УДК 517.956.224

К ЗАДАЧЕ ДИРИХЛЕ–НЕЙМАНА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА ВНЕ РАЗРЕЗОВ НА ПЛОСКОСТИ

П. А. Крутицкий, К. В. Прозоров

(*кафедра математики*)

E-mail: kprozorov@afrodita.phys.msu.su

Изучена краевая задача для уравнения Гельмгольца вне разрезов на плоскости. При этом на одной стороне каждого разреза задается условие Дирихле, а на другой — условие Неймана. Доказаны теоремы существования и единственности решения краевой задачи. Получено интегральное представление для решения в виде потенциалов. Плотность в потенциалах определяется из однозначно разрешимой системы интегральных уравнений.

В работах [1, 2] были изучены задачи Дирихле и Неймана для уравнения Гельмгольца вне разрезов на плоскости. В [3, 4] изучались смешанные задачи для уравнения Гельмгольца, когда на одной совокупности разрезов задается условие Дирихле, а на другой — условие Неймана. В настоящей работе изучается краевая задача для уравнения Гельмгольца вне разрезов на плоскости, при этом на одной стороне каждого разреза задано условие Дирихле, а на другой — условие Неймана.

На плоскости $x=(x_1,x_2)\in\mathbf{R}^2$ рассмотрим совокупность простых разомкнутых кривых $\Gamma_1,\ldots,\Gamma_N$ класса $C^{2,\lambda}$, $\lambda\in(0,1]$, не имеющих общих точек, в том числе и концов. Эту совокупность кривых будем называть контуром Γ. Пусть контур Γ параметризован и в качестве параметра выступает дуговая абсцисса (длина дуги) s: $\Gamma_n=\{x\colon x=x(s)=(x_1(s),x_2(s)),\ s\in[a_n,b_n]\}$, $n=1,\ldots,N$. Параметризацию выберем так, чтобы для различных n отрезки $[a_n,b_n]$ на оси $0s$ не имели общих точек, в том числе и концов. Вектор касательной к Γ в точке $x(s)$ обозначим $\tau_x=\{\cos\alpha(s),\sin\alpha(s)\}$, а вектор нормали, совпадающий с вектором касательной при повороте на угол $\pi/2$ против часовой стрелки, обозначим $\mathbf{n}_x=\{\sin\alpha(s),-\cos\alpha(s)\}$. При выбранной параметризации $x_1'(s)=\cos\alpha(s)$, $x_2'(s)=\sin\alpha(s)$. Предположим, что плоскость $\mathbf{R}^2$ разрезана вдоль контура Γ. Через Γ^+ обозначим ту сторону контура Γ, которая остается слева при возрастании параметра s, а через Γ^- — противоположную сторону. Совокупность отрезков оси Os, отвечающих Γ, будем также обозначать Γ. Через X обозначим множество точек плоскости, состоящее из концов Γ: $X=\bigcup_{n=1}^N(x(a_n)\cup x(b_n))$.

Будем говорить, что функция $\mathcal{F}(s)$, определенная на Γ, принадлежит банахову пространству $C^r_\varkappa(\Gamma)$, $r\in(0,1]$, $\varkappa\in[0,1)$, если $\mathcal{F}_0(s)=\mathcal{F}(s)\prod_{n=1}^N|[(s-a_n)(s-b_n)]^\varkappa|\in C^{0,r}(\Gamma)$. Норма в пространстве $C^r_\varkappa(\Gamma)$ определяется формулой $\|\mathcal{F}(s)\|_{C^r_\varkappa(\Gamma)}=\|\mathcal{F}_0(s)\|_{C^{0,r}(\Gamma)}$.

Будем говорить, что функция $u(x)=u(x_1,x_2)$ принадлежит классу гладкости $\mathcal{G}$, если: 1) $u(x)\in C^0(\overline{\mathbf{R}^2\setminus\Gamma})$, т. е. $u(x)$ непрерывна вне Γ, непрерывно продолжима на Γ слева и справа во всех точках, а также непрерывно продолжима на концы Γ; 2) $u_{x_1},u_{x_2}\in C^0(\overline{\mathbf{R}^2\setminus\Gamma}\setminus X)$, где X — множество концов Γ; 3) на концах разрезов Γ функции u_{x_1},u_{x_2} могут иметь интегрируемые особенности, т. е. при $x\to x(d)\in X$ справедлива оценка

$$|u_{x_j}(x)|\leqslant A|x-x(d)|^\delta,\quad j=1,2, \tag{1}$$

где константы $\delta>-1$, $A>0$ и $d=a_n$ либо $d=b_n$, $n=1,\ldots,N$.

