УДК 519.246; 524

КВАЗИОПТИМАЛЬНЫЕ АЛГОРИТМЫ СТАТИСТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА СОВПАДЕНИЙ В ГРАВИТАЦИОННО-ВОЛНОВОМ ЭКСПЕРИМЕНТЕ

А. В. Гусев, В. Н. Руденко

(*ГАИШ*)

E-mail: avg@sai.msu.ru, rvn@sai.msu.ru

В работе рассматриваются квазиоптимальные байесовские алгоритмы статистического анализа информации, полученной при эксплуатации пространственно разнесенных резонансных гравитационных антенн по схеме совпадений. Первичная обработка (накопление) гравитационных данных осуществляется по звездному времени.

1. Обработка информации, полученной с помощью двух пространственно разнесенных криогенных резонансных гравитационных антенн (РГА) с перекрывающимися диаграммами направленности, традиционно проводится по схеме совпадений [1]. Принцип действия схемы совпадений при обнаружении сильных и редких гравитационных импульсов основан на селекции (отборе) совпадающих во времени локальных максимумов выходных сигналов отдельных гравитационных антенн (предполагается, что амплитуды таких максимумов превышают высокий пороговый уровень). Фоновые совпадения рассматриваются как стационарный поток событий. В условиях априорной неопределенности средняя частота фоновых совпадений определяется по обучающей выборке.

Обработка информации по совпадениям [1] в гравитационно-волновом эксперименте носит чисто эвристический характер; статистика экстремальных значений пуассоновских потоков событий не учитывается. В предлагаемой работе статистический анализ совпадений в гравитационно-волновом эксперименте рассматривается с позиции байесовской задачи обнаружения и оценивания параметров квазидетерминированных сигналов [2]. Такой подход позволяет предложить специалистам, работающим в области гравитационно-волнового эксперимента, новые и эффективные алгоритмы статистической обработки информации. На этапе первичной обработки осуществляется накопление совпадений по звездному времени. Длительность интервала наблюдения — одни звездные сутки. Звездные сутки равны времени одного оборота Земли относительно точки весеннего равноденствия, момент верхней кульминации (прохождения через небесный меридиан при видимом суточном вращении небесной сферы) которой считается началом звездных суток (звездные сутки подразделяются на звездные часы, минуты и секунды). Применение звездного времени обеспечивает принципиальную возможность накопления гравитационных импульсов [1].

2. В режиме «быстрой фильтрации» («Fast filtering» [3]) выходной сигнал антенной решетки, образованной двумя пространственно разнесенными РГА, можно представить в виде векторного случайного процесса $\mathbf{y}(t) = [y_1(t) y_2(t)]^{\mathrm{T}}$, где $y_1(t)$ и $y_2(t)$ — низкочастотные случайные процессы на выходах отдельных каналов. Пусть τ_p — время разрешения схемы совпадений. Тогда случайное событие

$$|t_{1i}(C) - t_{2j}(C)| \leqslant \tau_p, \quad i, j = 1, 2, \ldots,$$

где $t_{1i}(C)$ и $t_{2j}(C)$ — моменты локальных максимумов, высоты которых превышают пороговый уровень C, можно рассматривать как совпадение случайных процессов $y_1(t)$ и $y_2(t)$. При высоком пороге C случайное число $n(t)$ таких совпадений на интервале $(0, t)$ представляет пуассоновский поток событий.

Как и в работе [1], будем предполагать, что интервал наблюдения $(0, T)$, длительность которого выбирается равной одним звездным суткам, разбивается на $M = 24$ отдельных подынтервалов. Длительность отдельного подынтервала равна одному звездному часу. Реалистическая модель такого потока $n(t)$ определяется следующим выражением:

$$n_k = \begin{cases} n_{0k} & \text{при } \ k = \overline{0, (M-1)}, \ \ k \neq \vartheta, \\ \lambda n_s + n_{0\vartheta} & \text{при } \ k = \vartheta, \end{cases} \tag{1}$$

где n_k — случайное число совпадений на отдельном подынтервале (t_k, t_{k+1}), $k = \overline{0, (M-1)}$, n_{0k} — фоновые совпадения, n_s — сигнальные совпадения, $\lambda = (0, 1)$ — параметр обнаружения, ϑ — неизвестный информативный параметр, подлежащий оценке.

