ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 530.145

# ПЕРЕНОРМИРОВКА ЭНЕРГИИ КАЗИМИРА С ЛОГАРИФМИЧЕСКИМИ РАСХОДИМОСТЯМИ

**И. Ю. Малахов, К. А. Свешников, П. К. Силаев**
(*кафедра квантовой теории и физики высоких энергий*)
E-mail: silaev@bog.msu.ru

**Предложена процедура перенормировки вакуумной энергии поля для того случая, когда энергии уровней известны только численно. При этом не требуется ни явного вида трансцендентного уравнения для определения уровней, ни аналитического выражения для их асимптотики. Процедура дает однозначный ответ даже при наличии логарифмической расходимости в выражении для вакуумной энергии.**

## Введение

Еще в 1948 г. Казимир [1] нашел поправки к энергии макроскопической системы, обусловленные вакуумными флуктуациями квантованного электромагнитного поля. Эффект Казимира является наблюдаемым квантовым эффектом, играющим существенную роль как на микро-, так и на макроуровнях в различных областях физики [2, 3]. Между тем вычисление вакуумной энергии квантованного поля при наличии нетривиальных граничных условий (далее — энергии Казимира), за исключением простейших случаев свободных полей, заключенных в полостях с плоской границей, представляет собой весьма серьезную проблему.

В частности, простейшей системе — свободному полю в шаре, т. е. системе, в которой можно выписать явные трансцендентные уравнения для спектра, было посвящено достаточно большое количество работ: электромагнитное поле внутри проводящей сферы было исследовано в [4–6]; фермионы, заключенные внутри сферы с помощью условия запирания, принятого в моделях кварковых мешков — в [7–11]; эффекты, возникающие из-за ненулевой массы фермионов, были исследованы в [12, 13]. Тем не менее первые аналитические результаты в достаточно замкнутой форме были получены лишь в работе [14] для массивного скалярного поля и в [15] для фермионов. Следует подчеркнуть, что эти результаты существенным образом опираются на возможность выписать явное трансцендентное уравнение для спектра: при наличии явных уравнений для уровней возможен переход от сумм, содержащих неявные выражения, к интегралам, которые содержат только явные выражения [16].

Одной из наиболее принципиальных трудностей при перенормировке энергии Казимира является неоднозначность, связанная с логарифмическими расходимостями. Действительно, в отсутствие логарифмически расходящихся членов (например, в случае безмассовых полей в областях с плоской границей), энергия определяется единственным размерным параметром $L$ — характерным линейным размером. Второй размерный параметр задачи — параметр регуляризации $\alpha$, который мы выберем также с размерностью длины. Поэтому в отсутствие логарифмической расходимости «минимальное вычитание», состоящее в отбрасывании в выражении для энергии сингулярных по $\alpha$ членов, является не только естественной, но и хорошо обоснованной процедурой. Из очевидных размерных соображений любое слагаемое, пропорциональное $\alpha^{-s}$ $(s>0)$, будет зависеть от $L$ как $L^{s-1}$, т. е. будет пропорционально неотрицательной степени $L$. Тем самым мы можем нормировать окончательный ответ в точке $L=\infty$, в которой энергия Казимира должна обращаться в нуль, и вычесть все сингулярные слагаемые. После вычитания в пределе $\alpha\to 0$ останется только слагаемое $c\alpha^0/L$ (с правильной зависимостью от $L$), которое и составляет окончательный ответ.

При наличии логарифмической расходимости вычитание становится неоднозначным: чтобы перенормировать слагаемое $c\alpha^0\ln(\alpha/L)/L$, из него следует вычесть $c\alpha^0\ln(d\alpha/L)/L$, где $d$ — произвольная константа. В результате окончательный ответ будет содержать неопределенность, связанную с $d$. Нормировка окончательного ответа при $L\to\infty$ в данном случае невозможна, поскольку неопределенность имеет вид $\mathrm{const}/L$, т. е. неопределенность возникает как раз в той константе, которую нам необходимо найти.