Сформулируем смешанную задачу для уравнения Гельмгольца вне системы разрезов на плоскости.

Задача $\mathcal{U}$. Найти функцию $u(x)$ из класса $\mathcal{G}$, удовлетворяющую в $\mathbf{R}^2\setminus\Gamma$ в классическом смысле уравнению Гельмгольца

$$\triangle u+k^2u=0,\quad 0\leqslant\arg k<\pi, \tag{2}$$

граничным условиям

$$u(x)|_{\Gamma^+}=f^+(s), \tag{3}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial\mathbf{n}_x}\right|_{\Gamma^-}=f^-(s) \tag{4}$$

и условиям на бесконечности. Если $\arg k=0$, т. е. $k=\operatorname{Re}k>0$, то на бесконечности потребуем выполнения условий излучения Зоммерфельда:

$$\begin{gathered}|u(x)|=O\left(|x|^{-1/2}\right),\\ \frac{\partial u(x)}{\partial|x|}-iku(x)=o\left(|x|^{-1/2}\right),\quad |x|\to\infty.\end{gathered} \tag{5}$$

Если $0<\arg k<\pi$, т. е. $\operatorname{Im}k>0$, то на бесконечности потребуем выполнение следующих условий:

$$|u(x)|=o\left(|x|^{-1/2}\right),\quad |\nabla u|=o\left(|x|^{-1/2}\right),\quad |x|\to\infty. \tag{6}$$

Аналог задачи $\mathcal{U}$ для уравнения Лапласа изучен в [5]. Далее под $\int_\Gamma\ldots ds$ будем понимать $\sum_{n=1}^N\int_{a_n}^{b_n}\ldots ds$. Используя метод энергетических тождеств, можно доказать следующее утверждение.

Теорема 1. *Если* $\Gamma\in C^{2,\lambda}$, $\lambda\in(0,1]$, *тогда задача* $\mathcal{U}$ *имеет не более одного решения.*

Будем строить решение задачи $\mathcal{U}$, предполагая, что $f^+(s)\in C^{1,\lambda}(\Gamma)$, $f^-(s)\in C^{0,\lambda}(\Gamma)$. Заметим, что коэффициент Гёльдера λ при определении гладкости контура Γ и функций $f^+(s)$, $f^-(s)$ предполагается одним и тем же. Если эти коэффициенты различны, то в качестве λ следует брать наименьший. Вместо граничного условия (3) запишем эквивалентное:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \tau_x}\right)\Bigg|_{\Gamma^+} = {f'}^+(s), {f'}^+(s)\equiv \frac{df^+(s)}{ds}\in C^{0,\lambda}(\Gamma), \quad (7)$$

$$u(x(a_n)) = f^+(a_n), \quad n=1,\dots,N. \quad (8)$$

Через $H_0^{(1)}(z)$ обозначим функцию Ханкеля I рода нулевого порядка, которая является сингулярным решением уравнения (2).

Решение задачи $\mathcal{U}$ можно получить с помощью теории потенциала для уравнения (2). Ищем решение задачи $\mathcal{U}$ в виде

$$u[\mu,\nu](x) = V[\mu](x) + T[\nu](x), \quad (9)$$

где $V[\mu](x) = \frac{i}{4}\int_\Gamma \mu(\sigma)H_0^{(1)}(k|x-y(\sigma)|)d\sigma$ — потенциал простого слоя для уравнения (2) и $T[\nu](x) = \frac{i}{4}\int_\Gamma \nu(\sigma)U(x,\sigma)d\sigma$ — угловой потенциал для уравнения (2). Угловой потенциал для уравнения Гельмгольца изучался в [1]. Плотности $\mu(s)$, $\nu(s)$ будем разыскивать в банаховом пространстве $C^r_\varkappa(\Gamma)$, $r\in(0,1]$, $\varkappa\in[0,1)$. Ядро углового потенциала $U(x,\sigma)$ определено на каждой дуге Γ_n $(n=1,\dots,N)$ формулой

$$U(x,\sigma) = \int_{a_n}^{\sigma}\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_y}H_0^{(1)}(k|x-y(\xi)|)d\xi, \quad \sigma\in[a_n,b_n],$$