Фоновые и сигнальные совпадения итальянской группой рассматриваются как статистически независимые случайные величины, распределенные по закону Пуассона:

$$P\{n_{0k} \leqslant m\} = F_1(m, \mu_0), \quad P\{n_s \leqslant m\} = F_1(m, \mu_s), \tag{2}$$

где $\mu_0 = \langle n_{0k} \rangle$ и $\mu_s = \langle n_s \rangle$ — среднее число фоновых и сигнальных совпадений на отдельном подынтервале $t_k, t_{k+1})$,

$$F_1(m,\mu) = \sum_{i=0}^{M} p(i,\mu) = \frac{1}{m!}\Gamma(m+1,\mu),$$
$$p(m,\mu) = \frac{\mu^m}{m!}\exp\{-\mu\}, \tag{3}$$
$$\Gamma(m+1,\mu) = \int_{\mu}^{\infty} z^m \exp\{-z\}dz$$

— неполная гамма-функция [4]. В условиях априорной неопределенности для оценивания неизвестного параметра μ_0 используется обучающая выборка.

Из (1), (2) и (3) находим условное отношение правдоподобия $\Lambda[\mathbf{n}|\mu_s,\vartheta]$ при обнаружении сигнальных совпадений n_s по выборке $\mathbf{n} = (n_0,\ldots,n_M)$ [5]:

$$\Lambda[\mathbf{n}|\mu_s,\vartheta] = \frac{p(n_\vartheta,\mu_0+\mu_s)}{p(n_\vartheta,\mu_0)} = \frac{(\mu_0+\mu_s)^{n_\vartheta}}{\mu_0^{n_\vartheta}}\exp\{-\mu_s\}. \tag{4}$$

3. При небайесовском алгоритме обнаружения неизвестные номер ϑ подынтервала, содержащего полезный сигнал, $\vartheta = \overline{0,M}$ и среднее число μ_s сигнальных совпадений рассматриваются как неслучайные параметры. Оптимальный по обобщенному критерию максимального правдоподобия [2, 5] приемник (обнаружитель) формирует статистику

$$\Lambda^*[\mathbf{n}] = \max_{\mu_s,\vartheta}\Lambda[\mathbf{n}|\mu_s,\vartheta] = \frac{(\mu_0+\mu_s^*)^{n_{\vartheta^*}}}{\mu_0^{n_{\vartheta^*}}}\exp\{-\mu_s^*\}, \tag{5}$$

где θ^* и μ_s^* — максимально-правдоподобные оценки неизвестных параметров ϑ и μ_s. Решающее правило при небайесовском подходе можно представить в виде [2, 5]

$$\lambda = \begin{cases} 1 \text{ при } \Lambda^*[\mathbf{n}] > c_\alpha \ \ (\ln\Lambda^*[\mathbf{n}] > \ln c_\alpha), \\ 0 \text{ при } \Lambda^*[\mathbf{n}] \leqslant c_\alpha \ \ (\ln\Lambda^*[\mathbf{n}] \leqslant \ln c_\alpha), \end{cases} \tag{6}$$

где c_α — пороговый уровень, зависящий от вероятности ложной тревоги α. С учетом (5) правило обнаружения (6) можно преобразовать к эквивалентной форме:

$$\underbrace{(n_0,\ldots,n_M)}_{\mathbf{n}} \to n_{\vartheta^*} = \max\mathbf{n} \lessgtr n_\alpha, \tag{7}$$

где $n_\alpha = [\ln c_\alpha + \mu_s^*]/[\ln(\mu_0+\mu_s^*) - \ln\mu_0]$ — пороговое число совпадений, зависящее от вероятности ложной тревоги α.

