УДК 512.815.6

ОБ ОСЦИЛЛЯТОРНО-ФЕРМИОННЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЯХ ПРОСТЫХ АЛГЕБР ЛИ СЕРИИ B_n

О. В. Ильин

(*кафедра математики*)

В статье описываются фермионные представления алгебры Ли серии B_n. Вычислены коммутационные соотношения для образующих осцилляторно-фермионной алгебры.

1. Осцилляторно-фермионная реализация B_n

В статье описываются фермионные представления алгебры Ли серии B_n. Пусть

$$\Delta = [+\varepsilon_i + \varepsilon_j, -\varepsilon_i - \varepsilon_j, +\varepsilon_i, -\varepsilon_i]$$

— корневая система, соответствующая алгебре Ли B_n. Существуют $n+1$ операторов таких, что элементы базиса Картана–Вейля задаются следующими соотношениями:

$$H_i = c_i^+ c_i - c_{i+1}^+ c_{i+1} \ (1 \leqslant i \leqslant n-1), \quad H_n = 2c_n^+ c_n - 1;$$

$$E_{+\varepsilon_i+\varepsilon_j} = c_i^+ c_j^+, \quad E_{-\varepsilon_i-\varepsilon_j} = c_i c_j;$$

$$E_{+\varepsilon_i} = c_0 c_i^+, \quad E_{-\varepsilon_i} = c_0^+ c_i.$$

В данной статье будет рассматриваться только базис Шевалле. Генераторы алгебры B_n в этом базисе записываются следующим образом:

$$H_i = c_i^+ c_i - c_{i+1}^+ c_{i+1} \ (1 \leqslant i \leqslant n-1), \quad H_n = 2c_n^+ c_n - 1;$$

$$E_{+i} = c_i^+ c_{i+1}, \quad E_{-i} = c_i c_{i+1}^+;$$

$$E_{+n} = c_0 c_n^+, \quad E_{-n} = c_0^+ c_n.$$

Коммутационные соотношения между элементами Шевалле и Картана таковы:

$$[H_i, H_j] = 0, \quad [H_i, E_{\pm j}] = \pm K_{ij} E_{\pm j},$$
$$[E_{-i}, E_j] = \delta_{i,j} H_i, \tag{1}$$

где K_{ij} — матрица Картана для алгебры B_n.

Укажем антикоммутационные соотношения для введенных выше операторов ($[\ ,\ ]_+$ означает антикоммутатор). Рассмотрим сначала случай $n \geqslant l$, $m \geqslant 1$:

$$[c_l, c_m]_+ = [c_l^+, c_m^+]_+ = 0, \quad [c_l, c_m^+]_+ = \delta_{l,m}. \tag{2}$$

Оператор c_0 обладает следующими свойствами:

$$[c_0, c_k]_+ = [c_0^+, c_k^+]_+ = [c_0, c_k^+]_+ = 0, \quad n \geqslant k \geqslant 1, \tag{3}$$

$$[c_0, c_0^+] = 0. \tag{4}$$

Соотношение $[c_0, c_0^+] = 0$ следует из того факта, что $c_0^+ c_0 = c_0 c_0^+ = 1$. Соотношения (2)–(4) легко проверяются прямым вычислением с помощью (1). В заключение следует отметить еще одно важное свойство: $c_0^2 = c_0^{+2} = -1$ (см. [2]).

2. Переход к другому представлению

Операторы c_i, c_i^+, $i > 0$, образуют осцилляторно-фермионную алгебру, но добавление операторов c_0, c_0^+ приводит к тому, что полученные выше коммутационные соотношения не дают требуемую алгебру, так как $[c_0, c_0^+]_+ \neq 1$. Положение можно поправить переходом к иному представлению алгебры Ли B_n. Элементы алгебры B_n могут быть также выражены через другие $2n+1$ фермионные операторы $b_{\pm j}$, $n \geqslant j \geqslant 1$ и b_0. Пусть между операторами b и c имеются соотношения

$$c_j = (1/\sqrt{2})(b_j + b_{-j}^+), \quad c_j^+ = (1/\sqrt{2})(b_j^+ + b_{-j}),$$
$$j \neq 0;$$

$$c_0 = i(b_0 + b_0^+), \quad c_0^+ = -i(b_0 + b_0^+).$$

Пусть операторы b_j, $j = -n, \ldots, n$, — фермионные, т. е.

$$[b_k, b_j^+]_+ = \delta_{k,j}, \quad k, j = -n, \ldots, n,$$

тогда легко проверить, что соотношения (1)–(4) и $c_0^2 = c_0^{+2} = -1$ выполняются.

