7. *Красносельский М.А., Забрейко П.П., Пустыльник Е.И., Соболевский П.Е.* Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций. М.: Наука, 1966.
8. *Леонов А.С.* // Матем. сб. 1986. **129**, № 2. С. 218.
9. *Леонов А.С.* // Сиб. матем. журн. 1988. **19**, № 6. С. 85.
10. *Тихонов А.Н., Леонов А.С., Ягола А.Г.* Нелинейные некорректные задачи. М.: Наука, 1995.
11. *Леонов А.С.* // ЖВМ и МФ. 1996. **36**. С. 35.

Поступила в редакцию
14.04.99

УДК 517.95; 514.752.4

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ КРИТЕРИЙ КИНЕМАТИЧЕСКОЙ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ УРАВНЕНИЙ С ОПЕРАТОРАМИ ИЗ $su(1,1)$ И $su(2)$

А. Ю. Колесник

(*кафедра математики*)

Доказывается необходимое и достаточное условие кинематической интегрируемости уравнений с операторами, принадлежащими $su(1,1)$ и $su(2)$ алгебрам Ли. Предлагаемый критерий связан с дифференциально-геометрическим рассмотрением соответствующих классов кинематически интегрируемых уравнений и базируется на G-представлении дифференциальных уравнений с частными производными.

Понятие G-класса

Пусть на гладком двумерном многообразии задана метрика

$$ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j, \quad (x^1 = x, \quad x^2 = t),$$

коэффициенты которой представимы в следующем виде: $g_{ij} = g_{ij}(u, u_x, u_t, u_{xx}, \ldots; x, t) \equiv g_{ij}[u]$, где $u(x,t)$ — неизвестная функция. Если при этом задать гауссову кривизну $K(x,t)$, то уравнение Гаусса (приведенное, напр., в [1]) будет представлять собой некоторое, вообще говоря, нелинейное дифференциальное уравнение относительно функции $u(x,t)$:

$$f[u(x,t)] = 0. \tag{1}$$

В этом случае будем называть G-представлением уравнения (1) соответствующий метрический тензор $g_{ij} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$. Уравнения, допускающие G-представление, будем называть принадлежащими G-классу. В случае гауссовой кривизны $K \equiv -1$ будем говорить о Λ^2-представлении (Λ^2-классе).

Понятие Λ^2-класса, введенное сравнительно недавно Э. Г. Позняком и А. Г. Поповым [2, 3], явилось, по сути, связующим звеном между нелинейными уравнениями и дифференциальной геометрией двумерных гладких многообразий.

В дальнейшем G-представление, соответствующее постоянной ненулевой гауссовой кривизне, будем обозначать как $G\{f[u]=0\}$, $K \equiv \text{const} \neq 0$.

Представление нулевой кривизны

Рассмотрим задачу

$$\begin{cases} \psi_x = U\psi, \\ \psi_t = V\psi, \end{cases}$$

где U и V — (2×2)-матричные операторы, а $\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$ — 2-мерная вектор-функция.

Условие разрешимости данной системы получается путем перекрестного дифференцирования и имеет вид

$$U_t - V_x + [U,V] = 0. \tag{2}$$

Уравнение (2) называется уравнением представления нулевой кривизны. Если операторы U и V аналитически зависят от некоторого параметра ξ, то уравнения, представимые в виде (2), называются кинематически интегрируемыми уравнениями [4].

Построение операторов представления нулевой кривизны по заданному $G\{f[u]=0\}$, $K \equiv \text{const} \neq 0$-представлению

Пусть задано $G\{f[u]=0\}$, $K \equiv \text{const} \neq 0$-представление некоторого дифференциального уравнения:

$$f[u] = 0. \tag{3}$$

В работе [5] доказана приводимая ниже теорема, связывающая кинематическую интегрируемость [4] с принадлежностью уравнений G-классу и позволяющая построить спектрально-эволюционные операторы U и V по G-представлению $K \equiv \text{const} \neq 0$ уравнения (3) таким образом, чтобы уравнение представления нулевой кривизны для U и V совпадало с соответствующим уравнением Гаусса.

Теорема 1. *Пусть задано G-представление уравнения (3), т. е. задан соответствующий метрический тензор $g_{ij}[u]$, причем гауссова кривизна $K \equiv \text{const} \neq 0$.*

Тогда

1. *Операторы*

$$U = \begin{bmatrix} \frac{i}{2}\tilde{a} & \frac{1}{2}\sqrt{-K}\sqrt{E}\exp(i\theta^+) \\ \frac{1}{2}\sqrt{-K}\sqrt{E}\exp(-i\theta^+) & -\frac{i}{2}\tilde{a} \end{bmatrix}$$

и

$$V = \begin{bmatrix} \frac{i}{2}\tilde{b} & \frac{1}{2}\sqrt{-K}\sqrt{G}\exp(i\theta^-) \\ \frac{1}{2}\sqrt{-K}\sqrt{G}\exp(-i\theta^-) & -\frac{i}{2}\tilde{b} \end{bmatrix},$$

