РАДИОФИЗИКА

УДК 519.246; 524

ОЦЕНКА ПАРАМЕТРОВ ГРАВИТАЦИОННОГО ИМПУЛЬСА СО СЛУЧАЙНОЙ НАЧАЛЬНОЙ ФАЗОЙ В РЕЖИМЕ «БЫСТРОЙ ФИЛЬТРАЦИИ»

А. В. Гусев

(*ГАИШ*)

E-mail: avg@sai.msu.ru

В работе для криогенных резонансных гравитационных антенн, работающих в режиме «Fast filtering» («быстрой фильтрации»), рассчитаны дисперсии ошибок при совместном измерении амплитуды и момента возникновения широкополосных гравитационных импульсов со случайной начальной фазой. Показано, что максимальная разрешающая способность антенны достигается при введении в состав приемника «детектора огибающей», основанного на преобразовании Гильберта.

1. При обобщенном анализе чувствительности современные криогенные резонансные гравитационные антенны (РГА) рассматриваются как линейные стационарные системы с двумя степенями свободы. Информация о физических процессах в РГА наиболее полно сохраняется при когерентной обработке [1] информации в режиме «Fast filtering» («быстрой фильтрации») [2]. В этом режиме полезный сигнал на выходе преобразователя частоты представляет собой смесь двух квазигармонических сигналов с сильно разнесенными резонансными частотами, но имеющих одинаковую начальную фазу [2, 3]. При синтезе оптимального по критерию максимального правдоподобия алгоритма обнаружения отдельных гравитационных импульсов (ГИ) подобная «тонкая структура» полезного сигнала учитывается путем применения преобразования Гильберта [4] для формирования огибающей низкочастотного случайного процесса на выходе оптимального фильтра.

Решение «сигнал есть» позволяет перейти к следующей практически важной задаче — оценке неизвестных параметров ГИ. В настоящей статье рассчитаны дисперсии максимально-правдоподобных оценок неизвестных амплитуды и момента возникновения (временного положения) ГИ со случайной начальной фазой при когерентной обработке информации в режиме «Fast filtering». Аддитивная помеха предполагается гауссовой. Дисперсия оценки временного положения ГИ определяет верхнюю границу разрешающей способности схемы совпадений при обнаружении ГИ с помощью двух пространственно разнесенных РГА «Explorer-Nautilus» [5].

2. Схема первичной когерентной обработки информации в режиме «Fast filtering» определяется следующим выражением [2]:

$$x(t) \to \text{ПЧ} \to \text{ОФ} \to y(t),$$

где $x(t)$ — случайный узкополосный процесс на выходе РГА, ПЧ — преобразователь частоты, $y(t)$ — случайный низкочастотный ($0 \leqslant f \leqslant 30$ Гц) процесс на выходе оптимального фильтра (ОФ). Информация о поведении случайного процесса $y(t)$ сохраняется в банке данных РГА.

Пусть $\lambda = (0,1)$ — параметр обнаружения. Тогда случайный низкочастотный процесс $y(t)$ можно рассматривать как смесь

$$y(t) = \lambda s(t, \mathbf{l}) + n(t)$$

полезного «гравитационного» сигнала $s(t,\mathbf{l})$ и аддитивной гауссовой помехи $n(t)$. Полезный сигнал $s(t,\mathbf{l})$ зависит от векторного параметра $\mathbf{l} = (l_1 = a, l_2 = \tau, \ l_3 = \varphi)^\top$, где a, τ, φ — амплитуда, момент возникновения и начальная фаза широкополосного ГИ на входе РГА.

При обобщенном анализе помехозащищенности РГА в режиме «Fast filtering» случайный процесс $y(t)$ целесообразно рассматривать как действительную часть аналитического случайного процесса

$$z(t) = \lambda s_z(t, \mathbf{l}) + n_z(t) = R(t) \exp\{j\Psi(t)\},$$

где $R(t)$, $\Psi(t)$ — огибающая и фаза. Функция корреляции $B_z(t_2 - t_1)$ комплексного гауссова случайного процесса $n_z(t)$ определяется следующим выражением:

$$B_z(t_2 - t_1) = \langle n_z^*(t_1) n_z(t_2) \rangle = 2\tilde{B}(t_2 - t_1), \qquad (1)$$

где $\langle \cdot \rangle$ — символическая форма записи оператора статистического усреднения

$$\tilde{B}(t_2 - t_1) = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^\infty N(\omega) \exp\{j\omega(t_2 - t_1)\}\, d\omega, \qquad (2)$$

$N(\omega)$ — спектральная плотность аддитивной гауссовой помехи $n(t)$.

