2) ортонормированная система, на которой достигается точная нижняя грань в (5), *не существует, если и только если s_n^2 есть точка непрерывного спектра оператора S^*S при некотором $n \leqslant r$.*

Перейдем к нахождению эффективного ранга модели. Зафиксируем операторы A, Σ и величину $\delta \geqslant 0$, ограничивающую погрешность интерпретации. Для определения эффективного ранга модели $[A, \Sigma]$ необходимо знать первые n сингулярных чисел оператора $\Sigma^{-1/2}A$, где n — минимальное натуральное число, при котором $h_*(n) \geqslant \delta$. (Для краткости мы опустили зависимость от A, Σ в h_*.) Положим для любого $\delta \geqslant 0$

$$\rho(\delta) = \max_{\substack{r=1,2,\ldots \\ h_*(r) \leqslant \delta}} r; \qquad h_*(0) = 0.$$

Тогда $\rho(\delta) = r$ при $\delta \in \left[h_*(r), h_*(r+1)\right)$, причем $\rho(\delta)$ принимает конечное значение при любом $\delta \in [0, \infty)$. Дальнейшее решение проблемы эффективного ранга зависит от структуры спектра оператора $A^*\Sigma^{-1}A$. Рассмотрим три взаимоисключающие возможности.

1. Пусть s_k^2 суть СЗ $A^*\Sigma^{-1}A$ при всех $k = 1, 2, \ldots, \rho(\delta)$. Тогда эффективный проектор Π_ρ проецирует на собственное подпространство, натянутое на собственные векторы оператора $A^*\Sigma^{-1}A$, отвечающие собственным значениям $s_1^2, s_2^2, \ldots, s_{\rho(\delta)}^2$, и

$$\mathbf{E}||R\xi - \Pi_\rho f||^2 = h_*(\rho(\delta)) \leqslant \delta. \tag{6}$$

Заметим, что ортогональный проектор ранга $\rho(\delta)$, при котором выполнено равенство (6), вообще говоря, не единствен.

2. Пусть s_k^2 при некотором $k \leqslant \rho(\delta)$ есть точка непрерывного спектра $A^*\Sigma^{-1}A$, и $h\left(\rho(\delta)\right) = \delta$. Тогда ортогонального проектора ранга $\rho(\delta)$, при котором выполнено равенство (6), не существует, однако для любого $\varepsilon > 0$ найдется проектор Π_ρ^ε, удовлетворяющий условиям

$$\mathbf{E}||R\xi - \Pi_\rho^\varepsilon f||^2 \leqslant \delta + \varepsilon, \quad \operatorname{rank} \Pi_\rho^\varepsilon = \rho(\delta).$$

3. Пусть s_k^2 при некотором $k \leqslant \rho(\delta)$ есть точка непрерывного спектра $A^*\Sigma^{-1}A$ и $h\left(\rho(\delta)\right) < \delta$. Положим $\varepsilon = \delta - h\left(\rho(\delta)\right)$. Тогда, как и в предыдущем случае, проектора ранга $\rho(\delta)$, на котором достигается минимум $\mathbf{E}||R\xi - \Pi_\rho f||^2$, не существует, но найдется, причем не единственный, проектор Π_ρ^ε, удовлетворяющий условиям

$$\mathbf{E}||R\xi - \Pi_\rho^\varepsilon f||^2 \leqslant h\left(\rho(\delta)\right) + \varepsilon \leqslant \delta, \quad \operatorname{rank} \Pi_\rho^\varepsilon = \rho(\delta).$$

Функция $\rho(\cdot)$ является эффективным рангом модели $[A, \Sigma]$.

