на основе полученного выше набора нормирующих множителей.

Литература

1. *Самарский А.А.* // Вестн. АН СССР. 1979. №5. С. 38.
2. *Хокни Р., Иствуд Дж.* Численное моделирование методом частиц. М.: Мир, 1987.
3. *Бэдсел Ч., Ленгдон А.* Физика плазмы и численное моделирование. М.: Энергоатомиздат, 1989.
4. Вычислительные методы в физике плазмы / Под. ред. Б. Олдера, С. Фернбаха, М. Ротенберга. М.: Мир, 1974.
5. *Поттер Д.* Вычислительные методы в физике. М.: Мир, 1975.
6. *Днестровский Ю.Н., Костомаров Д.П.* Математическое моделирование плазмы. М.: Наука, 1993.
7. *Ландау Л.Д., Ахиезер А.И., Лифшиц Е.М.* Курс общей физики. М.: Наука, 1965.

Поступила в редакцию
30.11.00

УДК 530.145:517.98

САМОСОПРЯЖЕННОСТЬ ГАМИЛЬТОНИАНА СКАЛЯРНОГО ПОЛЯ В МЕТРИКЕ ШВАРЦШИЛЬДА

Х. Афантитис, С. В. Каляшин

(*кафедра квантовой теории и физики высоких энергий*)

Показано, что в пространстве с метрикой Шварцшильда существует самосопряженное продолжение гамильтониана безмассового скалярного поля.

Введение

В классической теории черная дыра (ЧД) определена как объект, поглощающий все материальные тела. Действительно, по теореме Пенроуза [1], горизонт событий образован световыми геодезическими, у которых в будущем нет граничных точек, и каждая из таких образующих никогда в будущем не покинет горизонта.

В квантовом случае понятие траектории (геодезической) отсутствует, поэтому критерий Пенроуза неприменим. При рассмотрении квантовой задачи вывод о существовании ЧД может быть сделан на основе изучения асимптотического поведения решений.

Так, в работах [2–7], посвященных исследованию квантового скалярного поля в пространстве с метрикой Шварцшильда, вид волновых функций указывает на то, что упомянутая задача описывает ЧД. Однако, несмотря на всю убедительность многочисленных доводов, обосновывающих эту точку зрения, остается вопрос: почему в статической системе с действительным лагранжианом возникает эффект ЧД?

По нашему мнению, основной причиной возникновения этого эффекта стало включение в задачу наглядного с классической точки зрения граничного условия для радиальной волновой функции $R(r^*)$:

$$R(r^*) \sim \begin{cases} A\,\mathrm{e}^{-i\omega r^*}, & r^* \to -\infty, \\ \mathrm{e}^{-i\omega r^*} + B\,\mathrm{e}^{i\omega r^*}, & r^* \to \infty, \end{cases} \tag{1}$$

где A — амплитуда волны, которая прошла через статический потенциал, расположенный вне радиуса Шварцшильда, B — амплитуда отраженной от него волны,

$$r^* = r + 2m \ln\left|1 - \frac{r}{2m}\right| \tag{2}$$

— «черепашья» переменная Редже–Уилера. Условие (1) явно запрещает движение частиц из внутренней области пространства Шварцшильда во внешнюю.

Необходимо обратить внимание на то, что радиальное уравнение для поля вне радиуса Шварцшильда топологически эквивалентно одномерному уравнению на оси $(-\infty, \infty)$. Это приводит к двукратному вырождению уровней энергии. Но использование граничного условия (1) фактически убирает половину базиса и тем самым создает иллюзию *несамосопряженности* гамильтониана и существования ЧД. Исследованию возможности построения самосопряженного гамильтониана и посвящена данная статья.

1. Постановка задачи

В сферической системе координат $x^i = \{t, r, \theta, \phi\}$ метрика рассматриваемого пространства задается следующим выражением:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 + \tfrac{1}{1-2m/r} dr^2 + \\ + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\varphi^2,$$

где $r = 2m$ — радиус Шварцшильда, $c = G \equiv 1$, $\sqrt{-g} = r^2 \sin\theta$.

