Заключение

В заключение сформулируем основные выводы данной работы.

1. Доля суммарного флюенса протонов СКЛ с энергией более 30 МэВ для всего рассмотренного периода времени (1956–2001 гг.) в интервале долгот источников СПС E10°–W10° составляет 70%, т. е. подавляющую часть.

2. Доля флюенсов протонов с энергией более 30 МэВ в СПС для всего рассмотренного периода времени (1956–2001 гг.) в интервале долгот W50°–60° составляет менее 3%.

3. Вклад в суммарный флюенс протонов от источников залимбовых СПС составляет 5% за период 19–23 циклов СА.

4. Вклад суммарных флюенсов от восточных долгот более E30° составляет 6% за период 19–23 циклов СА.

5. В отличие от долготного распределения флюенсов протонов с энергией более 30 МэВ (с максимумом в центральной зоне) источники большинства СПС расположены на западных долготах.

Литература

1. *Акиньян С.Т., Базилевская Г.А., Ишков В.Н.* и др. Каталог солнечных протонных событий. М., 1982.
2. *Базилевская Г.А., Вашенюк Э.В., Ишков В.Н.* и др. Каталог энергетических спектров солнечных протонных событий 1970–1979 гг. М., 1986.
3. *Базилевская Г.А., Вашенюк Э.В., Ишков В.Н.* и др. Солнечные протонные события. Каталог 1980–1986 гг. Данные наблюдений частиц и электромагнитных излучений. М., 1990.
4. *Sladkova A.I., Bazilevskaya G.A., Ishkov V.N.* et al. Catalogue of solar proton events 1987–1996. М., 1998.
5. http://nssdc.gsfc.nasa.gov/space/space_physics_home_fr.html.
6. *Гецелев И.В., Ткаченко В.И.* // Проблемы безопасности полетов. 1973. №10. С. 58.
7. *Гецелев И.В., Тимофеев Г.А., Губарь Ю.И.* и др. // Косм. иссл. 1987. **25**, №3. С. 473.
8. *Feynman J., Armstrong T.P., Dao-Gibner L., Silverman S.* // J. of Spacecraft and Rockets. 1990. **27**, No. 4. P. 403.
9. http://nssdc.gsfc.nasa.gov/space/netdex.html.
10. *Гецелев И.В., Подзолко М.В.* Материалы Международной конф. «Современные проблемы солнечной цикличности». ГАО РАН. Пулково; СПб, 26–30 мая 1997. С. 310.
11. *Гецелев И.В., Красоткин С.А., Охлопков В.П., Чучков Е.А.* // Солнце в эпоху смены знака магнитного поля. ГАО РАН. Пулково; СПб., 2001. С. 131.
12. *Мирошниченко Л.И., Петров В.М.* Динамика радиационных условий в космосе. М., 1985.
13. *Вашенюк Э.В.* Релятивистские протоны в солнечных космических лучах. Дис. ... д-ра физ.-мат. наук. Апатиты, 2000. С. 241.
14. *Van Hollebeke M.A.I., Ma Sung L.S.* // Solar Phys. 1975. **41**. P. 189.
15. *Базилевская Г.А., Сладкова А.И.* // Геомагнетизм и аэрономия. 1986. **26**, №2. С. 187.

Поступила в редакцию
26.09.02

УДК 521.13

ЗАВЕРШЕНИЕ КЛАССИФИКАЦИИ ОБЛАСТЕЙ ВОЗМОЖНЫХ ДВИЖЕНИЙ В ЗАДАЧЕ ДВУХ НЕПОДВИЖНЫХ ЦЕНТРОВ Л. ЭЙЛЕРА

И. А. Герасимов, С. В. Жуйко

(*ГАИШ*)

E-mail: zhucom@sai.msu.ru

В работе проведен полный анализ классификации областей возможных движений в задаче двух неподвижных центров Л. Эйлера. Показано, что окончательная классификация содержит 47 типов областей двумерных движений и 26 типов — пространственных.

Постановка задачи

Задача двух неподвижных центров была введена Л. Эйлером [1] в 1760 г. и до сих пор является одной из главных задач небесной механики. Рассмотрим ее постановку. Предположим, что в пространстве находятся две неподвижные материальные точки (центры) P_1 и P_2 с массами m_1 и m_2, под действием ньютоновского притяжения которых движется материальная точка P с массой m_p. Длину отрезка $[P_1, P_2]$ будем считать равной $2c$.

