УДК 530.145

ЭВОЛЮЦИЯ СПИНА ЗАРЯЖЕННОЙ ЧАСТИЦЫ В ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

А. Е. Лобанов

(*кафедра теоретической физики*)

E-mail: lobanov@th466.phys.msu.ru

Изучена динамика спина заряженной частицы с аномальным магнитным моментом в произвольном постоянном электрическом поле. Найдены поля, в которых решение уравнения Баргмана–Мишеля–Телегди может быть представлено в конечном виде. Исследован поворот спина частицы при рассеянии в кулоновском поле.

В работе на основе квазиклассического описания рассматривается эволюция спина заряженной частицы во внешнем поле. Предполагается, что движение частицы описывается уравнением Лоренца, а движение спина на известной траектории подчиняется уравнению Баргмана–Мишеля–Телегди (БМТ).

При заданном законе движения частицы уравнение БМТ [1], как дифференциальное уравнение первого порядка, имеет решение в виде матричного ряда. Однако в произвольных полях определение закона движения в явном виде невозможно. В предыдущих наших работах [2–4] был предложен метод исследования динамики спина без предварительного решения уравнения Лоренца. В частности, в [2] была решена задача об эволюции спина в плосковолновых полях специального вида, а в работе [4] — задача об эволюции спина в постоянном магнитном поле. В настоящей статье рассматривается движение спина частицы с аномальным магнитным моментом в произвольном постоянном электрическом поле. Цель работы — определить поля, в которых матричный ряд, представляющий решение уравнения БМТ, имеет конечное число членов, и найти вид таких решений.

Следуя [4], для описания движения спина будем использовать естественные координаты частицы, задаваемые ортами $(\mathbf{v}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$. Как известно, эволюция ортов естественного трехгранника определяется системой кинематических уравнений Френе:

$$\dot{\mathbf{v}} = k\mathbf{n}, \quad \dot{\mathbf{n}} = -k\mathbf{v} + \varkappa\mathbf{b}, \quad \dot{\mathbf{b}} = -\varkappa\mathbf{n},$$

где k — кривизна, а $\varkappa$ — кручение. Вводя вектор Дарбу

$$\boldsymbol{\Omega} = \varkappa\mathbf{v} + k\mathbf{b} = \frac{[\dot{\mathbf{v}} \times \ddot{\mathbf{v}}]}{(\dot{\mathbf{v}}\dot{\mathbf{v}})},$$

уравнения Френе можно представить в симметричной форме:

$$\dot{\mathbf{v}} = [\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}], \quad \dot{\mathbf{n}} = [\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{n}], \quad \dot{\mathbf{b}} = [\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{b}]. \tag{1}$$

Определим оператор эволюции, переводящий начальные орты

$$\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}(0), \quad \mathbf{n}_0 = \mathbf{n}(0), \quad \mathbf{b}_0 = \mathbf{b}(0)$$

в орты конечного состояния

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(\tau), \quad \mathbf{n} = \mathbf{n}(\tau), \quad \mathbf{b} = \mathbf{b}(\tau),$$

где τ — собственное время. Для этой цели удобно использовать спинорное представление (см., напр., [5]), поставив в соответствие ортам начального и конечного состояний спин-тензоры: $\mathbf{v}_0 \to (\boldsymbol{\sigma}\mathbf{v}_0)$, $\mathbf{v} \to (\boldsymbol{\sigma}\mathbf{v})$ и т. д. Тогда унитарный оператор эволюции определяется условиями

$$V(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{v}_0)V^+ = (\boldsymbol{\sigma}\mathbf{v}), \quad V(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{b}_0)V^+ = (\boldsymbol{\sigma}\mathbf{b}), \\ V(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n}_0)V^+ = (\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n}). \tag{2}$$

В силу (1) уравнения для оператора эволюции имеют вид

$$\dot{V} = -\frac{i}{2}(\boldsymbol{\sigma}\,\boldsymbol{\Omega})V, \quad \dot{V}^+ = \frac{i}{2}V^+(\boldsymbol{\sigma}\,\boldsymbol{\Omega}). \tag{3}$$