Для свободных полей в шаре логарифмическая расходимость возникает и в безмассовом случае как следствие кривизны границы. При этом неоднозначность в процедуре перенормировки обходится с помощью следующего приема [3, 9]: к «внутренней» задаче (рассматриваются поля внутри полости) добавляется «внешняя» задача (рассматриваются поля вне полости). В указанном случае логарифмические расходимости внешней и внутренней задач компенсируются, и процедура перенормировки становится однозначной. Однако в таком подходе речь идет уже не о перенормировке вакуумной энергии полей внутри полости, а о перенормировке вакуумной энергии модифицированной задачи, когда поля существуют как внутри, так и вне полости.

Целью настоящей работы является разработка метода, который позволил бы находить энергию Казимира для задач, в которых из-за вычислительных проблем явное аналитическое выражение для энергетических уровней отсутствует, т. е. энергии уровней могут быть определены только численно. Предлагаемая процедура позволяет также обойти неоднозначность, связанную с наличием логарифмической расходимости, и выделить искомую конечную часть именно в исходном (а не в модифицированном) выражении для вакуумной энергии.

### Одномерный случай

Простейшей системой, в которой энергия Казимира содержит логарифмическую расходимость, является одномерное массивное скалярное поле на отрезке длины $L$ с нулевыми граничными условиями на концах интервала. Исходное выражение для энергии Казимира в этом случае имеет вид

$$\mathcal{E}_{\text{cas}} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\omega_n = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{(\pi n/L)^2 + m^2}. \qquad (1)$$

Прямолинейный подход [1–3] к перенормировке этой величины состоит в том, что из суммы (1) вычитается энергия, которая была бы у поля, занимающего отрезок $L$, но не ограниченного на этом отрезке. В силу тривиального вида контрчленов такая процедура для одномерного массивного поля оказывается вполне эффективна и приводит к правильному результату. Однако уже для поля в сферической полости эти рассуждения оказываются недостаточными для последовательной перенормировки [3, 14]. Поэтому мы не будем вычислять разность энергий двух различных систем (т. е. величину, физический смысл которой по меньшей мере неочевиден), а рассмотрим перенормировку непосредственно выражения (1).

Регуляризация суммы (1) должна проводиться с помощью параметра $\alpha$ с размерностью длины, входящего в обрезающую функцию $F(\alpha\omega_n)$:

$$\mathcal{E}^{(r)}_{\text{cas}} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\omega_n F(\alpha\omega_n). \qquad (2)$$

Асимптотика $\omega_n$ при $n \gg 1$ содержит линейно расходящееся слагаемое $\pi n/L$ и логарифмически расходящееся слагаемое $m^2 L/(2\pi n)$, поэтому разложение $\mathcal{E}^{(r)}_{\text{cas}}$ в ряд по степеням $\alpha$ будет иметь следующую структуру:

$$\mathcal{E}^{(r)}_{\text{cas}} = c_2\frac{L}{\alpha^2} + c_1\frac{L^0}{\alpha^1} + c_\lambda m^2 L\ln(L/\alpha) + c_0\frac{\alpha^0}{L} + \\ + \text{исчезающие при } \alpha\to 0 \text{ члены}.$$

Любое вычитание в данном случае будет приводить к неопределенности, поэтому можно попытаться избавиться от процедуры вычитания. Будем вычислять не $\mathcal{E}^{(r)}_{\text{cas}}$, а $\partial^2_L\mathcal{E}^{(r)}_{\text{cas}}$:

$$\partial^2_L\mathcal{E}^{(r)}_{\text{cas}} \simeq c_0\frac{2}{L^3} + c_\lambda\frac{m^2}{L} + \cdots .$$