Литература

1. *Себер Дж.* Линейный регрессионный анализ. М.: Мир, 1980.
2. *Гольцман Ф. М.* Статистические модели интерпретации. М.: Наука, 1971.
3. *Пытьев Ю.П., Бондаренко С.П.* // ЖВМ и МФ. 1995. **35**, № 1. С. 6.
4. *Пытьев А.Ю., Пытьев Ю.П.* // ЖВМ и МФ. 1998. **38**, № 4. С. 682.
5. *Пытьев Ю.П.* Математические методы интерпретации эксперимента. М.: Высш. школа, 1989.
6. *Гохберг И.Ц., Крейн М.Г.* Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов. М.: Высш. школа, 1965.

Поступила в редакцию
22.12.99

УДК 539.12.01

ЭФФЕКТИВНОЕ ДЕЙСТВИЕ В $SU(2)$ КАЛИБРОВОЧНОЙ МОДЕЛИ С ВИХРЕМ

В. Ч. Жуковский

(*кафедра теоретической физики*)

В однопетлевом приближении в 4-мерном пространстве-времени рассчитан эффективный потенциал $SU(2)$ калибровочной модели при наличии вихревой структуры. Найден минимум эффективного потенциала.

Введение

Явление конфайнмента получило удовлетворительное объяснение в целом ряде моделей (см., напр., обзор [1]). В соответствии с одной из них, основанной на дуальном эффекте Мейсснера, цветовой электрический поток кварк-антикварковой пары сжимается в трубку, что ведет к возникновению линейно растущего потенциала межкваркового взаимодействия. Так называемая техника абелевого проектирования, которая развивалась, начиная с первых работ Мандельстама и Тоофта [2], предоставила удобные методы, такие, как максимальная абелева проекция, для дальнейшего исследования этой модели на решетке. Это дало численное подтверждение того, что трубки цветового электрического потока действительно формируются вследствие дуального эффекта Мейсснера, обусловленного конденсацией цветовых монополей [3] (см. также [4, 5] и цитированные там работы), — явления, дуального хорошо известному образованию струн с заключенным в них магнитным потоком в теории сверхпроводимости (струны Абрикосова–Нильсена–Олесена [6]). Другое объяснение конфайнмента основано на методе максимальных центральных калибровок [7, 8], применение которого продемонстрировало существование центральной доминантности и привело к появлению центральной вихревой картины конфайнмента. В этой картине существование вихрей, связанных с центром $Z(N_c)$ группы $SU(N)_c$, которые распределены в пространстве-времени достаточно случайно, обеспечивает так называемый закон площадей для математического ожидания петли Вильсона, что в свою очередь свидетельствует о существовании линейного статического кваркового потенциала (последние ссылки см., напр., в работе [9]).

В теории вихрей имеется много проблем, касающихся их динамики и происхождения. Теоретико-полевое описание вихрей началось еще в 1978 г. [10]. Представление о вихрях вводилось позже при обсуждении «спагетти-вакуума» [11] и в последнее время было продолжено в рамках теории четырехмерных поверхностей и струн в целом ряде работ [4, 12, 13]. Недавно был построен континуальный аналог максимальной центральной калибровки [14]. В то же время изучение простых моделей, для которых могут быть найдены точные решения, позволяет прояснить сложную общую проблему динамики вихрей.

В настоящей заметке мы рассматриваем однопетлевой вклад флуктуаций калибровочного поля около чисто калибровочной конфигурации с вихрем калибровочного поля в 4-мерном пространстве-времени с нетривиальной топологией цилиндра, т.е. $S^1 \times R^3$. Эта конфигурация напоминает простейшую реализацию эффекта Ааронова–Бома со струной и ненулевым магнитным потоком в ней. Мы демонстрируем, что наш результат после очевидной реинтерпретации подтверждает вывод недавней работы Д. Дьяконова [15], в которой исследовалась потенциальная энергия вихрей в 4- и 3-мерных калибровочных теориях.