Эти уравнения, учитывая (2), можно представить в форме

$$\dot{V} = -\frac{i}{2}V(\boldsymbol{\sigma}(\varkappa\mathbf{v}_0 + k\mathbf{b}_0)), \\ \dot{V}^+ = \frac{i}{2}(\boldsymbol{\sigma}(\varkappa\mathbf{v}_0 + k\mathbf{b}_0))V^+. \tag{4}$$

Такая запись удобна тем, что в коэффициентную матрицу уравнения входят лишь векторы начальной ориентации трехгранника и две скалярные величины — кривизна и кручение.

Применим эти общие соотношения для решения задачи об эволюции спина в произвольном постоянном электрическом поле $\mathbf{E}$. Уравнение движения частицы в таком поле (уравнение Лоренца) имеет вид:

$$\dot{\mathbf{u}} = \gamma\mathbf{E}, \tag{5}$$

где $\mathbf{u}$ — компоненты 4-скорости, $\gamma = u^0$ — релятивистский фактор. Уравнение БМТ, описывающее эволюцию спина заряженной частицы, имеет вид

$$\dot{\mathbf{s}} = \frac{1}{2(1+\gamma)}\left(g + (g-2)\gamma\right)[\mathbf{s} \times [\mathbf{E} \times \mathbf{u}]], \tag{6}$$

где g — гиромагнитное отношение. В целях упрощения записи в формулах сделана замена $\frac{e}{m}\mathbf{E} \to \mathbf{E}$, где e, m — заряд и масса частицы. Мы используем систему единиц, в которой $c=1$. Из уравнений (5), (6) следует, что

$$\dot{\mathbf{s}} = \frac{1}{2\gamma(1+\gamma)}\,(g+(g-2)\gamma)\,[\mathbf{s}\times[\dot{\mathbf{u}}\times\mathbf{u}]]\,. \tag{7}$$

Воспользуемся подходом, предложенным в [2, 4], который позволяет определить эволюцию спина с произвольными начальными условиями при помощи решения уравнения для резольвенты уравнения (7) в спинорном представлении. В рассматриваемом случае указанное уравнение при учете равенства $[\mathbf{u}\times\dot{\mathbf{u}}]=k(\gamma^2-1)\mathbf{b}$ имеет вид:

$$\dot{R} = \frac{i}{2}\left\{\left(\frac{g}{2\gamma}-\frac{g-2}{2}\gamma-1\right)k(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{b})\right\}R. \tag{8}$$

Будем искать решение уравнения (8) в виде $R=VR_0$, т. е. разобьем матрицу, описывающую вращение спина, на оператор поворота естественного трехгранника и оператор поворота спина относительно этого трехгранника. Учитывая (3), (4) и (8), получаем

$$\dot{R}_0 = \frac{i}{2}\left\{\left(\frac{g}{2\gamma}-\frac{g-2}{2}\gamma\right)k(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{b}_0)+\varkappa(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{v}_0)\right\}R_0. \tag{9}$$

Следовательно, для того чтобы определить ориентацию спина, нужно знать три скалярные функции: k, $\varkappa$ и γ.

Применительно к задачам электродинамики уравнение, аналогичное (9), рассматривалось в [6]. Из результатов этой работы следует, что если ограничиться физически интересным случаем, когда ряд, определяющий решение, обрывается при произвольных значениях g, то необходимо предположить, что либо должны выполняться равенства

$$\gamma=\mathrm{const},\quad \alpha=\frac{\varkappa}{k}=\mathrm{const}, \tag{10}$$

либо

$$\varkappa=0. \tag{11}$$

В обоих случаях, если кривизна траектории задана как функция собственного времени $k=k(\tau)$, уравнение (9) имеет следующее решение:

$$R_0=\cos\frac{\omega}{2}+i(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{t})\sin\frac{\omega}{2}, \tag{12}$$