где $y=y(\xi)=(y_1(\xi),y_2(\xi))$, $|x-y(\xi)| = \sqrt{(x_1-y_1(\xi))^2+(x_2-y_2(\xi))^2}$. Ниже будем полагать, что плотность углового потенциала удовлетворяет дополнительным условиям [1, 2]:

$$\int_{a_n}^{b_n}\nu(\sigma)d\sigma = 0, \quad n=1,\dots,N. \quad (10)$$

Интегрируя $T[\nu](x)$ по частям и используя (10), выразим угловой потенциал через потенциал двойного слоя

$$T[\nu](x) = -\frac{i}{4}\int_\Gamma \rho(\sigma)\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_y}H_0^{(1)}(k|x-y(\sigma)|)\,d\sigma,$$

где $\rho(\sigma)=\int_{a_n}^{\sigma}\nu(\xi)d\xi$, $\sigma\in[a_n,b_n]$, $n=1,\dots,N$. Очевидно, что потенциалы $T[\mu](x)$ и $V[\nu](x)$ удовлетворяют как уравнению (2) вне Γ, так и условиям на бесконечности (5), (6).

Свойства потенциалов $T[\mu](x)$ и $V[\nu](x)$ изучены в [1]. В работе [1] показано, что если $\mu(s),\nu(s)\in C^r_\varkappa(\Gamma)$ с $r\in(0,1]$, $\varkappa\in[0,1)$, и выполнены условия (10), то потенциалы $T[\mu](x)$, $V[\nu](x)$ принадлежат классу $\mathcal{G}$. В частности, неравенство (1) выполняется с $\delta=-\varkappa$, если $\varkappa\in(0,1)$. Более того, функция (9) принадлежит классу $\mathcal{G}$ и удовлетворяет всем условиям задачи $\mathcal{U}$ за исключением граничных условий (3), (4).

Чтобы удовлетворить граничным условиям, мы подставляем функцию (9) в условия (7), (4), используем предельные формулы для углового потенциала из [1] и получаем интегральные уравнения для плотностей $\mu(s)$, $\nu(s)$ на Γ:

$$\begin{gathered}\frac{i}{4}\int_\Gamma \frac{\partial}{\partial s}\Big(\mu(\sigma)H_0^{(1)}(k|x(s)-y(\sigma)|)+ \\ +\nu(\sigma)U(x(s),\sigma)\Big)d\sigma + \frac{\nu(s)}{2} = {f'}^+(s), \\ -\frac{\mu(s)}{2}+\frac{i}{4}\int_\Gamma \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_x}\Big(\mu(\sigma)H_0^{(1)}(k|x(s)-y(\sigma)|)+ \\ +\nu(\sigma)U(x(s),\sigma)\Big)d\sigma = f^-(s).\end{gathered} \quad (11)$$

Подставив функцию (9) в условия (8), получим дополнительные уравнения для $\nu(s)$, $\mu(s)$:

$$V[\mu](x(a_n)) + T[\nu](x(a_n)) = f^+(a_n), \quad n=1,\dots,N. \quad (12)$$

Из приведенных рассуждений вытекает

Теорема 2. *Пусть* $\Gamma\in C^{2,\lambda}$, $f^+(s)\in C^{1,\lambda}(\Gamma)$, $f^-(s)\in C^{0,\lambda}(\Gamma)$, $\lambda\in(0,1]$. *Если* $\nu(s),\mu(s)\in C^r_\varkappa(\Gamma)$ — *решение системы (10)–(12), где* $r\in(0,1]$, $\varkappa\in[0,1)$, *то формула (9) дает решение задачи* $\mathcal{U}$.

Уравнения (11) можно записать в виде $(s\in\Gamma)$:

$$\begin{gathered}\nu(s)+\frac{1}{\pi}\int_\Gamma \mu(\sigma)\frac{d\sigma}{\sigma-s}+\int_\Gamma \nu(\sigma)v_1(s,\sigma)d\sigma+ \\ +\int_\Gamma \mu(\sigma)v_2(s,\sigma)d\sigma = 2{f'}^+(s), \\ -\mu(s)-\frac{1}{\pi}\int_\Gamma \nu(\sigma)\frac{d\sigma}{\sigma-s}+\int_\Gamma \mu(\sigma)v_3(s,\sigma)d\sigma- \\ -\int_\Gamma \nu(\sigma)v_4(s,\sigma)d\sigma = 2f^-(s),\end{gathered} \quad (13)$$

