

УДК 519.246; 524

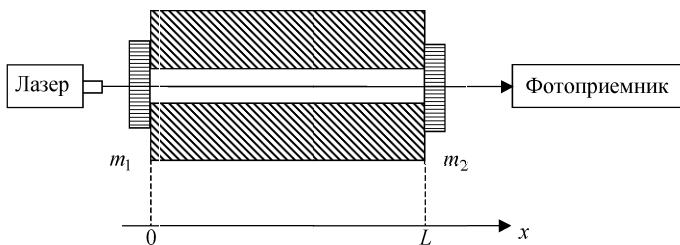
ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТЬ КОМБИНИРОВАННОЙ ГРАВИТАЦИОННОЙ АНТЕННЫ ПРИ РАБОТЕ НА ЧЕТНЫХ МОДАХ

А. В. Гусев
(ГАИШ)

E-mail: avg@sai.msu.ru

Работа посвящена оценке пороговой чувствительности комбинированной оптико-акустической гравитационной антенны в режиме минимального теплового шума (частота гравитационного импульса совпадает с резонансной частотой четной моды механической системы). Получена универсальная формула для расчета спектральной плотности тепловых шумов резонансных гравитационных антенн при произвольном механизме внутреннего сопротивления.

1. В настоящее время в Астрономическом институте им. П. К. Штернберга (ГАИШ, МГУ) проводятся работы по созданию оптико-акустической гравитационной антенны «ОГРАН» [1]. Подобная система относится к классу комбинированных гравитационных антенн (КГА) [2–4]. КГА представляет собой механический резонатор длиной $L \approx 1$ м, имеющий осевую полость (см. рисунок). На торцах резонатора жестко закреплены зеркала m_1 и m_2 , образующие интерферометр Фабри-Перо. Характерная особенность КГА по отношению к традиционным резонансным гравитационным антеннам [2] состоит в том, что слабая гравитационная волна взаимодействует не только с механической системой, но и с электромагнитным полем в полости резонатора.



Эквивалентная схема комбинированной оптико-акустической гравитационной антенны

Пусть

$$h(t) = h_0 \cos \omega_s t, \quad 0 \leq t \leq \hat{\tau} \approx \omega_s^{-1},$$

— вариации метрики свободного пространства в поле слабой гравитационной волны, ω_m — резонансные частоты отдельных мод механической системы, $m = 1, 2, \dots$. Тогда в стандартном режиме [2, 3] при $\omega_s = \omega_1$ КГА можно рассматривать как неохлаждаемую резонансную гравитационную антенну с малозумящей оптической системой регистрации. Потенциальная чувствительность КГА в этом режиме определяется выражением

$$[h_0]_{\min} = \frac{\pi^2}{L} \sqrt{\frac{\chi T}{M \omega_1^3 Q_1 \hat{\tau}}}, \quad (1)$$

где $[h_0]_{\min}$ — пороговая амплитуда, M — масса резонатора, χ — постоянная Больцмана, T — температура термостата, Q_1 — добротность основной моды.

Зависимость пороговой амплитуды от резонансной частоты основной моды ω_1 резонатора позволяет рассчитать потенциальную чувствительность КГА при обнаружении «высокочастотных» гравитационных импульсов, для которых $\omega_s = \omega_m$, $m = 2, 3, \dots$. Наиболее полное отличие динамических характеристик КГА (по отношению к резонансным гравитационным антеннам) при обнаружении высокочастотных гравитационных импульсов проявляется при работе на четных модах: $m = 2i$, $i = 1, 2, \dots$. Действительно, в длинноволновом приближении акустический гравитационный на этих частотах отсутствует [2–4], и информация о полезном сигнале содержится только в оптическом отклике. Это позволяет рассматривать КГА при работе на четных модах как лазерно-интерферометрическую гравитационную антенну с короткой базой L . Влияние механической системы при работе на четных модах «проявляется» в наличии аддитивных тепловых шумов. Спектральная плотность тепловых шумов определяется «тонкой структурой» внутреннего сопротивления резонатора в килогерцовом диапазоне частот.