Пусть m_p — квантиль одномерного распределения Пуассона $F_1(m,\mu_0)$: $F_1(m_p,\mu_0) = p$. Тогда пороговое число совпадений n_α при небайесовском алгоритме обнаружения определяется следующей формулой:

$$n_\alpha = m_\gamma, \quad \gamma = (1-\alpha)^{1/M} \approx 1 - \frac{1}{M}\alpha.$$

Вероятность пропуска сигнальных совпадений при обнаружении по критерию максимального правдоподобия равна

$$\beta = P\{\mathbf{n} \leqslant n_\alpha|\lambda=1\} =$$
$$= (1-\alpha)\frac{F_1(n_\alpha,\mu_0+\mu_s)}{F_1(n_\alpha,\mu_0)} \approx \frac{F_1(n_\alpha,\mu_0+\mu_s)}{F_1(n_\alpha,\mu_0)}.$$

При дополнительном условии $\lambda = 1$ («сигнал есть») выражение (7) определяет оптимальный по критерию максимального правдоподобия алгоритм оценивания неизвестного информативного параметра ϑ. Вероятность β_{ij} ошибочного решения при таком подходе равна:

$$\beta_{ij} = P\{\vartheta^* = j|\vartheta = i,\ i \neq j;\ \lambda = 1\} =$$
$$= P\{n_i \leqslant n_j = \max\mathbf{n}|\lambda=1\} = F_1(n_j,\mu_0+\mu_s).$$

4. При байесовском алгоритме обнаружения неизвестные параметры μ_s и ϑ в формуле (4) рассматриваются как случайные величины с известными априорными распределениями [2, 5]. Решающее правило при байесовском обнаружении определяется выражением (6) при замене $\Lambda^*[\mathbf{n}]$ на безусловное отношение правдоподобия

$$\Lambda[\mathbf{n}] = \langle[\mathbf{n}|\mu_s,\vartheta]\rangle_{\mu_s,\vartheta} = \sum_{k=0}^{M} p_k\Psi(n_k). \tag{8}$$

Здесь

$$\Psi(n_k) = \int_0^\infty \Lambda[\mathbf{n}|\mu,k]W_{\text{pr}}(\mu_s)\,d\mu =$$
$$= \int_0^\infty W_{\text{pr}}(\mu_s)\frac{(\mu_0+\mu)^k}{\mu_0^k}\exp\{-\mu\}\,d\mu, \tag{9}$$
$$p_k = P\{\vartheta = k\}, \quad k = \overline{0,M},$$

где $W_{\text{pr}}(\mu_s)$ — априорная плотность вероятности неизвестного неинформативного параметра μ_s. При частично байесовском подходе в качестве неизвестных распределений случайных параметров гравитационных импульсов выбираются равномерные распределения (постулат Байеса [2]):

$$W_{\text{pr}}(\mu_s) = \frac{1}{\Delta},$$
$$\mu_s \in (0,\Delta), \quad p_0 = \ldots = p_M = (1/M). \tag{10}$$

Из (8), (9) и (10) в условиях параметрической априорной неопределенности находим:

$$\Psi(n_k) = \frac{1}{\Delta\mu_0^{n_k}}\{\mu_0\}\left[\Gamma(n_k+1,\mu_0+\Delta) - \Gamma(n_k+1,\mu_0)\right].$$