где

$$\begin{gathered}\omega(\tau)=\int\limits_0^\tau\left\{\left(\frac{g}{2\gamma}-\frac{g-2}{2}\gamma\right)^2+\alpha^2\right\}^{1/2}k(\tau)d\tau,\\ \mathbf{t}=\left\{\alpha\mathbf{v}_0+\left(\frac{g}{2\gamma}-\frac{g-2}{2}\gamma\right)\mathbf{b}_0\right\}\times\\ \times\left\{\left(\frac{g}{2\gamma}-\frac{g-2}{2}\gamma\right)^2+\alpha^2\right\}^{-1/2}.\end{gathered} \tag{13}$$

Заметим, что при этом и уравнение для оператора эволюции трехгранника (4) также имеет точное решение

$$V=\cos\frac{\omega_0}{2}-i(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{t}_0)\sin\frac{\omega_0}{2}, \tag{14}$$

где

$$\begin{gathered}\omega_0(\tau)=\sqrt{1+\alpha^2}\int\limits_0^\tau k(\tau)d\tau,\\ \mathbf{t}_0=(\alpha\mathbf{v}_0+\mathbf{b}_0)/\sqrt{1+\alpha^2}.\end{gathered} \tag{15}$$

Найдем поля, в которых реализуются условия (10), (11) и можно получить решения уравнений Лоренца и БМТ в виде (14) и (12) соответственно.

Из условий (10) следует, что существует направление, величина проекции 4-скорости частицы на которое постоянна. Представим единичный вектор скорости в виде суммы $\mathbf{v}=\mathbf{v}_\parallel+\mathbf{v}_-$, а вектор напряженности электрического поля на траектории в виде суммы $\mathbf{E}=\mathbf{E}_\parallel+\mathbf{E}_-$, где $\mathbf{E}_\parallel=\mathbf{v}_\parallel(\mathbf{v}_\parallel\mathbf{E})/(\mathbf{v}_\parallel\mathbf{v}_\parallel)=\mathbf{v}_\parallel E_\parallel/v_\parallel$. Для большей наглядности выберем систему координат так, чтобы $\mathbf{e}_z\parallel\mathbf{v}_\parallel$, т. е. $\mathbf{v}_\parallel=v_\parallel\mathbf{e}_z$, $\mathbf{v}_-=v_-(\mathbf{e}_x\sin\theta-\mathbf{e}_y\cos\theta)$, причем ${\mathbf{v}_\parallel}^2+{\mathbf{v}_-}^2=1$, а $\theta=\theta(x(\tau),y(\tau),z(\tau))$. При этом вектор 4-скорости частицы

$$\mathbf{u}_-=v_-\sqrt{\gamma^2-1}(\mathbf{e}_x\sin\theta-\mathbf{e}_y\cos\theta),\quad u_z=v_\parallel\sqrt{\gamma^2-1}.$$

Подставив эти выражения в уравнение Лоренца (5), получаем

$$\gamma\mathbf{E}_-=\sqrt{\gamma^2-1}v_-\dot{\theta}(\mathbf{e}_x\cos\theta+\mathbf{e}_y\sin\theta),\quad \mathbf{E}_\parallel=0.$$

Поскольку $\dot{\theta}=\sqrt{\gamma^2-1}(\mathbf{v}\boldsymbol{\nabla})\theta$, то

$$\begin{gathered}E_x=v_-(\gamma-\gamma^{-1})\times\\ \times\left[v_\parallel\frac{\partial\theta}{\partial z}+v_-\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\sin\theta-\frac{\partial\theta}{\partial y}\cos\theta\right)\right]\cos\theta,\\ E_y=v_-(\gamma-\gamma^{-1})\times\\ \times\left[v_\parallel\frac{\partial\theta}{\partial z}+v_-\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\sin\theta-\frac{\partial\theta}{\partial y}\cos\theta\right)\right]\sin\theta.\end{gathered} \tag{16}$$