Расчету пороговой чувствительности КГА при работе на четных модах и посвящена предлагаемая статья. Вычисление спектральной плотности тепловых шумов резонатора основывается на применении флуктуационно-диссипативной теоремы (ФДТ) для непрерывных (распределенных) систем [5]. Такой подход позволил избежать введения эквивалентных длины и массы КГА, которые используются при анализе резонансных гравитационных антенн в классе линейных систем с сосредоточенными параметрами [2]. Кроме того, применение ФДТ дает возможность построить теорию тепловых шумов КГА не только при упругом, но и при характерном для твердых тел неупругом внутреннем сопротивлении.

2. Выходной сигнал $w(t)$ комбинированной гравитационной антенны определяется выражением

$$v(t) = \lambda s(t) + n(t), \quad w(t) = v(t) + \nu(t), \quad (2)$$

где $\lambda = (0, 1)$ — параметр обнаружения; $s(t) = [g_a(t) + g_o(t)]^* h(t)$ — полезный гравитационный сигнал, $g_a(t)$ и $g_o(t)$ — импульсные характеристики акустического и оптического каналов [2, 3], $n(t)$ — тепловые шумы в акустическом отклике $\Delta\phi_a(t)$, $\nu(t)$ — аддитивный белый гауссов шум с функцией корреляции

$$B_\nu(\tau) = \langle \nu(t)\nu(t+\tau) \rangle = N_\nu \delta(\tau), \quad (3)$$

$N_\nu = (\hbar\omega_e)/(4W_0)$, ω_e и W_0 — частота и мощность накачки.

Пусть $\tau_0 = (L/c)$ — характерный временной параметр. Тогда в низкочастотной области (v — скорость звука)

$$\omega \approx \omega_m = \frac{\pi m v}{L}, \quad \text{sinc} \left\{ \frac{\omega_m L}{c} \right\} \approx 1,$$

акустический отклик $\Delta\phi_a(t)$ определяется формулой [2, 3]

$$\Delta\phi_a(t) \approx 2 \frac{\omega_e}{c} [y(L, t - \tau_0) - y(0, t - \tau_0)], \quad (4)$$

где $y(x, t)$ — продольные колебания резонатора.

Из (2), (3) и (4) находим отношение сигнал-шум q при оптимальной обработке информации на выходе фотоприемника:

$$q = \left[(h_0 \hat{\tau})^2 \frac{1}{4\pi} \times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\tilde{g}_1(\omega_m + \omega) + \tilde{g}_2(\omega_m + \omega)|^2 \text{sinc}^2(\omega \hat{\tau}/4) d\omega}{N(\omega_m + \omega) + N_\nu} \right]^{1/2},$$

где $\tilde{g}_1(\omega) \leftrightarrow g_1(t)$ и $\tilde{g}_2(\omega) \leftrightarrow g_2(t)$ — передаточные функции акустического и оптического каналов, $N(\omega)$ — спектральная плотность случайного гауссова процесса $n(t)$.

При работе КГА на четных модах ($m = 2, 4, \dots$) [2–4] $\tilde{g}_1(\omega_m + \omega) \approx 0$, $|\tilde{g}_2(\omega_m + \omega)| \approx (L\omega_e/c)$. Тогда

$$q \approx \sqrt{\left(\frac{h_0 \hat{\tau} L}{c} \right)^2 \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{sinc}^2(\omega \hat{\tau}/4) d\omega}{N(\omega_m + \omega) + N_\nu}}. \quad (5)$$

Спектральная плотность $N(\omega)$ в выражении (5):

$$N(\omega) = 4 \left(\frac{\omega_e}{c} \right)^2 \left[\langle |\tilde{y}_T(0, \omega)|^2 \rangle + \langle |\tilde{y}_T(L, \omega)|^2 \rangle - 2 \text{Re} \langle \tilde{y}_T(0, \omega) \tilde{y}_T^*(L, \omega) \rangle \right], \quad (6)$$

где $\langle \tilde{y}_T(x, \omega) \tilde{y}_T^*(x', \omega) \rangle$ — ω -плотность тепловых колебаний $y_T(x, t) \leftrightarrow \tilde{y}_T(x, \omega)$ резонатора [5].