Это выражение регулярно при $\alpha\to 0$, однозначно определяется из $\mathcal{E}^{(r)}_{\text{cas}}$ и поэтому не зависит от способа разбиения последней на сингулярную и регулярную части. Располагая $\partial^2_L\mathcal{E}^{(r)}_{\text{cas}}$, можно восстановить и саму искомую конечную вакуумную энергию поля $E^{(r)}_{\text{cas}}$, поскольку из регулярности по $\alpha$ и однозначности следует, что

$$\partial^2_L E^{(r)}_{\text{cas}} = \partial^2_L\mathcal{E}^{(r)}_{\text{cas}}, \qquad (3)$$

а начальные условия для вычисления $E^{(r)}_{\text{cas}}$ вытекают из очевидных физических соображений: при любой разумной регуляризации как $E^{(r)}_{\text{cas}}$, так и $\partial_L E^{(r)}_{\text{cas}}$ должны исчезать при $L\to\infty$:

$$E^{(r)}_{\text{cas}}(L\to\infty) = \partial_L E^{(r)}_{\text{cas}}(L\to\infty) = 0.$$

Собственно энергия Казимира поля после этого находится через предельный переход: $E_{\text{cas}} = \lim\limits_{\alpha\to 0} E^{(r)}_{\text{cas}}$.

Формализуем теперь изложенную процедуру таким образом, чтобы она не опиралась на явное аналитическое выражение для спектра. Итак, мы располагаем некоторым спектром $\omega_n$, для которого энергия Казимира содержит логарифмическую расходимость. Прежде всего найдем такой параметр $\mu$, что

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\omega_n^2-\mu^2}\,F(\alpha\sqrt{\omega_n^2-\mu^2}) \qquad (4)$$

не будет содержать логарифмическую расходимость. Для массивного одномерного поля $\mu$ будет равно массе поля $m$. В более нетривиальном случае, например для скалярного поля в сферической полости, это будет некоторый параметр с размерностью массы, характеризующий итоговый (суммарный по всем угловым моментам) коэффициент при логарифмической расходимости.

Далее «добавляем» к полю массу $\mathcal{M}$ и исследуем зависимость энергии Казимира от этой добавленной массы в диапазоне от $\mathcal{M}=0$ до $\mathcal{M}=\infty$. Удобно ввести параметр $M$, такой, что $M^2\equiv\mathcal{M}^2+\mu^2$, и рассматривать зависимость энергии Казимира от $M$:

$$\mathcal{E}_{\text{cas}}(M) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\omega_n^2+M^2-\mu^2}$$

в диапазоне от $M=\mu$ до $M=\infty$. Для этого находим (численно, поскольку по условию аналитическое выражение для уровней отсутствует) при все-возможных значениях $M$ следующую величину:

$$\partial_M^2 \left( \frac{\mathcal{E}_{\text{cas}}^{(r)}(M)}{M} \right) = \partial_M^2 \left[ \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{\omega_n^2 - \mu^2}{M^2} + 1} \times \right. \\ \left. \times F\left( \alpha \sqrt{\frac{\omega_n^2 - \mu^2}{M^2} + 1} \right) \right]. \tag{5}$$

Здесь, в отличие от (2), в аргумент обрезающей функции $F(x)$ подставлена безразмерная величина, так что $\alpha$ также безразмерно. Переход к $\mathcal{E}_{\text{cas}}^{(r)}(M)/M$ обусловлен тем, что эта величина становится регулярной уже после двукратного дифференцирования по $M$. Для самой $\mathcal{E}_{\text{cas}}^{(r)}(M)$ число дифференцирований пришлось бы увеличить до трех, что крайне нежелательно с вычислительной точки зрения. Для дальнейшего также будет существенно, что после такого перехода в преобразованном спектре $\tilde{\omega}_n = \sqrt{(\omega_n^2 - \mu^2)/M^2 + 1}$ масса $M$ играет роль эффективной «длины», единица — роль эффективной массы, а при $M = \mu$ восстанавливается исходный спектр $\omega_n$, деленный на $\mu$.