Волновая функция Φ скалярного поля массы μ подчинена полевому уравнению

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} - \partial_\alpha \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\alpha \Phi}\right) = 0, \qquad (3)$$
$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}(g^{\alpha\beta}\partial_\alpha \Phi \partial_\beta \Phi + \mu^2 \Phi^2).$$

В присутствии внешнего поля $g^{\alpha\beta}$ волновая функция Φ не обладает трансляционной инвариантностью. Но в силу того что $g^{\alpha\beta}$ не зависит от t, функция Φ инвариантна относительно трансляций по времени. Поэтому ищем решение уравнения (3) в виде

$$\Phi = \mathrm{e}^{-i\omega t}\,\Phi(\mathbf{r}) = \mathrm{e}^{-i\omega t}\sum_{lm} Y_{lm}(\mathbf{n}) R_{lm}(r). \qquad (4)$$

С учетом этого (3) будет выглядеть следующим образом:

$$-\frac{d}{dr}\left(p(r)\frac{dR}{dr}\right) + q(r)R = \lambda\rho(r)R, \qquad (5)$$
$$\lambda = \omega^2 - \mu^2, \quad r \in (0, \infty).$$

Уравнение (5) содержит три особые точки: $r = 0$, $r = 2m$, $r = \infty$. Поэтому интервал по r необходимо разбить на две области — внешнюю $r \in (2m, \infty)$ и внутреннюю $r \in (0, 2m)$. Тогда функции, входящие в уравнение, предстанут в следующем виде:

$$p(r) = r(r-2m), \quad q(r) = l(l+1) - \frac{2m\mu^2 r^2}{r-2m},$$
$$\rho(r) = \frac{r^3}{r-2m}, \qquad r > 2m,$$

$$p(r) = r(2m-r), \quad q(r) = -l(l+1) - \frac{2m\mu^2 r^2}{2m-r},$$
$$\rho(r) = \frac{r^3}{2m-r}, \qquad 0 < r < 2m.$$

Общий вид решений $R(r)$ и их асимптотическое поведение обсуждаются в работах [8, 9].

Важно отметить, что внутренние решения имеют существенные особенности в точках $r \to 0$ и $r \to 2m+$. Это приводит к тому, что интервал $r \in (0, 2m)$ пространства Шварцшильда топологически эквивалентен полуоси $(-\infty, 0)$. Для внешних решений характерно то, что существенные особенности в точках $r \to 2m+$ и $r \to \infty$ являются причиной топологической эквивалентности интервала $r \in (2m, \infty)$ бесконечной оси $(-\infty, \infty)$.

Такая эквивалентность непосредственно влияет на вид асимптотического базиса пространства, который в случае внешней задачи при использовании переменной (2) выглядит следующим образом:

$$R_+(r^*) \sim \begin{cases} \mathrm{e}^{i\omega r^*} + A_1\,\mathrm{e}^{-i\omega r^*}, & r^* \to -\infty, \\ B_1\,\mathrm{e}^{i\omega r^*}, & r^* \to \infty, \end{cases}$$
$$R_-(r^*) \sim \begin{cases} B_2\,\mathrm{e}^{-i\omega r^*}, & r^* \to -\infty, \\ \mathrm{e}^{-i\omega r^*} + A_2\,\mathrm{e}^{i\omega r^*}, & r^* \to \infty. \end{cases} \qquad (6)$$

Непосредственно видно, что при введении так называемого *причинного* граничного условия (1) исключается целый класс базисных функций. Построение решений и гамильтониана задачи происходит далее с использованием неполного набора функций, что в свою очередь приводит к решениям, которые можно интерпретировать как наличие ЧД.

Решение задачи о существовании ЧД равносильно ответу на такой вопрос: существует ли самосопряженный оператор Гамильтона $\hat{H}$ в рамках изучаемой задачи? Так как метрика Шварцшильда не зависит от времени, то нет видимых причин, которые могли бы препятствовать его существованию. Поэтому перейдем к построению самосопряженного $\hat{H}$.