3. Пусть M , K и H — масса, жесткость и коэффициент трения механической системы с одной

степенью свободы. Тогда импеданс $z(\omega)$ такой системы можно представить в виде

$$z(\omega) = j\omega M + H + \frac{1}{j\omega} K = j\omega M + \frac{1}{j\omega} K_e(\omega).$$

Следовательно, наличие диссипативных потерь при спектральном подходе учитывается путем введения эффективной «жесткости»

$$\begin{cases} K_e(\omega) = K + jK'(\omega) = K [1 + j\gamma(\omega)], \\ K'(\omega) = \omega H, \quad \gamma(\omega) = K'(\omega)/K, \quad \gamma(\omega_0) = Q^{-1}, \end{cases}$$

где $\omega = \omega_0 = \sqrt{K/M}$ и Q — резонансная частота и добротность механической системы.

Аналогичная методика используется при спектральном описании линейных непрерывных (распределенных) диссипативных систем, динамические свойства которых определяются комплексной функцией

$$E_e(\omega) = E + jE'(\omega) = E [1 + j\gamma(\omega)],$$

где E — модуль упругости, $\gamma(\omega) = E'(\omega)/E \ll 1$. При упругом (пропорциональном скорости деформации) внутреннем сопротивлении [6]

$$\gamma(\omega) = \frac{\omega}{E} \left(\frac{4}{3} \eta + \xi \right), \quad (7)$$

η и ξ — продольный и поперечный коэффициенты вязкости. Зависимость (7) для твердых тел экспериментально не подтверждается [7]: при периоде колебаний от нескольких минут до тысячных долей секунды внутреннее сопротивление не зависит от скорости деформации. Поэтому для описания динамических систем с неупругим внутренним сопротивлением в теории колебаний часто используется эмпирическая формула Е. С. Сорокина:

$$\gamma(\omega) = \text{const}. \quad (8)$$

4. Спектр $\tilde{y}(x, \omega)$ продольных колебаний резонатора $y(x, t)$ и спектр $\tilde{p}(x, \omega)$ продольной нагрузки $p(x, t)$ связаны между собой при помощи взаимно обратных пространственных операторов $\hat{A}\{\dots\}$ и $\hat{A}^{-1}\{\dots\}$:

$$\hat{A}^{-1}\{\tilde{y}(x, \omega)\} = \left[\frac{d^2}{dx^2} + k_e^2(\omega) \right] \tilde{y}(x, \omega) = \tilde{f}(x, \omega), \quad (9)$$

$$0 \leq x \leq L, \quad k_e(\omega) = k(\omega) - jk'(\omega), \quad k'(\omega) = (1/2)k(\omega)\gamma(\omega),$$

где $k(\omega) = (\omega/v)$ — волновое число, $v = \sqrt{E/\rho}$ — скорость звука (см. выше), ρ — плотность, $\tilde{f}(x, \omega) = -[k_e^2(\omega)/\rho s \omega^2] \tilde{p}(x, \omega)$, s — площадь торцов (при дальнейшем анализе $k_e(\omega) \equiv k_e$, $k(\omega) \equiv k$, $k'(\omega) \equiv k'$).

В соответствии с ФДТ для распределенных диссипативных потерь [5] ω -плотность тепловых колебаний $y_T(x, t)$ резонатора определяется следующим выражением:

$$\langle \tilde{y}_T(x, \omega) \tilde{y}_T^*(x', \omega) \rangle = \frac{j\kappa T}{\omega} (\hat{A} - \hat{A}^*) \{ \delta(x - x') \}.$$

Для вычисления пространственного оператора $\hat{A}\{\dots\}$ необходимо найти решение неоднородного волнового уравнения (9) при заданных граничных условиях:

$$\left. \frac{d\tilde{y}(x, \omega)}{dx} \right|_{x=0} = \left. \frac{d\tilde{y}(x, \omega)}{dx} \right|_{x=L} = 0. \quad (10)$$