Выражение (5) построено таким образом, что все расходящиеся члены исчезают при дифференцировании. Действительно, при $n \to \infty$

$$\sqrt{\frac{\omega_n^2 - \mu^2}{M^2} + 1} \approx \frac{\sqrt{\omega_n^2 - \mu^2}}{M} + \frac{M}{2\sqrt{\omega_n^2 - \mu^2}} + \cdots,$$

поэтому в сумме, которую порождает первое слагаемое, логарифмическая расходимость отсутствует согласно определению $\mu$ через условие (4), а остальные расходимости пропорциональны $(M/\alpha)^2/M$ и $(M/\alpha)^1/M$ и исчезают при двукратном дифференцировании. Второе слагаемое порождает логарифмическую расходимость, но коэффициент при ней пропорционален $M^1$, так что она тоже исчезает при двукратном дифференцировании.

Таким образом, выражение (5) будет регулярным при $\alpha \to 0$. Тогда искомая конечная вакуумная энергия $E_{\text{cas}}^{(r)}(M)$ находится через соотношение, аналогичное (3), именно

$$\partial_M^2 \left( E_{\text{cas}}^{(r)}(M)/M \right) = \partial_M^2 \left( \mathcal{E}_{\text{cas}}^{(r)}(M)/M \right), \tag{6}$$

с принятой нами точкой нормировки при $M = \infty$

$$E_{\text{cas}}^{(r)}(M \to \infty) = \partial_M E_{\text{cas}}^{(r)}(M \to \infty) = 0. \tag{7}$$

Действительно, поле с добавленной нами бесконечной массой $M$ должно иметь нулевую вакуумную энергию. Следовательно, вычислив из (6) вторую производную $\partial_M^2 E_{\text{cas}}^{(r)}(M)$ для всех $M \in [\mu, \infty]$, через начальные условия (7) можно затем восстановить искомое $E_{\text{cas}} = \lim_{\alpha \to 0} E_{\text{cas}}^{(r)}(M = \mu)$, соответствующее исходному спектру.

Реализация этой процедуры для массивного одномерного скалярного поля при $m = \mu = 1$ на отрезке длиной $L$ с нулевыми граничными условиями на концах отрезка дает

| $L$ | $10^{-6}$ | $10^{-5}$ |
|---|---|---|
| $\partial_L^2(2E)$ | $-0.5235988 \cdot 10^{18}$ | $-0.5235988 \cdot 10^{15}$ |
| $2E$ | $-0.2617989 \cdot 10^{6}$ | $-0.2617944 \cdot 10^{5}$ |
| $L$ | $10^{-4}$ | $10^{-3}$ |
| $\partial_L^2(2E)$ | $-0.5235988 \cdot 10^{12}$ | $-0.5235986 \cdot 10^{9}$ |
| $2E$ | $-0.2617494 \cdot 10^{4}$ | $-0.2613008 \cdot 10^{3}$ |
| $L$ | 0.01 | 0.1 |
| $\partial_L^2(2E)$ | $-0.5235829 \cdot 10^{6}$ | $-0.5220101 \cdot 10^{3}$ |
| $2E$ | $-0.2569007 \cdot 10^{2}$ | $-2.182667$ |
| $L$ | 1.0 | 10.0 |
| $\partial_L^2(2E)$ | $-0.3897729$ | $-7.893493 \cdot 10^{-10}$ |
| $2E$ | $-4.666378 \cdot 10^{-2}$ | 0.0 |

Приведенные данные получены с помощью регуляризирующих функций $F(x) = \exp(-x)$, $F(x) = \exp(-x^2)$, $F(x) = \exp(-x^3)$, $\ldots$, $F(x) = \exp(-x^6)$, $F(x) = \exp(-2\,\mathrm{ch}(x) + 2)$. Для всех функций ответы совпадают с избыточной для наших целей точностью до восьми знаков.