1. Эффективное действие

Рассмотрим производящий функционал модели глюодинамики для калибровочной группы $SU(2)$ в 4-мерном пространстве-времени с топологией цилиндра $S^1 \times R^3$

$$Z[\bar{A}, j] = \int da^a_\mu d\chi d\bar{\chi} \exp\left[-S_4\right] \int da^a_\mu \exp\left[-S_2\right],$$

где действие S калибровочного поля разбито на два слагаемых:

$$S = S_4 + S_2 = \int d^4x \, (L_4 + j^{a\mu} a^a_\mu) + \int d^2x \, (L_2 + j^{a\mu} a^a_\mu),$$

S_4 — для четырехмерного пространства-времени $S^1 \times R^3$ и S_2 — для двумерного цилиндра $S^1 \times R^1$, присутствие которого так же, как и наличие выколотой точки на двумерной плоскости, обеспечивает нетривиальную топологию пространственной конфигурации. Лагранжиан калибровочного поля A_μ во внешнем (фоновом) поле имеет вид

$$L_4 = \frac{1}{4}(F^a_{\mu\nu})^2 + \frac{1}{2\xi}(\bar{D}^{ab}_\mu a^{b\mu})^2 + \bar{\chi}_a (\bar{D}^2)_{ab} \chi_b.$$

Здесь $F^a_{\mu\nu} = \nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu - ig(T^a)^{bc} A^b_\mu A^c_\nu$, $\bar{D}^{ab}_\mu = \delta^{ab}\nabla_\mu - ig(T^c)^{ab}\bar{A}^c_\mu$, T^a — генераторы группы $SU(2)$ в присоединенном представлении, $A^a_\mu = \bar{A}^a_\mu + a^a_\mu$, где $\bar{A}^a_\mu$ — фоновое поле, a^a_μ — квантовые флуктуации глюонного поля относительно фона, а χ и $\bar{\chi}$ — поля духов.

Разложим лагранжиан, удерживая квадратичные по глюонным флуктуациям члены, что соответствует однопетлевому приближению. После этого интеграл по путям становится гауссовым и для эффективного действия Γ, связанного с Z соотношением $Z = \exp(\Gamma)$, получаем $\Gamma^{(1)} = \Gamma^{(1)}_4 + \Gamma^{(1)}_2$, где

$$\Gamma^{(1)}_4[\bar{A}] = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\ln[\bar{\Theta}^{ab}_{\mu\nu}] - \mathrm{Tr}\ln[(-\bar{D}^2)^{ab}], \quad \mu,\nu \in S^1 \times R^3 \tag{1}$$

(здесь первый член соответствует глюонному вкладу, а второй — вкладу духов), и

$$\Gamma^{(1)}_2[\bar{A}] = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\ln[\bar{\Theta}^{ab}_{\mu\nu}], \quad \mu,\nu \in S^1 \times R^1.$$

Оператор Θ в (1) определен согласно выражению

$$\begin{aligned}\bar{\Theta}^{ab}_{\mu\nu} = -g_{\mu\nu}(\bar{D}_\lambda \bar{D}^\lambda)^{ab} + 2ig(T^c)^{ab}\bar{F}^c_{\mu\nu} + \\ + (1 - 1/\xi)(\bar{D}_\mu \bar{D}_\nu)^{ab},\end{aligned} \tag{2}$$

где T^a являются $SU(2)$-генераторами в присоединенном представлении. Выберем калибровку $\xi = 1$, при которой третий член в (2) исчезает. Возьмем потенциал внешнего поля в абелево-подобном виде:

$$\bar{A}^a_\mu = n^a \bar{A}_\mu, \quad \bar{F}^a_{\mu\nu} = n^a \bar{F}_{\mu\nu},$$

где n^a — единичный вектор, указывающий определенное направление в цветовом пространстве.