Пусть

$$G(x, z) = \frac{1}{k_e} \sin k_e(x - z)V(x - z)$$

— функция Грина волнового уравнения, $V(x)$ — единичная функция: $V(x) = 1$ при $x \geq 0$ и $V(x) = 0$ при $x < 0$. Тогда спектр $\tilde{y}(x, \omega)$ продольных колебаний резонатора можно представить в виде

$$\tilde{y}(x, \omega) = c_1 \cos k_e x + c_2 \sin k_e x - \left(\frac{k_e^2}{\rho s \omega^2} \right) \int_0^L G(x, z) \tilde{P}(z) dz.$$

Коэффициенты $c_1 = c_1(\omega)$ и $c_2 = c_2(\omega)$ определяются граничными условиями (10). После несложных преобразований при малом внутреннем сопротивлении ($k_e \approx k$) находим:

$$\begin{aligned} \tilde{y}(x, \omega) &= \hat{A}\{\tilde{p}(x, \omega)\}, \\ \hat{A}\{\dots\} &\approx - \left(\frac{k}{s \omega^2} \right) \int_0^L \Psi(x, z) \{\dots\} dz. \end{aligned} \quad (11)$$

Здесь

$$\Psi(x, z) = \frac{\cos k_e x \cos k_e(L - z)}{\sin k_e L} + \sin k_e(x - z)V(x - z). \quad (12)$$

При вычислении определенного интеграла, содержащего дельта-функцию, необходимо учитывать, что

$$\int_a^b f(x) \delta(x - x') dx = \begin{cases} 0, & x' < a, \quad x' > b, \\ (1/2)f(x'), & x' = a, \quad x' = b, \\ f(x'), & a < x' < b \quad (a < b), \end{cases}$$

где $f(x)$ — произвольная функция, непрерывная в точке $x = x'$.

Отсюда, принимая во внимание (11) и (12), имеем:

$$\begin{cases} \langle \tilde{y}(x, \omega) \tilde{y}^*(x', \omega) \rangle \approx \frac{2\kappa T(kL)}{M\omega^3} \text{Im} [\Psi(x, x')], \\ \quad 0 \leq x \leq L, \quad 0 < x' < L, \\ \langle \tilde{y}(x, \omega) \tilde{y}^*(x', \omega) \rangle \approx \frac{\kappa T(kL)}{M\omega^3} \text{Im} [\Psi(x, x')], \\ \quad 0 \leq x \leq L, \quad x' = 0, L, \end{cases}$$

и, следовательно,

$$N(\omega) = 4 \left(\frac{\omega_e}{c} \right)^2 \frac{\kappa T(kL)}{M\omega^3} \frac{\tanh \beta}{(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha \tanh^2 \beta)}, \quad (13)$$

где $\alpha = (kL/2)$, $\beta = (k'L/2) = (1/2)\alpha\gamma(\omega)$.

Выражение (13) определяет спектральную плотность $N(\omega)$ тепловых шумов $n(t)$ в акустическом отклике $\Delta\psi_1(t)$ при произвольном механизме внутреннего сопротивления (7). Формула (13) может быть также использована для вычисления спектральной плотности $N_T(\omega)$ тепловых шумов резонансных гравитационных антенн:

$$\begin{aligned} N_T(\omega) &= \left(\frac{2\omega_e}{c} \right)^{-2} N(\omega) = \\ &= \frac{\kappa T(kL)}{M\omega^3} \frac{\tanh \beta}{(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha \tanh^2 \beta)}. \end{aligned}$$

Анализ (13) при слабых диссипативных потерях показывает, что интенсивность теплового шума КГА минимальна, если выполняется условие $\beta^2(\omega) \ll \cos^2 \alpha(\omega) \approx 1$. Но

$$\cos^2 \alpha(\omega) = (1/2)[1 + \cos k(\omega_m)L]$$

и, следовательно, режим минимального теплового шума достигается при работе КГА на четных модах. Из (13) в режиме минимального теплового шума ($\cos^2 \alpha(\omega) = 1$) имеем:

$$N_m = N(\omega_m + \omega) \approx 4 \left(\frac{\omega_e}{c} \right)^2 \frac{\kappa T \pi^2}{M\omega_0^3 m Q_m}, \quad (14)$$

$$m = 2i, \quad i = 1, 2, \dots,$$

где $Q_m = \gamma^{-1}(\omega_m)$ — добротность m -й моды.