В новом представлении элементы базиса Шевалле записываются следующим образом:

$$H_j = b_j^+ b_j - b_{-j}^+ b_{-j} - b_{j+1}^+ b_{j+1} + b_{-j-1}^+ b_{-j-1},$$
$$n-1 \geqslant j \geqslant 1;$$

$$H_n = 2(b_n^+ b_n - b_{-n}^+ b_{-n});$$

$$E_i = b_j^+ b_{j+1} - b_{-j-1}^+ b_{-j}, \quad n-1 \geqslant j \geqslant 1;$$

$$E_{-j} = b_{j+1}^+ b_j - b_{-j}^+ b_{-j-1}, \quad n-1 \geqslant j \geqslant 1;$$

$$E_n = \sqrt{2}(b_0^+ b_{-n} - b_n^+ b_0), \quad E_{-n} = \sqrt{2}(b_0^+ b_n - b_{-n}^+ b_0).$$

Заметим, что в последних двух равенствах опущены комплексные единицы, а именно i и $-i$, соответственно, так как они не влияют на коммутационные соотношения.

Укажем одно интересное свойство. Рассмотрим алгебру B_2, базис Шевалле которой выражен через фермионные операторы b_i, и рассмотрим следующие операторы:

$$H = 2(b_1^+ b_1 - b_{-1}^+ b_{-1}),$$

$$X = E_{\varepsilon_1} = \sqrt{2}(b_0^+ b_{-1} - b_1^+ b_0), \quad Y = E_{\varepsilon_1}^+.$$

Эти операторы задают вложение алгебры Ли A_1 в B_2.

Переход от представления с операторами c к операторам b понадобится также для получения старших весовых состояний. Подробно этот вопрос будет рассмотрен в п. 4.

3. Коммутационные соотношения

Представив образующие Шевалле через фермионные операторы, прямым вычислением получим коммутационные соотношения между образующими Шевалле и b_i^+ ([,] означает коммутатор):

$$[E_{-n}, b_i] = \sqrt{2}(\delta_{i,-n}b_0 - \delta_{i,0}b_n), \quad i = -n, \ldots, n; \tag{5}$$

$$[E_{-n}, b_i^+] = \sqrt{2}(\delta_{i,n}b_0^+ - \delta_{i,0}b_{-n}^+), \quad i = -n, \ldots, n; \tag{6}$$

$$\begin{gathered} [E_{-j}, b_i^+] = \delta_{i,j}b_{j+1}^+ - \delta_{i,-j-1}b_{-j}^+, \\ i = -n, \ldots, n, \quad j = 1, \ldots, n-1; \end{gathered} \tag{7}$$

$$\begin{gathered} [E_{-j}, b_i] = \delta_{i,-j}b_{-i-1} - \delta_{i,j+1}b_j, \\ i = -n, \ldots, n, \quad j = 1, \ldots, n-1; \end{gathered} \tag{8}$$

Осталось получить коммутационные соотношения для E_i. Заметим, что имеет место соотношение $E_{-i} = E_i^+$. Легко показать, что

$$[E_i, b_k] = -[E_{-i}, b_k^+]^+, \quad [E_i, b_k^+] = -[E_{-i}, b_k]^+.$$

Таким образом, все необходимые коммутаторы можно получить, используя формулы (5)–(8).

4. Старшие весовые состояния

Пусть λ_i, $n \geqslant i \geqslant 1$, — фундаментальные веса алгебры B_n. Как известно, они выражаются через элементы матрицы $d_{i,j}$, обратной матрице Картана, по следующему правилу: $\langle \lambda_i, \lambda_j \rangle = d_{i,j}$, причем для серии B_n получается следующее:

$$\lambda_i = \sum_{1 \leqslant m \leqslant i} \varepsilon_m, \quad \text{если } i \neq n, \quad \lambda_n = \frac{1}{2} \sum_{1 \leqslant m \leqslant n} \varepsilon_m.$$