По определению гамильтониан представляется следующим выражением:

$$H = \int d\mathbf{r}\left(\partial_0 \Phi \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_0 \Phi} - \mathcal{L}\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\int\limits_{r<2m} d\mathbf{r}\Bigg(-\frac{1}{g^{00}\sqrt{-g}}\Pi^2 +$$
$$+ \Phi\left(-\tfrac{\partial}{\partial x^k}\left(\sqrt{-g}\,g^{ik}\frac{\partial \Phi}{\partial x^i}\right) + \mu^2\sqrt{-g}\,\Phi\right)\Bigg) +$$
$$+ \frac{1}{2}\int\limits_{r>2m} d\mathbf{r}\Bigg(-\frac{1}{g^{00}\sqrt{-g}}\Pi^2 +$$
$$+ \Phi\left(-\tfrac{\partial}{\partial x^k}\left(\sqrt{-g}\,g^{ik}\frac{\partial \Phi}{\partial x^i}\right) + \mu^2\sqrt{-g}\,\Phi\right)\Bigg) =$$
$$= H_{\mathrm{int}} + H_{\mathrm{ext}},$$

где

$$\Pi \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_0 \Phi} = -\sqrt{-g}\,g^{00}\partial_0 \Phi$$

есть обобщенный импульс системы. Далее для простоты изложения положим $\mu = 0$, т. е. будем считать рассматриваемое поле безмассовым.

2. Квантование гамильтониана методом спектрального разложения

Произведем разложение гамильтониана по полному базису собственных векторов полевого уравнения. На основе методики, описанной в книгах [10, 11], нами построены теоремы разложения произвольной функции $f(r)$ по собственным функциям

$g_{1,2}$ внешней задачи (которые являются базисными функциями при действительных λ):

$$f(r)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty d\lambda\int\limits_{2m}^\infty \rho(r')\,dr'\Big[g_1(r,\lambda)g_1^*(r',\lambda)+ \\ +g_2(r,\lambda)g_2^*(r',\lambda)\Big]f(r') \tag{7}$$

и по собственным функциям g внутренней задачи:

$$f(r)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty d\lambda\int\limits_0^{2m}\rho(r')\,dr'\,g(r,\lambda)g^*(r',\lambda)f(r'). \tag{8}$$

Запишем $\mathbf{\Phi}(\mathbf{r})$ согласно (4):

$$\Phi(r,\mathbf{n})=\sum_{lm}\int d\mathbf{n}'\,Y_{lm}(\mathbf{n})Y^*_{lm}(\mathbf{n}')\Phi(r,\mathbf{n}')= \\ =\sum_{lm}Y_{lm}(\mathbf{n})R_{lm}(r),$$

$$R_{lm}(r)=\int d\mathbf{n}'\,Y^*_{lm}(\mathbf{n}')\Phi(r,\mathbf{n}').$$

Аналогично для $\partial_0\Phi(\mathbf{r})$ имеем:

$$\partial_0\Phi(r,\mathbf{n})=\sum_{lm}Y_{lm}(\mathbf{n})Q_{lm}(r),$$

$$Q_{lm}(r)=\int d\mathbf{n}\,Y_{lm}(\mathbf{n})\partial_0\Phi(r,\mathbf{n}).$$

Здесь интегралы берутся по единичной сфере, причем $d\mathbf{n}=\sin\theta d\varphi d\theta$. Применение правил разложения (7) и (8) к функциям $R_{lm}(r)$, $Q_{lm}(r)$ позволяет представить H в виде

$$H=H_{\text{int}}+H_{\text{ext}}= \\ =\frac{1}{2}\sum_{lm}\int\limits_0^\infty d\lambda\Big(a^*(l,m,\lambda)a(l,m,\lambda)+ \\ +\lambda b^*(l,m,\lambda)b(l,m,\lambda)\Big)+ \\ +\frac{1}{2}\sum_{lm}\int\limits_0^\infty d\lambda\sum_{i=1}^{2}\Big(c_i^*(l,m,\lambda)c_i(l,m,\lambda)+ \\ +\lambda d_i^*(l,m,\lambda)d_i(l,m,\lambda)\Big), \tag{9}$$

где

$$a(l,m,\lambda)=\int\limits_0^{2m}\rho(r)\,dr\,g^*(r,l,\lambda)Q_{lm}(r),$$

$$b(l,m,\lambda)=\int\limits_0^{2m}\rho(r)\,dr\,g^*(r,l,\lambda)R_{lm}(r),$$

$$c_i(l,m,\lambda)=\int\limits_{2m}^\infty\rho(r)\,dr\,g_i^*(r,l,\lambda)Q_{lm}(r),$$

$$d_i(l,m,\lambda)=\int\limits_{2m}^\infty\rho(r)\,dr\,g_i^*(r,l,\lambda)R_{lm}(r).$$

Представление (9) дает возможность сделать важный вывод: внешний гамильтониан описывает два сорта частиц (функции c_1,d_1 и c_2,d_2 соответственно).