Принимая во внимание (5) и (14), находим пороговую амплитуду $[h_0]_{\min}$ при работе КГА на четных модах:

$$[h_0]_{\min} = \frac{2\pi}{L} \sqrt{\frac{\kappa T(1 + \Gamma_m)}{M\omega_1^3 m Q_m \hat{\tau}}}, \quad m = 2i, \quad i = 1, 2, \dots, \quad (15)$$

где $\Gamma_m = N_\nu/N_m$ — коэффициент шума фотоприемника. При $\Gamma_m \ll 1$ (т. е. при достаточно высокой мощности накачки W_0) формула (15) определяет потенциальную чувствительность КГА в режиме минимального теплового шума.

Основные результаты и выводы

I. Впервые в теории резонансных гравитационных антенн при анализе тепловых шумов использована ФДТ для непрерывных диссипативных систем. Такой подход позволил получить универсальную формулу для расчета спектральной плотности тепловых шумов при произвольном механизме внутреннего сопротивления. Кроме того, применение ФДТ дает возможность избежать введения дополнительных эквивалентных динамических параметров — эквивалентной длины $L_e = L/\pi^2$ и эквивалентной массы $M_e = M/4$, которые используются в теории резонансных гравитационных антенн, работающих в одночастотном режиме ($\omega_s = \omega_1$) [2].

II. При работе КГА на четных модах интенсивность теплового шума минимальна (режим минимального теплового шума). Пороговая чувствительность КГА в этом режиме определяется формулой (15). При упругом (вязком) внутреннем сопротивлении имеем: $\gamma(\omega) \sim \omega$ ($k'(\omega) \sim \omega^2$). В подобной ситуации $Q_m = \gamma^{-1}(\omega_m) \sim m^{-1}$ и, следовательно,

$$mQ_m = \text{const}, \quad m = 2i, \quad i = 1, 2, \dots$$

Таким образом, при пропорциональном скорости деформации упругом внутреннем сопротивлении пороговая чувствительность КГА на четных модах остается на уровне «стандартной» чувствительности (1). Возможность приема высокочастотных гравитационных импульсов можно рассматривать как достоинство нового режима работы КГА (чувствительность КГА по акустическому отклику падает с увеличением индекса $m = (2i - 1)$, $i = 1, 2, \dots$).

При неупругом внутреннем сопротивлении фаза γ не зависит от частоты (см. (8)). В этом случае $Q_m = \text{const}$ и, следовательно, пороговая чувствительность КГА при работе на четных модах $\omega_m = m\omega_0$ возрастает: $[h_0]_{\min} \sim m^{-1/2}$. К сожалению, при $(\omega_0/2\pi) \approx 10^3$ Гц заметный выигрыш в чувствительности становится возможным толь-

ко для достаточно высоких частот ($10^4 \div 10^5$ Гц). Применение в таком частотном диапазоне формулы К. Е. Сорокина требует дополнительного обоснования.

В заключение автор выражает благодарность профессору В. Н. Руденко за внимание к работе.

Литература

1. *Bagayev S.N., Bezrukov L.B., Gusev A.V. et al.* // Abstracts XI Conf. Laser Optics (S-P, 30 June–4 July 2003). S-P. GrPD-07. P. 69.
2. *Бичак И., Руденко В.Н.* Гравитационные волны в ОТО и проблема их обнаружения. М., 1987.
3. *Кулагин В.В., Полнарев А.Г., Руденко В.Н.* // ЖЭТФ. 1986. **91**, № 5(11). С. 1553.
4. *Гусев А.В., Руденко В.Н.* // Экспериментальные тесты теории гравитации. М., 1987.
5. *Сосулин Ю.Г., Рытов С.М.* Введение в статистическую радиофизику. Т. 2. М., 1978.
6. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теория упругости. М., 1978.
7. *Бабаков И.М.* Теория колебаний. М., 1958.

Поступила в редакцию
28.04.04