

$$\begin{aligned} \mu_0 \frac{\partial^2 V^{n+1}}{\partial \xi_1^2} + (\nu_0 - \mu_0) \frac{\partial^2 U^{n+1}}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} + \nu_0 \frac{\partial^2 V^{n+1}}{\partial \xi_2^2} = \\ = -F^2(U^n, V^n), \quad n = 0, 1, \dots, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} F^1(U^n, V^n) &= \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left( \nu_1 + \nu_1 \frac{\partial U^n}{\partial \xi_1} + \lambda_1 \frac{\partial V^n}{\partial \xi_2} \right) + \\ &+ \frac{\partial}{\partial \xi_2} \left( \mu_1 \frac{\partial U^n}{\partial \xi_2} + \mu_1 \frac{\partial V^n}{\partial \xi_1} \right), \\ F^2(U^n, V^n) &= \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left( \mu_1 \frac{\partial V^n}{\partial \xi_1} + \mu_1 \frac{\partial U^n}{\partial \xi_2} \right) + \\ &+ \frac{\partial}{\partial \xi_2} \left( \lambda_1 + \lambda_1 \frac{\partial U^n}{\partial \xi_1} + \nu_1 \frac{\partial V^n}{\partial \xi_2} \right). \end{aligned}$$

Представим функции, входящие в (4), в виде интегралов Фурье:

$$\begin{aligned} U^n(\xi) &= \frac{1}{2\pi} \int u^n(\eta) e^{i\xi\eta} d\eta, \quad V^n(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int v^n(\eta) e^{i\xi\eta} d\eta, \\ \lambda_1(\xi) &= \frac{1}{2\pi} \int \Lambda(\eta) e^{i\xi\eta} d\eta, \quad \mu_1(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int M(\eta) e^{i\xi\eta} d\eta, \\ \nu_1(\xi) &= \frac{1}{2\pi} \int N(\eta) e^{i\xi\eta} d\eta, \quad F_\beta^n(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int f_\beta^n(\eta) e^{i\xi\eta} d\eta, \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} f_1^n(\eta) &= i\eta_1 (N + \{N; i\eta_1 u^n\} + \{\Lambda; i\eta_2 v^n\}) + \\ &+ i\eta_2 (\{M; i\eta_2 u^n\} + \{M; i\eta_1 v^n\}), \\ f_2^n(\eta) &= i\eta_1 (\{M; i\eta_1 v^n\} + \{M; i\eta_2 u^n\}) + \\ &+ i\eta_2 (\Lambda + \{\Lambda; i\eta_1 u^n\} + \{N; i\eta_2 v^n\}), \end{aligned}$$

## АКУСТИКА И МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА

УДК 534.222

### ВОЗБУЖДЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛН СФЕРОЙ, СОВЕРШАЮЩЕЙ КОЛЕБАНИЯ КОНЕЧНОЙ АМПЛИТУДЫ В ЛИНЕЙНО-ДЕФОРМИРУЕМОЙ СРЕДЕ

Ван Нин, О. В. Руденко

(кафедра акустики)

Проведены расчеты формы волнового профиля и спектрального состава волны, излучаемой в среду в результате осцилляций сферически-симметричной поверхности. Показано, что локальные искажения при переходе от колебательного движения сферы к волновому движению среды возникают вследствие граничной нелинейности.

Проблема описания волн, расходящихся от пульсирующей сферической поверхности, возникает во многих прикладных задачах. Так, в случае воздействия мощных ультразвуковых полей в среде рождаются кавитационные пузырьки, которые пульсируют с большой амплитудой и схлопываются; при этом излучается нелинейная волна, а давления достигают тысяч атмосфер [1]. Сильные изменения объема мо-

$$\{F(\eta); G(\eta)\} = \frac{1}{2\pi} \int F(\zeta)G(\eta - \zeta)d\zeta \quad (\text{свертка}).$$

После подстановки указанных преобразований в интегральные уравнения (4) находим, что образы Фурье  $u^{n+1}, v^{n+1}$  определяются из системы уравнений

$$(\nu_0 \eta_1^2 + \mu_0 \eta_2^2) u^{n+1} + (\nu_0 - \mu_0) \eta_1 \eta_2 v^{n+1} = f_1^n(\eta),$$

$$(\nu_0 - \mu_0) \eta_1 \eta_2 u^{n+1} + (\mu_0 \eta_1^2 + \nu_0 \eta_2^2) v^{n+1} = f_2^n(\eta)$$

с отличным от нуля определителем  $\mu_0 \nu_0 (\eta_1^2 + \eta_2^2)$ .

Затем функции  $U^{n+1}(\xi), V^{n+1}(\xi)$  находятся по формулам (5).

Сходным образом исследуются физические процессы в трехмерных мелкодисперсных непериодических средах.

#### Литература

1. Бахвалов Н.С., Панасенко Г.П. Осреднение процессов в периодических средах. М.: Наука, 1984.
2. Медведев Г.Н., Моргунов Б.И. // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1998. № 6. С. 47 (Moscow University Phys. Bull. 1998. No. 6. P. 54).
3. Князев А.Б., Медведев Г.Н., Моргунов Б.И. // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1999. № 4. С. 57 (Moscow University Phys. Bull. 1999. No. 4. P. 74).
4. Моргунов Б.И. Математический анализ физико-механических процессов. М.: Изд-во МГИЭМ, 1995.