Своеобразие асимптотического базиса (6) — причина того, что мы получили два линейно независимых решения, соответствующих одной и той же энергии (двукратное вырождение по энергии), что и проявилось в выражении (9). Функции a,b описывают один квант из области, расположенной внутри сферы Шварцшильда. Здесь предполагается, что вырождение отсутствует.

3. Построение самосопряженного оператора Гамильтона

Внешняя часть $(\hat H_{\text{ext}})$. Обратимся к обобщенной задаче на собственные значения (5)

$$\hat T\Psi-\lambda\hat A\Psi=0,$$

где

$$\hat T\Psi=-\frac{d}{dr}\left(p(r)\frac{d\Psi}{dr}\right)+q(r)\Psi,\quad \hat A\Psi=\rho(r)\Psi.$$

Собственные векторы $\Psi(r)\in L^2(2m,\infty;\rho)$, т. е. принадлежат гильбертову пространству функций, заданных во внешней области со скалярным произведением

$$\langle\Psi_1\mid\Psi_2\rangle=\int\limits_{2m}^\infty\rho(r)\,dr\,\Psi_1^*(r)\Psi_2(r). \tag{10}$$

Оператор $\hat T$ самосопряжен в силу того, что выполнены условия из [12]. А именно: максимальный оператор $\hat T$ плотно определен в гильбертовом пространстве $L^2(2m,\infty;\Psi(2m)=0)$ функций из внешней области с указанным граничным условием, функция $q(r)$ ограничена снизу, выполнено слабое условие самосопряженности

$$\int\limits_{2m}^\infty dr\,p(r)^{-1/2}=\infty$$

и $L^2(2m,\infty;\rho)$ является подпространством множества $L^2(2m,\infty;\Psi(2m)=0)$.

Что касается оператора $\hat{A}$, то он, очевидно, положителен и симметричен в $L^2(2m,\infty;\rho)$. Тогда оператор

$$\hat{A}^{-1}\hat{T}=\frac{1}{\rho(r)}\hat{T}=\hat{H}_{\text{ext}}$$

симметричен и имеет плотную область определения в гильбертовом пространстве со скалярным произведением (10) ([12], гл. V, § 3.6 и гл. VII, § 6.1).

Оператор Гамильтона $\hat{H}_{\text{ext}}$ самосопряжен, если

$$\langle\hat{H}_{\text{ext}}\Psi_1\mid\Psi_2\rangle-\langle\Psi_1\mid\hat{H}_{\text{ext}}\Psi_2\rangle=pW(\Psi_1,\Psi_2)|_{2m}^{\infty}=0, \tag{11}$$

где $pW(f,g)_x=p(f^*g'-f'^*g)|_x$ — вронскиан. Это условие выполнено, так как в силу поведения функций $\Psi\in L^2(2m,\infty;\rho)$

$$pW(\Psi_1,\Psi_2)|_{2m}=0 \quad \text{и} \quad pW(\Psi_1,\Psi_2)|_{\infty}=0. \tag{12}$$

Необходимо заметить, что (11) и есть граничное условие для внешней задачи. Оно, очевидно, ограничивает область определения оператора $\hat{H}$.