Пусть ν^a $(a = 1, 2, 3)$ обозначают собственные значения цветовой матрицы $(n^c T^c)$, тогда получаем $|\nu^a| = (1, 1, 0)$. Окончательно для оператора (2) находим

$$\bar{\Theta}^{ab}_{\mu\nu} = -g_{\mu\nu}[\nabla_\lambda - ig(n^c T^c)\bar{A}_\lambda]^{2ab} + ig(n^c T^c)^{ab}\bar{F}_{\mu\nu}. \tag{3}$$

Следуя [14], для моделирования вихревой конфигурации в непрерывной теории Янга–Миллса выберем потенциал внешнего поля в виде чистой калибровки на поверхности цилиндра $\rho = \mathrm{const} = R$, т.е.

$$\bar{A}_\mu = \frac{i}{g}\omega \partial_\mu \omega^{-1}.$$

Для простого примера несингулярной конфигурации (соответствующей «толстому вихрю» [14]) выберем, используя полярные координаты, потенциал поля на круге S^1 радиуса $\rho = \text{const} = R$ в форме

$$\bar{A}_\mu = \begin{cases} \bar{A}_\theta = \Phi/(2\pi g R), & \mu \in S^1 \quad (\mu = \theta) \\ 0, & \mu \in \mathbf{R}^3 \quad (\mu = 2, 3, 4), \end{cases} \tag{4}$$

где $\Phi/g = \text{const}$ обозначает поток через цилиндр. Как хорошо известно, в данной ситуации можно ввести следующий двумерный вектор в плоскости $\rho\theta$:

$$G_\mu = \frac{1}{2\pi}\varepsilon_{\mu\nu}A_\nu.$$

Тогда

$$2\pi r_\mu G_\mu = \frac{i}{g}\omega\frac{\partial}{\partial\theta}\omega^{-1}$$

и, следовательно,

$$g\int_0^{2\pi} d\theta r_\mu G_\mu = \frac{i}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\theta\omega\frac{\partial}{\partial\theta}\omega^{-1} = n, \tag{5}$$

т. е. топологический заряд, соответствующий отображению окружности, охватывающей поверхность цилиндра, на пространство группы $U(1)$ (индекс Понтрягина). В нашем примере (4) $\Phi = 2\pi n$.

2. Эффективный потенциал

Спектр оператора (3) после диагонализации в 4-мерном случае

$$\bar{\Theta}^a_\mu \equiv -g_{\mu\mu}\Delta^a$$

определяется собственными значениями оператора

$$\Delta^a \equiv (\nabla_\lambda - ig\nu^a\bar{A}_\lambda)^2,$$

которые имеют вид

$$\frac{1}{\rho^2}(l - \nu^a x)^2 + \mathbf{k}^2 \equiv \Lambda^a_\mu(\mathbf{k}^2, l), \quad l \in \mathbf{Z}, \quad \mu = \theta, 2, 3, 4,$$

где $x = Rg\bar{A}_\theta = \Phi/(2\pi)$. То же собственное значение $\Lambda^a(\mathbf{k}^2, l) = \Lambda^a_\mu(\mathbf{k}^2, l)$, очевидно, получается и для оператора духов в (1).

В результате после всех описанных выше операций приходим к окончательной формуле для эффективного потенциала в 4-мерном случае:

$$\Gamma^{(1)}_4[\bar{A}] = \frac{\Omega}{2\pi R L^3}\sum_a|\nu^a|\sum_{l=-\infty}^{\infty}\sum_{\mathbf{k}}\left(\frac{1}{2}\times \right.$$
$$\left. \times\sum_{\mu=\theta,2,3,4}\ln[\Lambda^a_\mu(\mathbf{k}^2, l)] - \ln[\Lambda^a(\mathbf{k}^2, l)]\right), \tag{6}$$

где $\Omega \equiv \int d^4x = 2\pi R\int dx_2dx_3dx_4$ — 4-объем пространства-времени.