где

$$\theta^\pm = \pm\frac{1}{2}\arccos\left(\frac{F}{\sqrt{EG}}\right), \quad \tilde{a} = \frac{1}{2\sqrt{w}}\left[\frac{FG_x}{2G} - \frac{FE_x}{2E} + F_x - E_t\right],$$

$$\tilde{b} = \frac{1}{2\sqrt{w}}\left[\frac{FG_t}{2G} - \frac{FE_t}{2E} - F_t + E_x\right], \quad w = EG - F^2,$$

удовлетворяют уравнению представления нулевой кривизны

$$U_t - V_x + [U, V] = 0. \tag{4}$$

2. *Рассматриваемое уравнение* (4) *совпадает с уравнением Гаусса* $f[u] = 0$*, соответствующим заданному* $G\{f[u] = 0\}$*,* $K \equiv \mathrm{const} \neq 0$*-представлению.*

3. *Операторы* U *и* V *единственны с точностью до калибровочного преобразования.*

Из приведенной теоремы следует, что множество кинематически интегрируемых уравнений включает в себя множество всех уравнений, допускающих $G\{f[u] = 0\}$, $K \equiv \mathrm{const} \neq 0$-представление.

Нахождение G-представления по заданным операторам нулевой кривизны

Поставим обратную к рассмотренной выше задачу, а именно построим обратное представление для метрического тензора по заданным операторам представления нулевой кривизны.

Теорема 2

1. *Пусть заданы операторы* $U = U[u(x,t)]$ *и* $V = V[u(x,t)]$ *вида*

$$U = \begin{pmatrix} U^{11} & U^{12} \\ U^{21} & -U^{11} \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} V^{11} & V^{21} \\ V^{21} & -V^{11} \end{pmatrix},$$

удовлетворяющие уравнению представления нулевой кривизны

$$U_t - V_x + [U, V] = 0 \tag{5}$$

для некоторого уравнения $f[u(x,t)] = 0$.

2. *При этом выполняется одно из следующих условий:*

а) $U, V \in su(2)$,

б) $U, V \in su(1,1)$.

Тогда

1°. *Существует* G*-представление уравнения* $f[u(x,t)] = 0$ *гауссовой кривизны* $K \equiv \mathrm{const} \neq 0$*, причем* $K > 0$ *для случая (а) и* $K < 0$ *для случая (б).*

2°. *Рассматриваемое* G*-представление выражается следующей метрикой:*

$$ds^2 = -\frac{4U^{12}U^{21}}{K}dx^2 - 2\frac{2(U^{12}V^{21} + U^{21}V^{12})}{K}dx\,dt - \frac{4V^{12}V^{21}}{K}dt^2. \tag{6}$$

Дифференциально-геометрический критерий кинематической интегрируемости

Обозначим множество кинематически интегрируемых уравнений с матричными операторами $U, V \in su(1,1)$ через $P_{su(1,1)}$, аналогично для случая $su(2)$: $P_{su(2)}$. Очевидным следствием теоремы 2 является следующее утверждение:

$$\begin{aligned} &P_{su(1,1)} \subseteq G\{K \equiv \mathrm{const} < 0\}, \\ &P_{su(2)} \subseteq G\{K \equiv \mathrm{const} > 0\}. \end{aligned} \tag{7}$$

Теорема 1 утверждает обратное включение:

$$\begin{aligned} &P_{su(1,1)} \supseteq G\{K \equiv \mathrm{const} < 0\}, \\ &P_{su(2)} \supseteq G\{K \equiv \mathrm{const} > 0\}. \end{aligned} \tag{8}$$

Из утверждений (7)–(8) следует эквивалентность множеств $P_{su(1,1)}$ и $G\{K \equiv \mathrm{const} < 0\}$, а также для множеств $P_{su(2)}$ и $G\{K \equiv \mathrm{const} >)\}$.

Указанные эквивалентности соответствующих классов позволяют сформулировать критерий кинематической интегрируемости уравнений.

Теорема 3. *Для того чтобы уравнение* $f[u(x,t)] = 0$ *принадлежало классу кинематически интегрируемых уравнений с матричными операторами* $U, V \in su(1,1)$ *(*$U, V \in su(2)$*), необходимо и достаточно, чтобы уравнение* $f[u(x,t)] = 0$ *принадлежало* $G\{K \equiv \mathrm{const} < 0\}$*-классу (*$G\{K \equiv \mathrm{const} > 0\}$*-классу).*

Теорема 3 представляет собой дифференциально-геометрический критерий, так как является необходимым и достаточным условием кинематической интегрируемости уравнений.

Автор выражает благодарность С. А. Зададаеву за полезные обсуждения работы.

Литература

1. *Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т.* Современная геометрия. Методы и приложения. М.: Наука, 1986.
2. *Позняк Э.Г., Попов А.Г.* // Доклады АН. 1993. **332**, № 4. С. 418.
3. *Позняк Э.Г., Попов А.Г.* // Итоги науки и техники. Сер. Геометрия-2. М., 1994. С. 5.
4. *Тахтаджян Л.А., Фадеев Л.Д.* Гамильтонов подход в теории солитонов. М.: Наука, 1986.
5. *Зададаев С.А.* Дис. ... канд. физ.-мат. наук. М. (физ. ф-т МГУ), 1999.

Поступила в редакцию
07.05.99