Формулы (16) определяют поле лишь на траектории частицы. Чтобы получить вид поля во всем пространстве, необходимо наложить на вектор напряженности электрического поля условие $\mathrm{rot}\,\mathbf{E}=0$. Из этого условия следует, что искомое электрическое поле должно быть двумерным, т. е. $\theta=\theta(x,y)$. Если дополнительно считать, что $\mathrm{div}\,\mathbf{E}=0$, т. е. полагать, что траектория частицы лежит в области, где плотность заряда, создающего поле, равна нулю, то функция $\theta(x,y)$ должна удовлетворять системе уравнений

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\sin\theta-\frac{\partial\theta}{\partial y}\cos\theta\right)+\\ +\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\sin\theta-\frac{\partial\theta}{\partial y}\cos\theta\right)\frac{\partial\theta}{\partial y}=0,\\ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\sin\theta-\frac{\partial\theta}{\partial y}\cos\theta\right)-\\ -\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\sin\theta-\frac{\partial\theta}{\partial y}\cos\theta\right)\frac{\partial\theta}{\partial x}=0.\end{gathered} \tag{17}$$

Так как при выполнении указанных выше условий функция $E(\zeta) = E_y + iE_x \sim d\theta/d\zeta$ представляет собой аналитическую функцию комплексной переменной $\zeta = x + iy$, то система (17) сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению в комплексной области

$$i\frac{d^2\theta}{d\zeta^2} = 2\left(\frac{d\theta}{d\zeta}\right)^2,$$

из решения которого следует, что единственное поле, в котором возможно получить точное решение уравнения БМТ при выполнении условий (10), — это поле, создаваемое аксиально-симметричным распределением заряда. При этом траектория движения частицы должна лежать на эквипотенциальной поверхности, т. е. представлять собой винтовую линию.

Гораздо более интересная ситуация реализуется при выполнении условия (11). В этом случае траектории движения частиц плоские. Когда $k \neq 0$, это означает, что угловой момент частицы имеет ненулевую проекцию только на выделенную постоянную ось. В силу теоремы Нетер из этого следует, что поле имеет хотя бы одну локальную плоскость симметрии. Кроме того, движение должно происходить в указанной плоскости. Частным, но наиболее важным классом таких полей являются центральные поля

$$\mathbf{E} = \mathbf{r}f(r)/r, \quad f(r) = -\frac{d\varphi}{dr}, \tag{18}$$

движение в которых, вне зависимости от начальных условий, плоское. В таких полях $\mathbf{t} = \mathbf{t}_0 = \mathbf{b}_0 = \mathrm{const}$.

Кривизна траектории частицы выражается через компоненты 4-скорости следующим образом:

$$k = \frac{\left[(\gamma^2-1)(\dot{\mathbf{u}}\dot{\mathbf{u}}) - \gamma^2\dot{\gamma}^2\right]^{1/2}}{\gamma^2-1}.$$

Подставляя в эту формулу выражение (18), получаем

$$k = \frac{\gamma}{(\gamma^2-1)}\left|\frac{d\varphi}{dr}\right|\left[\gamma^2 - 1 - \dot{r}^2\right]^{1/2}. \tag{19}$$

Поскольку в центральных полях полная энергия и момент импульса являются интегралами движения, то, переходя в (13), (15) к интегрированию по переменной r, имеем

$$\omega_0(r) = \int\limits_{r_0}^{r} \frac{(\varepsilon-\varphi)L}{r\left((\varepsilon-\varphi)^2-1\right)}\left|\frac{d\varphi}{dr}\right| \times \frac{dr}{\left((\varepsilon-\varphi)^2 - L^2/r^2 - 1\right)^{1/2}}, \tag{20}$$

$$\omega(r) = \int\limits_{r_0}^{r}\left(\frac{g}{2(\varepsilon-\varphi)} - \frac{g-2}{2}(\varepsilon-\varphi)\right) \times \frac{(\varepsilon-\varphi)L}{r\left((\varepsilon-\varphi)^2-1\right)}\left|\frac{d\varphi}{dr}\right|\frac{dr}{\left((\varepsilon-\varphi)^2 - L^2/r^2 - 1\right)^{1/2}},$$

где ε, L — нормированные на массу частицы полная энергия и момент импульса соответственно. В ряде случаев, в частности для кулоновского поля, интегралы (20) могут быть вычислены явно.