Форма полезного сигнала на выходе преобразователя частоты ПЧ приведена в работе [3]. Поэтому, учитывая свойства оптимальных систем [1], из (1) и (2), имеем:

$$s_z(t,\mathbf{l}) = a\exp\{j\vartheta(\varphi,\tau)\}\,\tilde{B}(t-\tau), \quad \vartheta(\varphi,\tau) = \varphi - \bar{\omega}\tau, \tag{3}$$

где $\bar{\omega}$ — «частота гетеродина», определяемая параметрами преобразователя частоты ПЧ (для РГА «Explorer» [2] $\bar{f} = (\bar{\omega}/2\pi) \approx 900$ Гц при $f_1 = (\omega_1/2\pi) \approx 904.7$ Гц и $f_2 = (\omega_2/2\pi) \approx 921.3$ Гц).

Функционал условного отношения правдоподобия $\Lambda[y|\mathbf{l}]$ при обнаружении отдельных ГИ на фоне гауссовой аддитивной помехи определяется следующим выражением [3]:

$$\Lambda[y|\mathbf{l}] = \Lambda[y|a,\tau,\varphi] = \\ = \exp\left\{a\,\mathrm{Re}\left[z(\tau)e^{-j\vartheta(\varphi,\tau)}\right] - \frac{a^2\sigma^2}{2}\right\},$$

$\sigma^2 = \tilde{B}(0)$ — дисперсия аддитивной помехи $n(t)$ на выходе оптимального фильтра. Начальная фаза φ неизвестна и может рассматриваться как случайная величина, равномерно распределенная на интервале $(-\pi,\pi)$. При подобном байесовском подходе имеем

$$\Lambda[y|a,\tau] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Lambda[a,\tau,\varphi]\,d\varphi = \\ = \exp\left\{-\frac{a^2\sigma^2}{2}\right\} I_0\left[aR(\tau)\right], \tag{4}$$

где $I_m(\cdot)$ — модифицированная функция Бесселя m-го порядка.

3. Элементы информационной матрицы $\mathbf{I} = [I_{ij}]$ Фишера определяются следующим выражением [1, 6]:

$$I_{ij} = \left\langle\left[\frac{\partial}{\partial l_i}\ln\Lambda[y|a,\tau]\frac{\partial}{\partial l_j}\ln\Lambda[y|a,\tau]\right]\right\rangle = \\ = -\left\langle\frac{\partial^2}{\partial l_i\partial l_j}\ln\Lambda[y|a,\tau]\right\rangle, \tag{5}$$

где $l_1 = a$, $l_2 = \tau$ (см. выше); $i,j = 1,2$.

Принимая во внимание (4), имеем

$$\frac{\partial\ln\Lambda[y|a,\tau]}{\partial l_i} = -\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial a^2}{\partial l_i} + \left(\frac{I_1[aR(\tau)]}{I_0[aR(\tau)]}\right)\frac{\partial[aR(\tau)]}{\partial l_i}.$$

При больших отношениях сигнал–шум $I_0[aR(\tau)] \approx I_1[aR(\tau)]$ и, следовательно,

$$\frac{\partial\ln\Lambda[y|a,\tau]}{\partial l_i} \approx -\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial a^2}{\partial l_i} + \frac{\partial[aR(\tau)]}{\partial l_i}. \tag{6}$$

Из (5) и (6) находим элементы информационной матрицы Фишера:

$$I_{ij} \approx \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 a^2}{\partial l_i l_j} - \frac{\partial^2[a\langle R(\tau)\rangle]}{\partial l_1\partial l_2} \approx \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 a^2}{\partial l_i l_j} - \frac{\partial^2[aR_s(\tau)]}{\partial l_1\partial l_2}, \tag{7}$$

где $R_s(t) = |s_z(t,\mathbf{l})|$ — огибающая полезного сигнала $s(t,\mathbf{l})$ на выходе оптимального фильтра ОФ (при больших отношениях сигнал–шум $\langle R(\tau)\rangle \approx R_s(\tau)$ [7]).