В дальнейшем удобно использовать представление собственного времени

$$\ln A = -\int_0^\infty \frac{ds}{s}\exp(-sA), \operatorname{Re} A > 0.$$

Данная формула справедлива с учетом вычитания расходимости на нижнем пределе. Далее удобно преобразовать суммирование по l в (6) с помощью тождества

$$\sum_{l=-\infty}^{\infty}\exp\left[-\frac{s}{R^2}(l+x)^2\right] =$$
$$= \frac{\sqrt{\pi}R}{\sqrt{s}}\sum_{l=1}^{\infty}\exp(-\frac{\pi^2R^2l^2}{s})\cos(2\pi x l).$$

После проведения необходимых действий с выражением (6) получаем 4-мерный эффективный потенциал:

$$v_4 = -\frac{\Gamma^{(1)}[\bar{A}]}{\Omega} =$$
$$= -\frac{1}{2\pi^2}\int_0^\infty \frac{ds}{s^3}\sum_{l=1}^{\infty}\exp(-\frac{\pi^2R^2l^2}{s})\cos(2\pi x l).$$

Окончательно после интегрирования по s находим

$$v_4 = -\frac{4}{\pi^2(2\pi R)^4}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{\cos(2\pi x l)}{l^4} = \frac{4\pi^2}{3(2\pi R)^4}B_4(x). \tag{7}$$

Эта формула после замены $2\pi R$ на $1/T$ и A_θ на A_0 соответствует хорошо известному результату для свободной энергии глюонов при конечной температуре [16] на фоне постоянного потенциала A_0 (см. также [17, 18]).

Аналогичные вычисления для вклада двумерного цилиндра дают

$$v_2 = -\frac{2}{\pi(2\pi R)^2}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{\cos(2\pi x l)}{l^2} = -\frac{2\pi}{(2\pi R)^2}B_2(x).$$

Здесь и в (7) использованы полиномы Бернулли, определенные согласно выражению

$$\sum_{l=1}^{\infty}\frac{\cos(2\pi l x)}{l^{2n}} = (-1)^{n-1}\frac{1}{2}\frac{(2\pi)^{2n}}{(2n)!}B_{2n}(x).$$

В частности,

$$B_2(x) = x^2 - x + 1/6, \quad B_4 = x^4 - 2x^3 + x^2 - 1/30.$$

По поводу полученного результата следует заметить, что, во-первых, полиномы Бернулли зависят от аргумента, определенного по модулю 1, и, следовательно, эффективный потенциал сохраняет Z_2-симметрию, характерную для вихрей, и, во-вторых, мы провели необходимую перенормировку нашего результата. После суммирования двух вкладов мы получаем

$$v = v_4 + \frac{1}{3\pi R^2} v_2.$$

Второе слагаемое, соответствующее вкладу цилиндра, было усреднено по трем возможным ориентациям оси цилиндра по отношению к координатным осям в 4-мерном пространстве-времени, а также по площади поперечного сечения цилиндра. Окончательный результат, в котором не зависящие от gA_θ члены опущены, имеет простой вид:

$$v = \frac{1}{12\pi^2 R^4} x(2-x)(1-x^2), \quad x = \frac{\Phi}{2\pi}.$$

Полученный результат формально совпадает с результатом работы [15] для следующей конфигурации в 4-мерном пространстве-времени: плоскость с выколотой точкой в начале координат и потенциал A_μ с сингулярностью вдоль струны, проходящей через начало координат. Это совпадение имеет простое объяснение: в обоих случаях мы имеем одну и ту же общую топологическую ситуацию, определяемую индексом Понтрягина (5). Следует заметить, что в нашем случае фоновый потенциал был определен на цилиндре и не имеет сингулярности, тогда как в последнем случае он был определен на плоскости с сингулярностью в начале координат, и поэтому для вычисления функционального следа необходимо было использовать полный базис функций Бесселя.