где $v_1(s,\sigma)=\frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial s}U(x(s),\sigma)$, $v_2(s,\sigma)=\frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial s}H_0^{(1)}\times(k|x(s)-y(\sigma)|)-\frac{1}{\pi(\sigma-s)}$, $v_3(s,\sigma)=\frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_x}H_0^{(1)}(k|x(s)-y(\sigma)|)$, $v_4(s,\sigma)=-\frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_x}U(x(s),\sigma)-\frac{1}{\pi(\sigma-s)}$. Из лемм 2, 3 работы [1] и лемм 1, 3 работы [2] вытекает, что $v_3(s,\sigma)\in C^{0,\lambda}(\Gamma\times\Gamma)$ и $v_j(s,\sigma)\in C^{0,p_0}(\Gamma\times\Gamma)$ при $j=1,2,4$;

$$p_0=\begin{cases}\lambda, & \text{если } 0<\lambda<1,\\ 1-\varepsilon_0, & \text{для любого } \varepsilon_0\in(0,1], \text{ если } \lambda=1.\end{cases} \quad (14)$$

Складывая и вычитая уравнения (13) и произведя замену неизвестных функций $\rho_1(s)=(\nu(s)-\mu(s))\in C^r_\varkappa(\Gamma)$, $\rho_2(s)=(\nu(s)+\mu(s))\in C^r_\varkappa(\Gamma)$,

$$\nu(s)=(\rho_1(s)+\rho_2(s))/2, \quad \mu(s)=(\rho_2(s)-\rho_1(s))/2, \quad (15)$$

запишем уравнения (13) в виде ($s \in \Gamma$):

$$\rho_j(s) + (-1)^j \frac{1}{\pi} \int\limits_{\Gamma} \rho_j(\sigma) \frac{d\sigma}{\sigma - s} + \\ + \sum_{l=1}^{2} \int\limits_{\Gamma} \rho_l(\sigma) Y_{jl}(s,\sigma)\, d\sigma = \\ = 2(f'^{+}(s) - (-1)^j f^{-}(s)) \in C^{0,\lambda}(\Gamma), \quad j = 1,2, \tag{16}$$

где $Y_{jl}(s,\sigma) = \frac{1}{2}\{v_1(s,\sigma) + (-1)^l v_2(s,\sigma) - (-1)^{l+j} v_3(s,\sigma) + (-1)^j v_4(s,\sigma)\}$. Из гладкости функций $v_1(s,\sigma), \ldots, v_4(s,\sigma)$ вытекает, что $Y_{jl}(s,\sigma) \in C^{0,p_0}(\Gamma \times \Gamma)$, $j,l = 1,2$; p_0 берется из (14).

В терминах $\rho_1(s)$, $\rho_2(s)$ условия (10), (12) примут вид

$$\int\limits_{a_n}^{b_n} (\rho_1(\sigma) + \rho_2(\sigma)) d\sigma = 0, \\ V[(\rho_2(\sigma) - \rho_1(\sigma))/2](x(a_n)) + \\ + T[(\rho_1(\sigma) + \rho_2(\sigma))/2](x(a_n)) = f^{+}(a_n), \\ n = 1, \ldots, N. \tag{17}$$

Система (16), (17) является частным случаем систем, изученных в работе [6]. По теореме 1 из [6] все решения $\rho_1(s)$, $\rho_2(s)$ системы (16), (17), принадлежащие $C^r_{\varkappa}(\Gamma)$ с $r \in (0,1]$, $\varkappa \in [0,1)$, представимы в виде $\rho_j(s) = \rho_{j*}(s)/Q_j(s)$, $j = 1,2$; где $\rho_{1*}(s), \rho_{2*}(s) \in C^{0,\omega}(\Gamma)$, $\omega = \min\{\lambda, 1/4\}$, $Q_1(s) = \prod_{n=1}^{N} |s - a_n|^{1/4} |s - b_n|^{3/4} \operatorname{sign}(s - a_n) \in C^{0,1/4}(\Gamma)$, $Q_2(s) = \prod_{n=1}^{N} |s - a_n|^{3/4} |s - b_n|^{1/4} \operatorname{sign}(s - a_n) \in C^{0,1/4}(\Gamma)$. Отсюда следует, что $\rho_1(s)$, $\rho_2(s) \in C^{\omega}_{3/4}(\Gamma)$.