Можно показать [1, 6], что максимально-правдоподобные оценки $\hat{a}$ и $\hat{\tau}$ неизвестных амплитуды a и временного положения τ отдельного ГИ являются асимптотически эффективными и несмещенными. Поэтому при большом отношении сигнал–шум для вычисления дисперсий этих оценок можно воспользоваться неравенством Рао–Крамера [1, 6]. При таком подходе дисперсии $\sigma_{11}^2 = \sigma_a^2$ и $\sigma_{22}^2 = \sigma_\tau^2$ максимально-правдоподобных оценок неизвестных параметров a и τ равны диагональным элементам матрицы $\mathbf{I}^{-1}$, обратной информационной матрице Фишера [1, 6]:

$$\sigma_{ii}^2 = \frac{A_{ii}}{\det[\mathbf{I}]}, \quad i = 1,2, \tag{8}$$

где A_{ij} и $\det[\mathbf{I}]$ — алгебраическое дополнение элемента I_{ij} и определитель информационной матрицы.

4. Учитывая выражение (3), находим огибающую $R_s(t)$ сигнала $s(t,\mathbf{l})$ в режиме «Fast filtering»:

$$R_s(\tau) = |s_z(t,\mathbf{l})| = a|\tilde{B}(\tau-\tau_0)|, \\ |\tilde{B}(\tau-\tau_0)| = \sqrt{B_c^2(\tau-\tau_0) + B_s^2(\tau-\tau_0)}, \tag{9}$$

где τ_0 — истинное значение неизвестного параметра τ,

$$B_c(\tau) = \mathrm{Re}\,\tilde{B}(\tau) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty N(\omega)\cos\omega\tau\,d\omega, \\ B_s(\tau) = \mathrm{Im}\,\tilde{B}(\tau) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty N(\omega)\sin\omega\tau\,d\omega. \tag{10}$$

Принимая во внимание (9) и (10), имеем:

$$R_s'(\tau_0) = 0, \quad R_s''(\tau_0) = \frac{a}{\sigma^2}\left[\sigma^2 B_c''(0) + B_s'^2(0)\right], \\ B_c''(0) = -\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\omega^2 N(\omega)\,d\omega, \quad B_s'(0) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty\omega N(\omega)\,d\omega. \tag{11}$$

В режиме «Fast filtering» аддитивная помеха $n(t)$ на выходе оптимального фильтра ОФ представляет собой [2, 3] суперпозицию

$$n(t) = n_1(t) + n_2(t)$$

двух узкополосных гауссовых случайных процессов $n_{1,2}(t) = \mathrm{Re}\,[\tilde{n}_{1,2}(t)\exp\{j\Omega_{1,2}t\}]$ с резонансными частотами Ω_1 и Ω_2 (для РГА «Explorer» $(\Omega_1/2\pi) \approx 4.7$ Гц, $(\Omega_2/2\pi) \approx 21.3$ Гц). Расстройка $\Delta\Omega = \Omega_2 - \Omega_1$ существенно превосходит максимальные частоты в спектре комплексных огибающих $\tilde{n}_{1,2}(t)$ и, следовательно, взаимной корреляцией этих процессов можно пренебречь. Поэтому в режиме «Fast filtering» спектральная плотность $N(\omega)$ и дисперсия σ^2 аддитивной помехи $n(t)$ равны:

$$N(\omega) = N_1(\omega) + N_2(\omega), \quad \sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2, \tag{12}$$

где $N_{1,2}(\omega)$ и $\sigma_{1,2}^2$ — спектральные плотности и дисперсии гауссовых случайных процессов $n_{1,2}(t)$ соответственно.

Из (11) и (12) окончательно находим

$$R_s'(\tau_0) = 0, R_s''(\tau_0) \approx -a\frac{(\sigma_1\sigma_2)^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\Delta\Omega^2.$$

Следовательно, информационная матрица $\mathbf{I}$ (7) при больших отношениях сигнал–шум имеет следующий вид:

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2+\sigma_2^2 & 0 \\ 0 & a^2\dfrac{(\sigma_1\sigma_2)^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\Delta\Omega^2 \end{pmatrix}. \tag{13}$$

Из (8) и (13) находим дисперсии σ_a^2 и σ_τ^2 максимально-правдоподобных оценок $\hat{a}$ и $\hat{\tau}$ неизвестных амплитуды и временного положения одиночных ГИ со случайной начальной фазой при больших отношениях сигнал–шум:

$$\sigma_a^2 \approx \frac{1}{\sigma_1^2+\sigma_2^2} \approx \frac{a^2}{q^2},$$
$$\sigma_\tau^2 \approx \frac{1}{a^2}\left(\frac{1}{\sigma_1^2}+\frac{1}{\sigma_2^2}\right)\frac{1}{\Delta\Omega^2} = \frac{1}{q^2}\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2}+\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right)^2\frac{1}{\Delta\Omega^2}, \tag{14}$$

где $q = a\sigma \approx a\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}$ — отношение сигнал–шум, $q \gg 1$. При $\sigma_1 \approx \sigma_2$ $\sigma_\tau \approx (\sqrt{2}/q)\Delta\Omega^{-1}$.