Поступила в редакцию  
22.10.99

гут происходить в результате колебаний полостей, образованных в результате подводного взрыва [2] или лазерного пробоя в жидкости [3].

В ситуациях, когда изменение радиуса сферы  $R(t)$  нельзя считать малым по сравнению с его исходным или характерным средним значением  $R_0$ , наряду с обычными нелинейными эффектами, накапливающимися по мере распространения волны в сре-

де [4], необходимо учитывать «геометрическую нелинейность» граничных условий [5, 6]. Ее проявление локально, и оно заключается в том, что форма и спектр двух движений — колебательного и волнового — оказываются различными. В результате такой нелинейности наблюдается заметное усиление шумовой компоненты поля при слабом воздействии шума на излучатель [7], нелинейное ограничение вынужденных колебаний в резонаторе [8] и другие явления.

Как известно, сферические волны акустического давления  $p$  и скорости  $u$  описываются различными уравнениями:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) p = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} p, \quad \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \right) u = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} u. \quad (1)$$

Связь между этими величинами дается выражением

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial r} = 0.$$

Здесь  $c$  и  $\rho$  — равновесные значения скорости звука и плотности среды. Решение уравнений (1) для волны, убегающей от центра, запишем в виде

$$\begin{aligned} \frac{p}{c^2 \rho} &= \frac{R_0}{r} \frac{\partial}{\partial t} Q \left( t - \frac{r - R_0}{c} \right), \\ \frac{u}{c} &= -c R_0 \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{1}{r} Q \left( t - \frac{r - R_0}{c} \right) \right]. \end{aligned} \quad (2)$$

Заметим, что нас интересуют характеристики  $p$ -волны, которые обычно измеряются в эксперименте, однако для нахождения неизвестной функции  $Q$  необходимо воспользоваться решением (2) для  $u$ -волны. Скорость колебания поверхности  $r = R(t)$  должна совпадать со скоростью движения находящихся на ней частиц среды, поэтому

$$u(r = R(t), t) = \frac{dR}{dt}. \quad (3)$$

Используя вторую из формул (2), запишем граничное условие (3) в параметрическом виде:

$$\frac{dQ}{dt} + \frac{c}{R(\xi)} Q(t) = \frac{1}{c R_0} R(\xi) \frac{dR}{d\xi}, \quad t = \xi - \frac{1}{c} [R(\xi) - R_0]. \quad (4)$$

Зная закон движения поверхности  $r = R(t)$ , можно решить (4) относительно  $dQ/dt$  и найти тем самым форму сферически расходящейся  $p$ -волны (2).

Пусть радиус сферы, излучающей акустическую волну, осциллирует по закону

$$R = R_0(1 - m \cos \omega_0 t). \quad (5)$$

Известное решение линеаризованной задачи (4) имеет вид

$$\frac{dQ}{dt} = m \frac{k_0^2 R_0^2}{\sqrt{1 + k_0^2 R_0^2}} \sin \left( \omega_0 t + \arctg \frac{1}{k_0 R_0} \right), \quad (6)$$

где  $k_0 = \omega_0/c$ . Излучение наиболее эффективно при  $k_0 R_0 \gg 0$ ; именно в этом случае задачу (4) удастся решить и в нелинейной постановке.

Найдем вначале спектральный состав волны. Действуя по аналогии с задачами о нелинейном излучении плоским поршнем [6, 7], выразим фурье-образ  $p$ -волны (4) через следующий интеграл:

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dQ}{dt} \exp(-i\omega t) dt = \\ &= \frac{\exp(-ikR_0)}{4\pi i \omega c R_0} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i\omega \xi + ikR(\xi)) \frac{d^2 R^2}{d\xi^2} d\xi. \end{aligned} \quad (7)$$

Рассмотрим частный случай. Подставим теперь в общее выражение (7) закон (5) осцилляций сферы. Спектр волны при этом

$$\begin{aligned} F(\omega) &= m k_0 R_0 \frac{\omega_0}{\omega} \left( \frac{d}{d\beta} - im - 2im \frac{d^2}{d\beta^2} \right) \times \\ &\times \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n J_n(\beta) \delta(\omega - n\omega_0) \end{aligned} \quad (8)$$

будет содержать высшие гармоники, которых не было в заданном спектре колебания. (Здесь  $J_n$  — функции Бесселя,  $\beta = mkR_0$ .)