Как и следовало ожидать, вторая производная энергии гораздо быстрее выходит на безмассовый предел $\partial_L^2 2E_0 = -\pi/(6L^3) \approx -0.52359878/L^3$ при стремлении $L \to 0$, чем сама энергия выходит на свой безмассовый предел $2E_0 = -\pi/(12L) \approx -0.26179939/L$.

### Трехмерный случай

Изложенный в предыдущем разделе метод безусловно работает для одномерного массивного поля. Чтобы этот способ оказался эффективным и в трехмерном случае, количество дифференцирований следует увеличить на два. Действительно, в трехмерном случае основной сингулярный член будет пропорционален объему и тем самым имеет вид $c_{-4}L^3/\alpha^4$, и чтобы от него избавиться, необходимо взять четвертую производную $\partial_L^4$.

Логарифмический по $\alpha$ член при таком количестве дифференцирований также заведомо исчезнет. Преобразование спектра построено как раз таким образом, чтобы коэффициент при логарифмической расходимости содержал только положительные степени $M$. Отрицательная степень $M^{-1}$ умножается на сумму $\sqrt{\omega_n^2 - \mu^2}$, которая не содержит логарифмической расходимости согласно определению $\mu$ через условие (4).

Для безмассового скалярного поля в шаре единичного радиуса $R = 1$ получаем

| $F(x)$ | $\mu^2$ | $\mu$ | $2E_{\text{cas}}/\mu$ |
|---|---|---|---|
| $\exp(-x^3)$ | 0.01895799 | 0.1376880 | 0.0550299 |
| $\exp(-x^5)$ | 0.01895777 | 0.1376872 | 0.0550527 |
| $\exp(-x^7)$ | 0.01895777 | 0.1376872 | 0.0550531 |
| $e^{-2\,\mathrm{ch}(x)+2}$ | 0.01895774 | 0.1376871 | 0.0550455 |

Найденные значения четвертой производной для разных $F(x)$ совпадают с точностью до четырех первых знаков, причем наибольшее отклонение дает $F(x) = \exp(-x^3)$. Соответственно точность в определении $E_{\text{cas}} = 3.790 \cdot 10^{-3}$ также можно оценить как четыре верных знака. Точность не слишком высока просто потому, что диапазон использованных значений регуляризирующего параметра $\alpha$ соответствует приблизительно двумстам $s$-уровням и соответственно максимальному значению орбитального момента $l$ примерно 600.

Следует отметить, что в ходе вычислений мы нашли не только энергию Казимира в безмассовом случае $\mathcal{M} = 0$, но и энергию Казимира для всех возможных масс $\mathcal{M}$ в диапазоне от нуля до «эффективной» бесконечности:

| $\mathcal{M}$ | 0 | 0.1 | 0.2 | 0.5 |
|---|---|---|---|---|
| $2E(\mathcal{M})$ | $7.580 \cdot 10^{-3}$ | $7.372 \cdot 10^{-3}$ | $6.761 \cdot 10^{-3}$ | $4.236 \cdot 10^{-3}$ |
| $\mathcal{M}$ | 1.0 | 2.0 | 5.0 | 10.0 |
| $2E(\mathcal{M})$ | $1.649 \cdot 10^{-3}$ | $4.272 \cdot 10^{-4}$ | $9.843 \cdot 10^{-5}$ | $1.368 \cdot 10^{-5}$ |