Так же как и в [15], потенциал имеет минимумы (равные нулю) при $x = 0$ и $x = 1$, а также, в силу свойства периодичности, при всех целых значениях x. При этом потенциал претерпевает скачки производной в этих точках. Значения потока, которые обеспечивают минимум эффективного потенциала, соответствуют значениям петли Вильсона вдоль контура C, охватывающего цилиндр,

$$<W(C)> = \frac{1}{2} < \mathrm{Tr\,P} \exp\left\{ ig \int\limits_C A_\mu dx_\mu \right\} > = \cos(\pi x),$$

равным ± 1.

Подобная ситуация уже обсуждалась в работе [15]. Как указывалось в недавних публикациях, например в [8, 9], значение $W(C) = -1$ характерно для вихрей, которые пронизывают площадь большой петли Вильсона, и это значение при гауссовом распределении вихрей приводит к закону площадей и линейному запирающему потенциалу.

Автор глубоко благодарен теоретической группе Института теоретической физики Тюбингенского университета за проявленное гостеприимство и плодотворные дискуссии.

Работа поддержана грантом Немецкого научно-исследовательского общества DFG 436 RUS 113/477.

Литература

1. *Simonov Yu.A.* // Phys. Usp. 1996. **393**. P. 13; E-print Archive: hep-ph/9709344.
2. *Mandelstam S.* // Phys. Rep. 1976. **C23**. P. 245; *'t Hooft G.* // Nucl. Phys. 1981. **B190**. P. 455.
3. *Schilling K., Bali G.S., Schlichter C.* E-print Archive: hep-lat/9809039.
4. *Baker M., Stenke R.* E-print Archive: hep-ph/9905375.
5. *Chernodub M.N., Polikarpov M.I., Veselov A.I., Zubkov M.A.* E-print Archive: hep-lat/9809158.
6. *Abrikosov A.A.* // Sov. Phys. JETP. 1957. **32**. P. 1442; *Nielsen H.B., Olesen P.* // Nucl. Phys. 1973. **B61**. P. 45.
7. *Del Debbio L., Faber M., Greensite J., Olejnik S.* // Phys. Rev. 1997. **D55**. P. 2298; *Del Debbio L., Faber M., Giedt J.* et al. // Phys. Rev. 1998. **D58**. P. 094501; E-print Archive: hep-lat/9801027.
8. *Langfeld K., Reinhardt H., Tennert O.* // Phys. Lett. 1998. **B419**. P. 317; *Engelhardt M., Langfeld K., Reinhardt H., Tennert O.* // Phys. Lett. 1998. **B431**. P. 141; Phys. Lett. 1999. **B452**. P. 301; E-print Archive: hep-lat/9904004.
9. *Langfeld K.* E-print Archive: hep-lat/9905009.
10. *'t Hooft G.* // Nucl. Phys. 1978. **B138**. P. 1; *Aharonov Y., Casher A., Yankielowicz S.* // Nucl. Phys. 1978. **B146**. P. 256; *Cornwall J.M.* // Nucl. Phys. 1979. **B157**. P. 392.
11. *Ambjorn J., Olesen P.* // Nucl. Phys. 1980. **B170 [FS1]**. P. 265; *Olesen P.* // Nucl. Phys. 1982. **B200 [FS4]**. P. 381.
12. *Cornwall J.M.* E-print Archive: hep-th/9901039.
13. *Antonov D., Ebert D.* E-print Archive: hep-th/9812112.
14. *Engelhardt M., Reinhardt H.* E-print Archive: hep-th/9907139.
15. *Diakonov D.* E-print Archive: hep-th/9905084.
16. *Weiss N.* // Phys. Rev. 1981. **D24**. P. 475.
17. *Ebert D., Zhukovsky V.Ch., Vshivtsev A.S.* // Int. J. Mod. Phys. 1998. **A131**. P. 723.
18. *Engelhardt M., Reinhardt H.* // Phys. Lett. 1998. **B430**. P. 161; E-print Archive: hep-th/9709115.

Поступила в редакцию
29.12.99