Внутренняя часть ($\hat{H}_{\text{int}}$). Пусть $L^2(0,2m;\rho)$ — гильбертово пространство функций, заданных во внутренней области со скалярным произведением

$$\langle\Psi_1\mid\Psi_2\rangle=\int\limits_0^{2m}\rho(r)\,dr\,\Psi_1^*(r)\Psi_2(r).$$

Решения внутренней задачи квадратично интегрируемы с весом ρ:

$$\Psi\in L^2(2m,\infty;\rho), \quad \text{или} \quad \int\limits_0^{2m}\rho\,dr\,|\Psi|^2<\infty,$$

и также образуют плотную область. Условие самосопряженности

$$\langle\hat{H}_{\text{int}}\Psi_1\mid\Psi_2\rangle-\langle\Psi_1\mid\hat{H}_{\text{int}}\Psi_2\rangle=pW(\Psi_1,\Psi_2)|_0^{2m}=0$$

является граничным условием для внутренней задачи.

Самосопряженность полного гамильтониана. Построим новое гильбертово пространство функций, являющихся решениями как внешней, так и внутренней задач, со скалярным произведением

$$\langle\Psi_1\mid\Psi_2\rangle=\int\limits_0^{2m}\rho\,dr\,\Psi_1^{*,\text{int}}(r)\Psi_2^{\text{int}}(r)+\int\limits_{2m}^{\infty}\rho\,dr\,\Psi_1^{*,\text{ext}}(r)\Psi_2^{\text{ext}}(r).$$

Потребуем квадратичной интегрируемости с весом ρ:

$$\Psi=\begin{cases}\Psi^{\text{int}}\in L^2(0,2m;\rho),\\ \Psi^{\text{ext}}\in L^2(2m,\infty;\rho),\end{cases}$$

или

$$\int\limits_0^{2m}\rho\,dr\left|\Psi^{\text{int}}\right|^2+\int\limits_{2m}^{\infty}\rho\,dr\left|\Psi^{\text{ext}}\right|^2<\infty.$$

Для того чтобы объединенный оператор Гамильтона был самосопряженным (с весом ρ), необходимо выполнение следующего условия:

$$\langle\hat{H}\Psi_1\mid\Psi_2\rangle-\langle\Psi_1\mid\hat{H}\Psi_2\rangle= =pW\left(\Psi_1^{\text{ext}},\Psi_2^{\text{ext}}\right)\Big|_{2m}^{\infty}+pW\left(\Psi_1^{\text{int}},\Psi_2^{\text{int}}\right)\Big|_0^{2m}=0.$$

Это выражение задает связь волновых коэффициентов в предельных точках.

Поскольку ни внутренние, ни внешние решения не могут быть определены в точке $r=2m$, обычный метод сшивания решений неприменим. Для получения самосопряженного продолжения гамильтониана, действующего на всем пространстве Шварцшильда, можно воспользоваться условием сохранения потока.

В силу того что выполняются соотношения

$$pW\left(\Psi_1^{\text{ext}},\Psi_2^{\text{ext}}\right)_{\infty}=0, \quad pW\left(\Psi_1^{\text{int}},\Psi_2^{\text{int}}\right)_0=0,$$

остается удовлетворить условию сохранения потока через точку $r=2m$:

$$pW\left(\Psi_1^{\text{ext}},\Psi_2^{\text{ext}}\right)_{2m}-pW\left(\Psi_1^{\text{int}},\Psi_2^{\text{int}}\right)_{2m}=0. \tag{13}$$

Это и есть набор граничных условий для задачи во всем пространстве $r\in(0,\infty)$.

Заключение

В работе осуществлено квантование безмассового скалярного поля в метрике Шварцшильда на основе метода спектрального разложения гамильтониана. Полученное выражение для оператора Гамильтона (9) позволило заключить, что внешняя область пространства Шварцшильда характеризуется двукратным вырождением по энергии.

Показано, что оператор Гамильтона является самосопряженным в отдельно рассмотренной внешней области. Это эквивалентно отсутствию потока (12) через точку $r=2m$ в обе стороны и, очевидно, не согласуется с идеей ЧД.

Более того, построение самосопряженного гамильтониана во всем пространстве Шварцшильда с условием сшивания решений в виде (13) привело к выводу о теоретической возможности прохождения скалярного излучения через сферу Шварцшильда в обоих направлениях. В частности, непосредственное изучение асимптотик собственных функций оператора Гамильтона [9] указывает на то, что поток через сферу не равен нулю.

Авторы искренне благодарны В.Г. Кадышевскому и О.А. Хрусталеву за постоянное внимание и полезные обсуждения.