Докажем, что среди функций $\rho_1(s), \rho_2(s) \in C^{\omega}_{3/4}(\Gamma)$ однородная система (16), (17) имеет только тривиальное решение. Пусть $\rho_1^0(s)$, $\rho_2^0(s)$ — решение однородной системы (16), (17) в пространстве $C^{\omega}_{3/4}(\Gamma)$, где $\omega = \min\{\lambda, 1/4\}$. Тогда функции $\nu^0(s) = (\rho_1^0(s) + \rho_2^0(s))/2$, $\mu^0(s) = (\rho_2^0(s) - \rho_1^0(s))/2$, построенные по формулам (15), дают решение однородной системы (10) — (12). Очевидно, что однородной задаче $\mathcal{U}$ (с $f^{+}(s) \equiv f^{-}(s) \equiv 0$) соответствует однородная система (10)–(12). Согласно теореме 2, функция $u^0(x) = V[(\rho_1^0(s) - \rho_2^0(s))/2](x) + T[(\rho_1^0(s) + \rho_2^0(s))/2](x)$ является решением однородной задачи $\mathcal{U}$. Используя теорему 1, имеем: $u^0 \equiv 0$. Из предельных формул для касательных и нормальных производных потенциалов [1] получаем

$$\rho_j^0(s) = \left(\frac{\partial u^0}{\partial \tau_x} - (-1)^j \frac{\partial u^0}{\partial \mathbf{n}_x} \right)\Bigg|_{x(s) \in \Gamma^{+}} - \\ - \left(\frac{\partial u^0}{\partial \tau_x} - (-1)^j \frac{\partial u^0}{\partial \mathbf{n}_x} \right)\Bigg|_{x(s) \in \Gamma^{-}} \equiv 0,$$

где $j = 1,2$. Тем самым однородная система (16), (17) имеет только тривиальное решение среди функций $\rho_1^0(s), \rho_2^0(s) \in C^{\omega}_{3/4}(\Gamma)$, $\omega = \min\{\lambda, 1/4\}$. Из пункта 1 теоремы 1 и теоремы 2 работы [6] вытекает

Теорема 3. *Пусть* $\Gamma \in C^{2,\lambda}$, $f^{+}(s) \in C^{1,\lambda}(\Gamma)$, $f^{-}(s) \in C^{0,\lambda}(\Gamma)$, $\lambda \in (0,1]$. *Тогда неоднородная система* (16), (17) *имеет среди функций* $\rho_1(s)$, $\rho_2(s) \in C^r_{\varkappa}(\Gamma)$ $(r \in (0,1],\ \varkappa \in [0,1))$ *единственное решение. Это решение представимо в виде* $\rho_j(s) = \rho_{j*}(s)/Q_j(s)$, $j = 1,2$, *где* $\rho_{1*}(s)$, $\rho_{2*}(s) \in C^{0,\omega}(\Gamma)$, $\omega = \min\{\lambda, 1/4\}$, *следовательно,* $\rho_1(s), \rho_2(s) \in C^{\omega}_{3/4}(\Gamma)$.

Решение $\mu(s), \nu(s) \in C^{\omega}_{3/4}(\Gamma)$ системы (10)–(12) определяется по формулам (15), в которых $\rho_1(s)$, $\rho_2(s)$ — решение системы (16), (17), гарантированное теоремой 3. Из теорем 1 и 2 следует

Теорема 4. *Пусть* $\Gamma \in C^{2,\lambda}$, $f^{+}(s) \in C^{1,\lambda}(\Gamma)$, $f^{-}(s) \in C^{0,\lambda}(\Gamma)$, $\lambda \in (0,1]$. *Тогда решение задачи* $\mathcal{U}$ *существует, единственно и дается формулой* (9), *в которой плотности* $\mu(s), \nu(s)$ *берутся из* (15), *где функции* $\rho_1(s), \rho_2(s) \in C^{\omega}_{3/4}(\Gamma)$ $(\omega = \min\{\lambda, 1/4\})$ — *решение системы* (16), (17), *гарантированное теоремой 3.*