5. При получившей на практике широкое распространение квазиоптимальной байесовской схеме раздельного обнаружения и оценивания параметров квазидетерминированного сигнала измерение информационного параметра $\vartheta \in (0,M)$ производится после того, как на первом этапе принято решение $\lambda = 1$ о наличии полезного сигнала. Оптимальный алгоритм оценивания зависит от выбранной функции потерь (платежа) $\Pi(\vartheta, \hat{\vartheta})$, где $\hat{\vartheta}$ — оптимальная оценка неизвестного параметра ϑ, рассматриваемого как дискретная случайная величина. При простой функции потерь вида $\Pi(\vartheta, \hat{\vartheta}) = c_1 - \delta(\vartheta - \hat{\vartheta})$, $c_1 > 0$ оптимальный по критерию максимума апостериорной вероятности алгоритм оценивания определяется следующим выражением:

$$\begin{gathered} \hat{\vartheta} = j \ \text{ при } \ p_j \Psi(n_j) = \max_{0 \leqslant k \leqslant M} \{p_k \Psi(n_k)\} \\ p_j \ln \Psi(n_j) = \max_{0 \leqslant k \leqslant M} \{p_k \ln \Psi(n_k)\}. \end{gathered} \tag{11}$$

Так как функция $\Psi(n_k)$ является монотонно возрастающей ($\Psi(n_{k_1}) < \Psi(n_{k_2})$ при $n_{k_1} < n_{k_2}$), то при равномерном априорном распределении $p_0 = \ldots = p_M$ оптимальная оценка (11) оказывается оценкой максимального правдоподобия: $\vartheta^* = \hat{\vartheta}$. Оптимальный алгоритм обнаружения при равномерном априорном распределении определяется схемой

$$(n_0, \ldots, n_M) \to \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M} \Psi(n_k) \gtrless c,$$

где c — пороговый уровень, зависящий от выбранного критерия качества, существенно отличается от небайесовского алгоритма обнаружения по обобщенному критерию максимального правдоподобия (7). При квадратической функции потерь вида $\Pi(\vartheta, \hat{\vartheta}) = (\vartheta - \hat{\vartheta})^2$ оптимальная по критерию минимума среднеквадратической ошибки оценка равна:

$$\hat{\vartheta} = \frac{\sum\limits_{k=0}^{M} k p_k \Psi(n_k)}{\sum\limits_{k=0}^{M} p_k \Psi(n_k)} = \frac{\sum\limits_{k=0}^{M} k \Psi(n_k)}{\sum\limits_{k=0}^{M} \Psi(n_k)}$$
$$\text{при } \ p_1 = \ldots = p_M = (1/M).$$

6. Основные результаты и выводы. I. Квазиоптимальная обработка выходных сигналов РГА по схеме совпадений в соответствии с байесовской задачей обнаружения и оценивания параметров квазидетерминированных сигналов [2] осуществляется в два этапа. На первом этапе производится оптимальное обнаружение гравитационных импульсов. Априорные распределения неизвестных параметров μ_s (среднее число сигнальных совпадений на подынтервале $(t_\vartheta, t_{\vartheta+1})$ и $\vartheta \in (0, M)$ выбираются равномерными (постулат Байеса).

II. Оценивание информативного параметра ϑ производится на следующем этапе после того, как будет принята гипотеза $\lambda = 1$ «сигнал есть». Оптимальный (байесовский) алгоритм оценивания определяется выбранной функцией потерь $\Pi(\vartheta, \hat{\vartheta})$.

III. Реализация байесовских схем оптимального обнаружения и оценивания (при $\lambda = 1$) представляет собой достаточно сложную в техническом отношении задачу. Наиболее простая схема обработки выборки $\mathbf{n} = (n_0, \ldots, n_M)$ соответствует небайесовскому подходу, основанному на применении обобщенного критерия максимального правдоподобия. При равномерном априорном распределении информативного параметра ϑ максимально-правдоподобная оценка ϑ^* совпадает с оптимальной по критерию максимума апостериорной вероятности байесовской оценкой $\hat{\vartheta}$, $\vartheta^* = \hat{\vartheta}$.