Профиль волны, согласно (8), описывается выражением

$$\begin{aligned} \frac{1}{\beta_0} \frac{dQ}{dt} &= [J_0(\beta_0) - J_2(\beta_0)] \sin \omega_0 t + \\ &+ m [J_1(\beta_0) - J_3(\beta_0)] \cos \omega_0 t - \\ &- \frac{1}{2} [J_1(2\beta_0) - J_3(2\beta_0)] \cos 2\omega_0 t - \\ &- \frac{m}{2} [J_0(2\beta_0) + J_4(2\beta_0)] \sin 2\omega_0 t - \\ &- \frac{1}{3} [J_2(3\beta_0) - J_4(3\beta_0)] \sin 3\omega_0 t + \\ &+ \frac{m}{3} [J_1(3\beta_0) + J_5(3\beta_0)] \cos 3\omega_0 t + \dots, \end{aligned}$$

в котором  $\beta_0 = mk_0 R_0$ ; здесь приведены лишь основные члены, отвечающие колебаниям на частотах  $\omega_0, 2\omega_0, 3\omega_0$  первых трех гармоник.

Зависимости их амплитуд от  $\beta_0$  показаны на рис. 1. Если зафиксировать значения частоты  $\omega_0$  и среднего радиуса  $R_0$  сферического излучателя, то кривые рис. 1 фактически изображают поведение амплитуд гармоник с номерами  $n = 1, 2$  и  $3$  при возрастании амплитуды  $m$  колебания сферы (5).

Профиль убегающей от сферы волны, рассчитанный на расстоянии  $r = R_0$ , изображен на рис. 2. Кривая 1 соответствует значению  $\beta_0 = 0,6$ , кривая 2 —  $\beta_0 = 1$ .

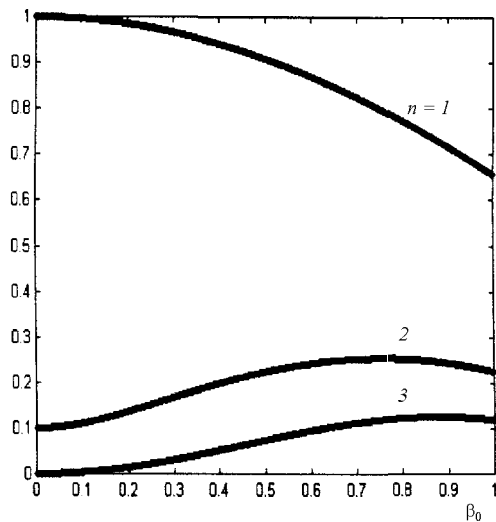


Рис. 1

Из результатов, приведенных на рис. 1, 2, видно, что граничная нелинейность может сильно исказить форму и спектр излучаемой волны. Следовательно, на основании измерения акустического давления нельзя делать прямых выводов о характеристиках движения пульсирующей сферы. Так, ультразвуковые спектры в кавитирующей среде должны быть гораздо богаче спектров колебания отдельных пузырьков.

Разумеется, при распространении волн в среде происходит их дальнейшее искажение благодаря «объемной» нелинейности [4], и спектр поля становится еще более сложным и «запутанным».

Работа поддержана грантами РФФИ (99-02-16042), INTAS (97-11134) и «Университеты России».

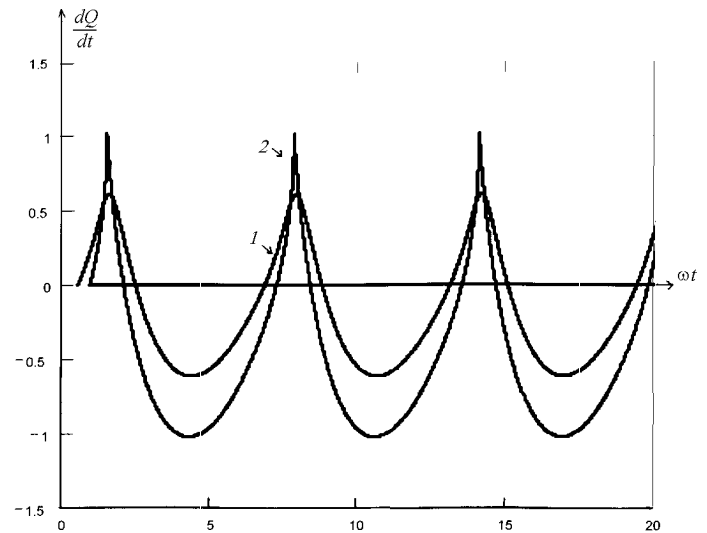


Рис. 2

#### Литература

1. Акуличев В.А. Пульсации кавитационных полостей // Мощные ультразвуковые поля / Под ред. Л.Д. Розенберга). М.: Наука, 1968. С. 131–166.
2. Коул Р. Подводные взрывы. М.: ИЛ, 1950.
3. Fogel A., Bush S., Parlitz V. // J. Acoust. Soc. Am., 1996. **100**, No. 1. P. 148.
4. Руденко О.В., Солуян С.И. Теоретические основы нелинейной акустики. М.: Наука, 1975.
5. Алексеев В.Н., Наугольных К.А., Рыбак С.А. // Акуст. журн. 1990. **36**, № 5. С. 799.
6. Руденко О.В. // ДАН. 1998. **360**, № 6. С. 759.
7. Руденко О.В. // Акуст. журн. 1998. **44**, № 6. С. 823.
8. Руденко О.В. // Акуст. журн. 1999. **45**, № 3. С. 397.

Поступила в редакцию  
08.12.99