Теорема 4 устанавливает существование и единственность классического решения задачи $\mathcal{U}$. Как следует из определения класса $\mathcal{G}$, градиент решения задачи $\mathcal{U}$ может иметь особенности на концах Γ. Из пункты 3 теоремы 5 работы [1] неравенство (1) выполняется с $\delta = -3/4$. Выпишем явные асимптотические формулы, описывающие особенности ∇u на концах Γ. Пусть $x(d)$ — один из концов Γ, $d = a_n$ или $d = b_n$, $n = 1, \ldots, N$, т. е. $x(d) \in X$. Введем в окрестности $x(d)$ полярную систему координат $x_1 = |x - x(d)| \cos\varphi$, $x_2 = |x - x(d)| \sin\varphi$. Напомним, что $\alpha(s)$ — угол между направлением оси Ox_1 и вектором касательной τ_x в точке $x(s) \in \Gamma$. Будем считать, что $\varphi \in (\alpha(d), \alpha(d) + 2\pi)$, если $d = a_n$, и $\varphi \in (\alpha(d) - \pi, \alpha(d) + \pi)$, если $d = b_n$, $n = 1, \ldots, N$. Полагаем по непрерывности, что $\alpha(a_n) = \alpha(a_n + 0)$, $\alpha(b_n) = \alpha(b_n - 0)$. Введем функции $\rho^{a_n}_{3/4}(s) = \rho_2(s)|s - a_n|^{3/4}$, $\rho^{a_n}_{1/4}(s) = \rho_1(s)|s - a_n|^{1/4}$, являющиеся гёльдеровыми на Γ в окрестности a_n, и функции $\rho^{b_n}_{3/4}(s) = \rho_1(s)|s - b_n|^{3/4}$, $\rho^{b_n}_{1/4}(s) = \rho_2(s)|s - b_n|^{1/4}$ — гёльдеровые на Γ в окрестности b_n. Повторяя рассуждения из [7], получим следующую теорему.

Теорема 5. *Пусть* $x \to x(d) \in X$, *где* $d = a_n$ *или* $d = b_n$, $n = 1, \ldots, N$. *Тогда в окрестности точки* $x(d)$ *для производных решения задачи* $\mathcal{U}$ *справедливы формулы:*

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}\bigg|_{x \to x(d)} = \frac{(-1)^{j(d)} \rho^d_{3/4}(d)}{2|x - x(d)|^{3/4}} \sin\theta^d_{3/4} + \\ + \frac{\rho^d_{1/4}(d)}{2|x - x(d)|^{1/4}} \cos\theta^d_{1/4} + O(1),$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x_2}\right|_{x\to x(d)} = \frac{(-1)^{j(d)-1}\rho^d_{3/4}(d)}{2|x-x(d)|^{3/4}}\cos\theta^d_{3/4}+ +\frac{\rho^d_{1/4}(d)}{2|x-x(d)|^{1/4}}\sin\theta^d_{1/4}+O(1),$$

где $\theta^{a_n}_{3/4} = (3/4)\varphi + (1/4)\alpha(a_n)$, $\theta^{b_n}_{3/4} = (3/4)\varphi + (1/4)\alpha(b_n) - 3\pi/4$, $\theta^{a_n}_{1/4} = (1/4)\varphi + (3/4)\alpha(a_n) + \pi/2$, $\theta^{b_n}_{1/4} = (1/4)\varphi + (3/4)\alpha(b_n) - 3\pi/4$; $j(d) = 2$ *при* $d = a_n$; $j(d) = 1$ *при* $d = b_n$, $n = 1, \ldots, N$; *через* $O(1)$ *обозначены функции, непрерывные в окрестности точки* $x(d)$, *разрезанной вдоль* Γ. *Более того, функции, обозначенные как* $O(1)$, *непрерывны и в самой точке* $x(d)$.

Авторы выражают искреннюю благодарность А. И. Сгибневу за полезные обсуждения. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 02-01-01067).

Литература

1. *Крутицкий П.А.* ЖВМ и МФ. 1994. **34**, № 8–9. С. 1237.
2. *Крутицкий П.А.* // ЖВМ и МФ. 1994. **34**, № 11. С. 1652.
3. *Крутицкий П.А.* // ЖВМ и МФ. 1996. **36**, № 8. С. 127.
4. *Крутицкий П.А.* // Дифф. уравнения. 1996. **32**, № 9. С. 1153.
5. *Крутицкий П.А., Сгибнев А.И.* // Дифф. уравнения. 2001. № 37, № 10. С. 1299.
6. *Крутицкий П.А., Колыбасова В.В.* // ДАН. 2004. **394**, № 4. С. 444.
7. *Крутицкий П.А., Сгибнев А.И.* // Дифф. уравнения. 2003. **39**, № 9. С. 1165.

Поступила в редакцию
05.12.03