IV. Схема обработки совпадений выходных сигналов РГА «Explorer» и «Nautilus», которая была использована итальянской группой [1], совпадает с оптимальным по критерию максимального правдоподобия алгоритмом совместного обнаружения гравитационных импульсов и оценивания (измерения) информативного параметра ϑ. Основной недостаток [1] связан с неправильной оценкой порогового числа совпадений n_α:

$$\left. \begin{aligned} &F_1(n_\alpha, \hat{\mu}) = 1 - \alpha \ \ \text{(итальянская группа)}, \\ &F_1^M(n_\alpha, \hat{\mu}) = 1 - \alpha \ \ \text{(критерий максимального} \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{правдоподобия)}, \end{aligned} \right\}$$

где $\hat{\mu}_0$ — полученная по обучающей выборке оценка среднего числа фоновых совпадений на отдельном подынтервале (t_k, t_{k+1}) (подобное замечание содержится в работе [6]).

V. Рассмотренные выше схемы обработки выходных сигналов РГА по совпадениям можно рассматривать как раздельное обнаружение сигнальных совпадений и оценивание информативного параметра ϑ (при $\lambda = 1$) по оптимальным байесовским алгоритмам. Общая схема совместного (одновременного) байесовского обнаружения и оценивания параметров рассматривается в монографии [2]. При этом выигрыш оптимальной «в узком смысле» системы достигается за счет улучшения качества оценивания информативного параметра ϑ при недостоверном присутствии полезного сигнала (характеристики обнаружения сохраняются).

7. В заключение остановимся на анализе относительной эффективности байесовского обнаружителя по отношению к обнаружителю максимального правдоподобия. С целью упрощения при таком анализе ограничимся гауссовым приближением (асимптотика Муавра–Лапласа [4]). В гауссовом приближении характеристики обнаружения (вероятности ложной тревоги α и пропуска сигнала β однозначно определяются отношением сигнал–шум $\rho \approx \mu_s / \mu_0^{1/2}$ $(n_s \approx \mu_s \gg 1)$. Тогда, предполагая, что 1) $p_0 = \ldots = p_M = 1/M$ и 2) $W_{\mathrm{pr}}(\mu_s) = \delta(\mu_s - a)$, при оптимальном (байесовском) алгоритме обнаружения имеем [7]:

$$\rho^2 \approx \left(\sqrt{\ln \frac{1}{\alpha} - 1.4} + \sqrt{\ln \frac{1}{\beta} - 1.4} \right)^2 + 0.5 \ln M, \tag{12}$$

где $\alpha \leqslant 0.1$ и $\beta \leqslant 0.1$.

При небайесовском подходе, основанном на применении обобщенного критерия максимального правдоподобия, характеристики обнаружения α и β определяются следующим выражением [7]:

$$\rho^2 \approx \left(\sqrt{\ln M + \ln\frac{1}{\alpha} - 1.4} + \sqrt{\ln\frac{1}{\beta} - 1.4}\right)^2. \quad (13)$$

Из (12) и (13) при дополнительном условии $\ln\frac{1}{\alpha} \gg 1.4,\ \ln\frac{1}{\alpha} + \ln M \gg \ln\frac{1}{\beta}$ получим

$$\alpha' \approx \frac{1}{\sqrt{M}}\alpha'',$$

где α' и α'' — вероятности ложной тревоги при байесовском и небайесовском подходах соответственно. Следовательно, при оптимальном (байесовском) алгоритме обнаружения вероятность ложной тревоги по отношению к алгоритму максимального правдоподобия заметно падает.

Литература

1. *Astone P., Babusci D., Bassan M.* et al. // Class. Quantum Grav. 2002. **19**. P. 5449.
2. *Сосулин Ю.Г.* Теоретические основы радиолокации и радионавигации. М., 1992.
3. *Astone P., Buttiglione S., Frasca S.* et al. // Nuovo Cimento. **20C**, N 1. P. 9.
4. *Левин Б.Р.* Статистическая радиотехника. М., 1994.
5. *Тихонов В.И.* Оптимальный прием сигналов. М., 1983.
6. *Finn L.S.* // gr-gc/0301092 v. 1. 23 Jan. 2003.
7. *Гуткин Л.С.* Оптимальные методы радиоприема на флюктуационных помехах. М., 1972.

Поступила в редакцию
17.11.03