Выводы

I. Оценка неизвестного момента возникновения широкополосного ГИ со случайной начальной фазой в режиме «Fast filtering» осуществляется по положению наибольшего значения (абсолютного максимума) огибающей $R(t)$ (или ее квадрата) низкочастотного случайного процесса $y(t)$ на интервале наблюдения $(0, T)$:

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T} R^2(t) = y^2(t) + \eta^2(t) = R^2(\hat{\tau}).$$

Случайные процессы $y(t)$ и $\eta(t)$ связаны между собой преобразованием Гильберта:

$$\eta(t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{y(t')}{t-t'}\,dt'.$$

Точность оценивания при больших отношениях сигнал–шум не зависит от полосы пропускания отдельного частотного канала, а определяется величиной расстройки $\Delta\Omega = (\Omega_2 - \Omega_1)$. Как и следовало ожидать [6], оценки энергетического (амплитуда a) и неэнергетического (момент возникновения τ) параметров оказываются некоррелированными.

II. Итальянская группа [2, 5] при вторичной обработке информации в режиме «Fast filtering» отказывается от формирования квадрата огибающей $R^2(t)$ и ограничивается более простой схемой:

$$y(t) \to y^2(t) \to \max_{0\leqslant t\leqslant T} y^2(t) = y^2(t_y), \tag{15}$$

где t_y — положение абсолютного максимума случайного процесса $y^2(t)$ при $0 \leqslant t \leqslant T$. В бигармоническом приближении, рассматривая случайный процесс $y(t)$ как смесь двух квазигармонических процессов с резонансными частотами Ω_1 и Ω_2, при $\Omega_1 \ll \Omega_2$ имеем:

$$t_y = \hat{\tau} + \xi\left(\frac{\pi}{\Omega_1}\right),$$

где ξ — случайная величина с равномерным распределением на интервале $(-1, 1)$. Следовательно, применение «итальянской» схемы (15) для обработки случайного процесса $y(t)$ сопровождается появлением дополнительной погрешности при оценивании неизвестного временного положения ГИ со случайной начальной фазой. Учитывая, что при больших отношениях сигнал–шум $\langle\hat{\tau}\rangle = \tau_0$ и $\langle\xi\rangle = 0$, можно рассматривать значение t_y как асимптотически несмещенную оценку неизвестного параметра τ, дисперсия которой определяется следующим выражением:

$$D_\tau = \sigma_\tau^2 + \left(\frac{\pi^2}{3\Omega_1^2}\right),$$

где σ_τ^2 — дисперсия максимально-правдоподобной оценки (14). В стандартной ситуации (большие отношения сигнал–шум и $\Omega_1 \ll \Omega_2$) отказ от формирования огибающей сопровождается значительным снижением разрешающей способности РГА при измерении временного положения ГИ со случайной начальной фазой. Например, для РГА «Explorer» [2] при $q \approx 5$, $\sigma_1 \approx \sigma_2$ и $(\Omega_1/2\pi) \approx 4.07$ Гц, $(\Omega_2/2\pi) \approx 21.3$ Гц ($\Delta\Omega/2\pi \approx 16.6$ Гц) $\sigma_\tau^2 \approx 2.7$ мс, $D_\tau \approx 70.9$ мс.

Литература

1. *Сосулин Ю.Г.* Теоретические основы радиолокации и радионавигации. М., 1992.
2. *Astone P., Buttiglione S., Frasca S.* et al. // Nuovo Cimento. 1998. **20C**, N 1. P. 9.
3. *Гусев А.В., Руденко В.Н.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2003. № 6. С. 38 (Moscow University Phys. Bull. 2003. N 6. P. 49).
4. *Гоноровский И.С.* Радиотехнические цепи и сигналы. М., 1984.
5. *Astone P., Babusci D., Bassan M.* et al. // Class. Quantum Grav. 2002. **19**. P. 5449.
6. *Куликов Е.И., Трифонов А.П.* Оценка параметров сигналов на фоне помех. М., 1978.
7. *Левин Б.Р.* Статистическая радиотехника. М., 1994.

Поступила в редакцию
31.05.04