.7, \quad (14)$$

а энергия — как потенциальная энергия начального возвышения

$$W_L \approx \frac{\rho g}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \xi^2(x, \tau) dx = \rho g v_{\max}^2 \tau^2 L \frac{C_1^2 C_2}{2}, \quad (15)$$

$$C_2 = \int_0^1 \eta^2(\alpha) d\alpha \approx 0.65.$$

Используя формулы (12)–(15), получаем соотношения, позволяющие рассчитать относительную величину вкладов нелинейного и линейного механизмов в амплитуду и энергию волн цунами:

$$\frac{A_N}{A_L} = \left( \frac{\eta_0 c^2}{g H^2} \right) \frac{A^*(\tau^*, L^*)}{C_1^2 \tau^{*2}}, \quad (16)$$

$$\frac{W_N}{W_L} = \left( \frac{\eta_0 c^2}{g H^2} \right)^2 \frac{2W^*(\tau^*, L^*)}{C_1^4 C_2 \tau^{*4} L^*}, \quad (17)$$

где  $\eta_0$  — амплитуда вертикальной деформации дна. Из формул (16) и (17) видно, что величины  $A_N/A_L$  и  $W_N/W_L$  во многом определяются безразмерной комбинацией  $\eta_0 c^2 g^{-1} H^{-2}$ .

На рис. 4 и 5 представлены зависимости величин  $A_N/A_L$  и  $W_N/W_L$  от продолжительности поршневой подвижки. Расчет выполнен для трех различных соотношений размера источника и глубины океана. Немонотонность кривых при  $\tau^* > 1$  связана с модовой структурой упругих колебаний водного слоя (минимальная нормальная частота соответствует  $\tau^* = 4$ ). При  $\tau^* < 1$  исследуемые зависимости ведут себя приблизительно как степенные функции  $\tau^{*-1}$  и  $\tau^{*-2}$ . Увеличение горизонтальных размеров источника приводит к незначительному увеличению роли нелинейного механизма.

Воспользовавшись данными, представленными на рис. 4 и 5, легко сделать следующие оценки. При глубине океана 1.5 км, продолжительности и амплитуде подвижки 1 с и 1 м соответственно, вклад нелинейного механизма в амплитуду цунами будет на уровне 10%, а в энергию — на уровне 1%. Доля нелинейного механизма может и возрасти при увеличении амплитуды смещения дна или уменьшении продолжительности подвижки, но, скорее всего, при поршневой подвижке линейный механизм останется преобладающим.

Нелинейный механизм может обеспечить существенный вклад в амплитуду волны цунами при колебаниях дна с одной из нормальных частот  $\nu_k = c(1 + 2k)/4H$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$  (резонансная накачка энергии). С точки зрения линейной теории, колебания дна без остаточных смещений с частотами  $\nu > \sqrt{g/H}$  не образуют гравитационных волн [8].

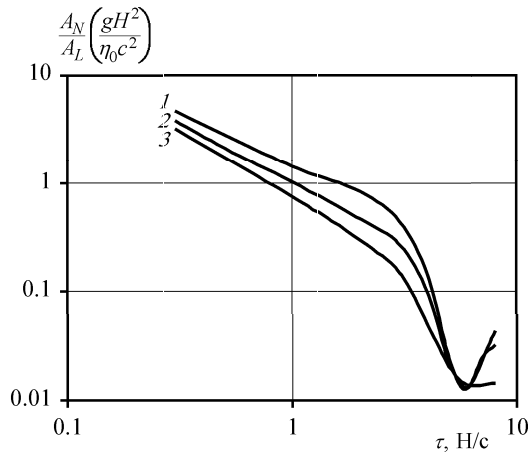


Рис. 4. Отношение амплитуд волн цунами, сформированных нелинейным ( $A_N$ ) и линейным ( $A_L$ ) механизмами, в зависимости от продолжительности подвижки. Кривые 1–3 построены для  $L/H = 20, 10$  и  $5$

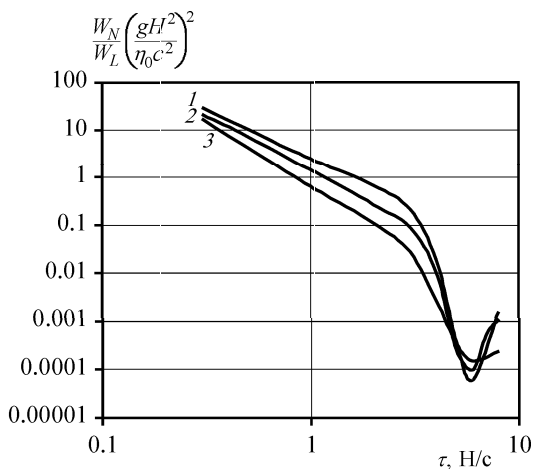


Рис. 5. Отношение энергий волн цунами, сформированных нелинейным ( $W_N$ ) и линейным ( $W_L$ ) механизмами, в зависимости от продолжительности подвижки. Кривые 1–3 построены для  $L/H = 20, 10$  и  $5$

Для условий планеты Земля  $\nu_k > \sqrt{g/H}$ , следовательно, при колебаниях дна с частотами  $\nu_k$ , цунами может возникнуть только благодаря нелинейному механизму.

Расчеты, выполненные при  $U(x, t) = U_{\text{osc}}(x, t)$ , показали следующее. Если участок дна размером  $L = 40$  км при глубине  $H = 4$  км совершает  $N = 10$  колебаний с частотой  $\nu_0 = c/4H \approx 0.094$  Гц и амплитудой  $0.3$  м, то нелинейный механизм образует цунами амплитудой  $\sim 0.5$  м. При аналогичных условиях, но большей частоте  $\nu_3 = 7c/4H \approx 0.65$  Гц, амплитуда цунами уже составит  $\sim 1.2$  м. Если частота колебаний дна заметно отличается от нормальной, то эффективность нелинейного механизма значительно уменьшается. Так, например, при  $\nu = 0.55$  Гц ( $\nu_2 < \nu < \nu_3$ ) амплитуда цунами составит всего порядка  $6$  см.

В заключение отметим, что частоты сейсмических колебаний дна, как правило, лежат в диапазоне нескольких первых нормальных частот водного слоя  $\nu_k$ , что создает благоприятные условия для реализации нелинейного механизма генерации цунами.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 04-05-64297).

#### Литература

1. Носов М.А. // Вулканология и сейсмология. 1998. № 6. С. 116.
2. Носов М.А. // Изв. РАН, ФАО. 2000. **36**, № 5. С. 718.
3. Nosov M.A. // Phys. Chem. Earth (B). 1999. **24**, N 5. P. 437.
4. Nosov M.A., Kolesov S.V. Submarine Landslides and Tsunamis. 2003. P. 129.
5. Новикова Л.Е., Островский Л.А. // Океанология. 1982. **22**, № 5. С. 693.
6. Носов М.А., Скачко С.Н. // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2001. № 1. С. 44 (Moscow University Phys. Bull. 2001. N 1. P. 48).
7. Nosov M.A., Kolesov S.V. Local tsunami warning and mitigation, proceedings. M., 2002. P. 107.
8. Носов М.А. // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1992. **33**, № 1. С. 109.

Поступила в редакцию  
07.05.04