Соответствующие фундаментальным весам старшие весовые состояния $|\lambda_i\rangle$ определяются соотношениями

$$H_j|\lambda_i\rangle = \delta_{i,j}|\lambda_i\rangle, \quad E_{+j}|\lambda_i\rangle = 0, \quad 1 \leqslant i, j \leqslant n; \tag{9}$$

$$E_{-j}|\lambda_i\rangle = 0, \ \text{если} \ j \neq i, \ \text{и} \ E_{-i}|\lambda_i\rangle \neq 0. \tag{10}$$

Операторы b_{i+1}^+ в полной аналогии с квантовой механикой действуют как повышающие, т. е. переводят i-частичную волновую функцию (весовое состояние) в $(i+1)$-частичную, а именно

$$\begin{gathered} |\lambda_i\rangle = b_i^+ b_{i-1}^+ \ldots b_1^+|0\rangle, \quad \langle\lambda_i| = \langle 0|b_1 b_2 \ldots b_i, \\ 1 \leqslant i \leqslant n-1. \end{gathered} \tag{11}$$

Операторы b_j действуют как понижающие:

$$|\lambda_i\rangle = b_{i+1}|\lambda_{i+1}\rangle.$$

Выражения (11) проверяются прямой подстановкой в выражения (9)–(10), теперь осталось найти последнее весовое состояние. Сразу заметим, что $|\lambda_n\rangle \neq b_n^+|\lambda_{n-1}\rangle$. Это связано с тем, что выражения $E_{\pm n}$, H_n через фермионные операторы не схожи с выражениями для $E_{\pm i}$, H_i, $i \neq n$.

Можно получить весовые состояния с отрицательными индексами следующего вида:

$$|\lambda_{-p}\rangle \equiv b_{-p-1}^+ b_{-p-2}^+ \ldots b_{-n}^+ b_n^+ \ldots b_1^+|0\rangle.$$

Однако для этих весовых состояний $\lambda_{-p} = \lambda_p$, т. е. их нельзя назвать новыми. Таким образом, переход от $|\lambda_{-p}\rangle$ к $|\lambda_p\rangle$ эквивалентен замене b_j на b_{-j}^+. В итоге получаем следующий набор правил:

$$b_j^+|\lambda_p\rangle = 0, \quad 0 \leqslant j \leqslant p;$$

$$b_j|\lambda_p\rangle = 0, \quad j > p \cup j \leqslant -1;$$

$$b_{-j}|\lambda_{-p}\rangle = 0, \quad 0 \leqslant j \leqslant p;$$

$$b_{-j}^+|\lambda_{-p}\rangle = 0, \quad j > p \cup j \leqslant -1.$$

Рассмотрим выражения $b_n^+ \ldots b_1^+|0\rangle$ и $b_{-1}^+ b_{n-1}^+ \ldots \ldots b_1^+|0\rangle$. Отметим, что

$$H_i b_n^+ \ldots b_1^+|0\rangle = (2\delta_{i,n} + \delta_{i,n-2})b_n^+ \ldots b_1^+|0\rangle,$$

$$H_i b_{-1}^+ b_{n-1}^+ \ldots b_1^+|0\rangle = = (-\delta_{i,1} + \delta_{i,n-1} - \delta_{i,n-2})b_{-1}^+ b_{n-1}^+ \ldots b_1^+|0\rangle.$$

Таким образом, получается следующее:

$$b_n^+ \ldots b_1^+|0\rangle = |2\lambda_n + \lambda_{n-2}\rangle,$$

$$b_{-1}^+ b_{n-1}^+ \ldots b_1^+|0\rangle = |-\lambda_1 + \lambda_{n-1} - \lambda_{n-2}\rangle.$$

Этими двумя выражениями завершается перечисление всех возможных старших весовых состояний. В заключение заметим, что представления, генерируемые последними двумя состояниями, являются неприводимыми, но, очевидно, не фундаментальными.

Автор благодарен А. В. Овчинникову за полезные замечания и внимание к работе.

Литература

1. *Gervais J., Saveliev M.* // W-geometry of the Toda systems associated with non-exceptional simple Lie algebras. Preprint LPTENS93/47.
2. *Bourbaki N.* Elements de Mathematiques, Groups et Algebres de Lie. Paris, 1968.
3. *Гото М., Гроссханс Ф.* Полупростые алгебры Ли. Новокузнецк, 1998.
4. Dictionary on Lie Algebras and Superalgebras. Academic Press, 2000.

Поступила в редакцию
16.12.03