Литература

1. *Пенроуз Р.* Структура пространства-времени. М.: Мир, 1972.
2. *Matzner R.A.* // J. Math. Phys. 1968. **9**. P. 163.
3. *Sánchez N.G.* // J. Math. Phys. 1976. **17**. P. 688.
4. *Sánchez N.G.* // Phys. Rev. 1977. **D16**, No. 4. P. 937.
5. *Sánchez N.G.* // Phys. Rev. 1978. **D18**, No. 4. P. 1030.
6. *Sánchez N.G.* // Phys. Rev. 1978. **D18**, No. 6. P. 1798.
7. *Andersson N.* // Phys. Rev. 1995. **D52**, No. 4. P. 1808.
8. *Leaver E.W.* // J. Math. Phys. 1986. **27**, No. 5. P. 1238.
9. *Persides S.* // J. Math. Phys. 1973. **14**. P. 1017.
10. *Титчмарш Э.Ч.* Разложение по собственным функциям, связанным с дифференциальными уравнениями II порядка. Т. 1. М.: ИЛ, 1960.
11. *Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М.* Уравнения в частных производных математической физики. М.: Высш. школа, 1970.
12. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1972.

Поступила в редакцию
27.12.00

УДК 53:51

ОЦЕНКА ТОРЦЕВЫХ ЭФФЕКТОВ ПРИ НАГРЕВЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ОБРАЗЦА В КОНЕЧНОМ СОЛЕНОИДЕ

Р. В. Будник, В. Б. Гласко

(*кафедра математики*)

E-mail: budnik@narod.ru

Рассматривается двумерная задача нагрева стальных цилиндрических образцов в соленоидальном индукторе. Получены численные оценки толщины слоя, прогретого до температур, необходимых для последующей закалки.

Возможная техника высокочастотной закалки [1] связана с нагревом цилиндрических образцов токами Фуко при их погружении в соленоид конечной длины. В работе [2] анализировалась модель нагрева, где и соленоид и образец принимались бесконечными. В этом случае оценивалась толщина приповерхностного слоя, прогретого до температуры аустенитного превращения и далее закаленного (при охлаждении).

Однако если нагревающая система имеет конечную длину, то вблизи торцов соленоида электромагнитное поле рассеивается и плотность токов Фуко ослабевает. В настоящей работе представлена приближенная модель для оценки этого эффекта и соответственно падения уровня температуры в образце вблизи торцов при нагреве. Предлагаются три способа компенсации такого падения, и с помощью математического эксперимента оцениваются их возможности.

1. Температурное поле в конечном образце длины L и радиуса R, погруженном в конечный соленоид радиуса $a > R$, описывается решением аксиально-симметричной краевой задачи:

$$\frac{1}{r}\frac{1}{\partial r}\left(r\lambda(u)\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda(u)\frac{\partial u}{\partial z}\right)+Q(r,z,t)= = c(u)\gamma(u)\frac{\partial u}{\partial t},$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=R}=0;\quad \left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=0}=0;$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=\pm L}=0;\quad u\big|_{t=0}=u_0,$$

где $u(r,z,t)$ — температура в данной точке, а λ, c, γ — калориметрические коэффициенты.

Здесь краевые условия соответствуют тому, что среднее время нагрева образца относительно мало и потоком тепла вовне можно принебречь по сравнению с потоком, порожденным внутренним источником Q.

Физические параметры модели (λ, c, ρ) берутся такие же, как в работе [2], тепловые источники имеют индукционное происхождение: $Q = 0.12\sigma|W|^2$, где σ — удельная проводимость образца, W — амплитуда гармонически меняющегося во времени электрического поля, порождаемого соленоидом.

При алгоритмически определенной величине Q температурное поле рассчитывается методом переменных направлений [3].

Электрическое поле W определяется уравнениями Максвелла (без учета токов смещения в образце и токов проводимости вне его) с условиями сопряжения на границах и условиями ограниченности при $r \to 0$ и $r \to \infty$. Коэффициенты этих уравнений зависят от температуры u, однако, как следует из [2], для заданных характеристик материала можно без значительной потери точности при расчете температурных полей ограничиться «локально-стационарным» приближением уравнений Максвелла, где тем-