Из приведенных результатов следует, что при таком способе перенормировки вакуумная энергия не имеет инфракрасной особенности при $\mathcal{M} \to 0$, в отличие от ответа, который приведен в работах [3, 14]. С точки зрения общей теории для полей, локализованных в конечном объеме, появление инфракрасных особенностей при $\mathcal{M} \to 0$ в энергии вакуума вообще достаточно проблематично. На самом деле появление таких особенностей в [3, 14] может быть связано с тем обстоятельством, что даже при наличии «естественной» точки нормировки $\mathcal{M} \to \infty$ в вычитательной процедуре все же остается определенный произвол. Именно, к окончательному выражению для энергии всегда может добавиться функция, которая достаточно быстро убывает при $\mathcal{M} \to \infty$, но при этом имеет логарифмическую особенность при $\mathcal{M} \to 0$. Использованная нами процедура перенормировки никаких вычитаний и, следовательно, никаких неоднозначностей не содержит: при дифференцировании исключаются только положительные степени $M$, которые заведомо должны отсутствовать в ответе для энергии Казимира. При этом во всем диапазоне изменения $M$ (от $\mu$ до $\infty$) ответ для производной конечен и при $M \to \infty$ убывает быстрее, чем $M^{-5}$ (хотя и медленнее, чем экспонента, на что было впервые указано в работе [14]), так что при $M = \mu$, т. е. при $\mathcal{M} = 0$, мы получаем конечный ответ.

## Заключение

Таким образом, в работе предложен метод численного нахождения энергии Казимира, который не содержит процедуры вычитания и, следовательно, не требует нормировки для устранения неопределенностей в вычитательной процедуре. Подчеркнем, однако, что это один из возможных способов перенормировки.

Недостатком метода является необходимость вычислений с повышенным числом верных знаков (в частности, спектр системы следует находить с высокой точностью). В то же время явным достоинством метода является его идеологическая и техническая тривиальность, позволяющая применять его в тех случаях, когда аналитическое выражение для спектра (и аналитическое выражение для уравнений на уровни спектра) отсутствует. Более того, нет необходимости вычислять приближенные асимптотические выражения для уровней.

Предложенный метод применим, когда отсутствует явное трансцендентное уравнение для уровней. Кроме того, в случае трехмерных задач его целесообразно применять и для относительно простых спектров. Это связано с тем, что в трехмерных задачах (даже в случае сферической симметрии) суммируется как минимум двойной ряд, и даже для тривиальных систем его перенормировка представляет собой довольно громоздкую задачу [14].

### Литература


1. *Casimir H.B.G.* // Proc. Kon. Nederl. Akad. Wet. 1948. **51**. P. 793; Physica. 1953. **19**. P. 846.
2. *Ициксон К., Зюбер Ж.-Б.* Квантовая теория поля. Т. 1. М., 1978.
3. *Bordag M., Mohideen U., Mostepanenko V.M.* // Phys. Reports. 2001. **353**. P. 1.
4. *Boyer T.H.* // Phys. Rev. 1968. **174**. P. 1764.
5. *Balian R., Duplantier R.* // Ann. Phys. 1978. **112**. P. 165.
6. *Milton K.A., De Raad L.L., Schwinger J.* // Ann. Phys. 1978. **115**. P. 388.
7. *Milton K.A.* // Phys. Rev. 1980. **22D**. P. 1441, 1444.
8. *Brown G.E., Jackson A.D., Rho M., Vento V.* // Phys. Lett. 1984. **B140**. P. 285.
9. *Vepstas L., Jackson A.D.* // Phys. Reports. 1990. **187**. P. 109.
10. *De Francia M., Falomir H., Santangelo E.M.* // Phys. Rev. 1992. **45D**. P. 2129.
11. *Hosaka A., Toki H.* // Phys. Rep. 1996. **277**. P. 65.
12. *Baacke J., Igarashi Y.* // Phys. Rev. 1983. **27D**. P. 460.
13. *Blau S.K., Wisser M., Wipf A.* // Nucl. Phys. 1988. **B310**. P. 163.
14. *Bordag M., Elizalde E., Kirsten K., Leseduate S.* // Phys. Rev. 1997. **56D**. P. 4896.
15. *Elizalde E., Bordag M., Kirsten K.* // J. Phys. 1998. **A31**. P. 1743.
16. *Bordag M., Geyer B., Kirsten K., Elizalde E.* // Comm. Math. Phys. 1996. **179**. P. 215.


Поступила в редакцию
06.10.04