В качестве примера рассмотрим рассеяние частицы со спином, обладающей зарядом $\pm e$, на неподвижном точечном кулоновском центре с зарядом Ze. Если ввести обозначение $\Delta = \pm mL/Ze^2$ и считать, что $|\Delta| > 1$, то

$$\omega_0/2 = \frac{|\Delta|}{\sqrt{\Delta^2-1}} \times \left[\arcsin\frac{\varepsilon}{\sqrt{1+\Delta^2(\varepsilon^2-1)}} - \frac{\pi}{2}\operatorname{sign}\Delta\right] + \frac{\pi}{2}\operatorname{sign}\Delta, \tag{21}$$

$$\omega/2 = \arcsin\frac{1}{\sqrt{1+\Delta^2(\varepsilon^2-1)}} - \frac{g-2}{2(\Delta^2-1)} \times \left\{|\Delta|\sqrt{\varepsilon^2-1} + \frac{\varepsilon|\Delta|}{\sqrt{\Delta^2-1}} \times \left[\arcsin\frac{\varepsilon}{\sqrt{1+\Delta^2(\varepsilon^2-1)}} - \frac{\pi}{2}\operatorname{sign}\Delta\right]\right\}. \tag{22}$$

Формулы (21), (22) определяют в параметрической форме угол рассеяния ω_0 и угол поворота спина относительно траектории ω в зависимости от энергии и углового момента рассеиваемой частицы. При этом для периферического рассеяния на малые углы, квазиклассическое описание которого является вполне адекватным, имеем

$$\omega \approx -\frac{g-2}{2}\varepsilon\omega_0. \tag{23}$$

Таким образом, спиральность частиц не сохраняется, а угол отклонения спина от вектора скорости растет линейно с энергией.

Из полученных результатов следует, что наличие аномального магнитного момента делает продольную поляризацию частиц неустойчивой не только при их движении в ускорителях [7, 8], но и при рассеянии. То есть утверждение о том, что при рассеянии ультрарелятивистских частиц спиральность сохраняется (см., напр., [9]), не является корректным.

Автор благодарен А. В. Борисову, В. Ч. Жуковскому, Б. А. Лысову и Г. А. Чижову за обсуждение полученных результатов, а Е. М. Мурчиковой — за помощь в расчетах.

Литература

1. *Bargmann V., Michel L., Telegdi V.* // Phys. Rev. Lett. 1959. **2**. P. 435.
2. *Лобанов А.Е., Павлова О.С.* // ТМФ. 1999. **121**. С. 509.
3. *Лобанов А.Е., Павлова О.С.* // Изв. вузов, Физика. 2000. №1. С. 38.
4. *Лобанов А.Е., Павлова О.С., Чижов Г.А.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2001. №6. С. 12 (Moscow University Phys. Bull. 2001. N 6. P. 15).

5. *Боголюбов Н.Н., Логунов А.А., Оксак А.И., Тодоров И.Т.* Общие принципы квантовой теории поля. М., 1987.
6. *Лобанов А.Е.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1997. № 2. С. 59 (Moscow University Phys. Bull. 1997. N 2. P. 85).
7. *Соколов А.А., Тернов И.М.* Релятивистский электрон. М., 1983.
8. *Тернов И.М.* Введение в физику спина релятивистских частиц. М., 1997.
9. *Берестецкий В.Б., Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П.* Квантовая электродинамика. М., 1989.

Поступила в редакцию
22.12.03