Допустим, что прямоугольная система координат $OXYZ$ выбрана таким образом, что P_1 и P_2 располагаются на оси OX и равноудалены от начала координат, т. е. их координаты будут равны $(-c, 0, 0)$ и $(c, 0, 0)$ соответственно. Тогда величины r_1 и r_2, определяемые формулами

$$r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2 + z^2}, \quad r_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2 + z^2},$$

будут представлять собой расстояния точки P от центров P_1 и P_2.

Дифференциальные уравнения движения точки P, притягиваемой центрами P_1 и P_2 с силами, обратно пропорциональными квадратам расстояний, запишутся в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= -fm_1\frac{x+c}{r_1^3} - fm_2\frac{x-c}{r_2^3}, \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= -fm_1\frac{y}{r_1^3} - fm_2\frac{y}{r_2^3}, \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= -fm_1\frac{z}{r_1^3} - fm_2\frac{z}{r_2^3}, \end{aligned} \qquad (1)$$

где f — гравитационная постоянная, t — время.

Чтобы решить задачу двух неподвижных центров, т. е. найти координаты (x, y, z) точки P как функций времени, удовлетворяющие уравнениям движения с заданными начальными условиями, нужно проинтегрировать уравнения (1).

Однако до получения аналитического решения задачи Л. Эйлера, представляет интерес проведение качественного анализа типов траекторий точки P, и на первом этапе установление классификации областей возможных движений, в которых качественный характер движения одинаков.

Классификация областей движений, происходящих в одной плоскости

В случаях, когда траектории точки P расположены в плоскости OXY, после введения эллиптических координат

$$\lambda = \frac{r_1+r_2}{2c}, \quad \mu = \frac{r_1-r_2}{2c}$$

и выбора системы единиц, в которой расстояние центров P_1 и P_2 до начала координат и величина гравитационной постоянной f равнялись бы единицам, первые интегралы задачи можно записать так [2]:

$$\left(\frac{d\lambda}{d\tau}\right)^2 = L(\lambda), \quad \left(\frac{d\mu}{d\tau}\right)^2 = M(\mu), \qquad (2)$$

где дифференцирование производится по τ — собственному времени, задаваемому соотношением

$$\sqrt{2}\,dt = (\lambda^2 - \mu^2)\,d\tau,$$

и основные полиномы $L(\lambda)$ и $M(\mu)$ имеют следующий вид:

$$L(\lambda) = (\lambda^2-1)(\alpha\lambda^2 + 2n_1\lambda - \gamma),$$

$$M(\mu) = (\mu^2-1)(\alpha\mu^2 + 2n_2\mu - \gamma),$$

где α и γ — постоянные интегрирования, а коэффициенты n_1 и n_2 определяются соотношениями

$$n_1 = \frac{m_1+m_2}{2}, \quad n_2 = \frac{m_1-m_2}{2}.$$

Согласно определению эллиптических координат, выполняются неравенства $\lambda \geqslant 1 \geqslant \mu \geqslant -1$, кроме

Таблица 1

Сравнение классификаций двумерных движений

Герасимов, Винников [6]	Шарлье [3]	Бадалян [4]
1	—	522
2	I $b\gamma$	123
3	V L	523
4	V P	501
5	V N	521
6	I $b\delta$	124
7	—	414
8	V $K\alpha$	—
9	V $b\alpha$	524
10	V $b\alpha$	524
11	V $b\alpha$	524
12	IV $b\alpha$	421
13	IV $b\alpha$	421
14	I $b\alpha$	421
15	—	410
16	—	401
17	—	411
18	I C_α, I C_β	131
19	I C_α, I C_β	131
20	IV α	431
21	I C_α, I C_β	131
22	V M	511
23	III $\alpha\beta$	313
24	V L	512
25	III $\alpha\alpha$	312
26	IV c	422
27	III $b\alpha$	322
28	V M	511
29	V Q	502
30	IV $b\beta$	510
31	IV $b\beta$	510
32	IV $b\beta$	510
33	II $\alpha\delta$	214
34	II $\alpha\delta$	214
35	II $\alpha\delta$	214
36	V O	513
37	II $\alpha\gamma$	213
38	V L	512
39	II $\alpha\beta$	212
40	IV c	422
41	II $b\beta$	222
42	—	—
43	—	—
44	—	—
45	—	—
46	—	—
47	—	—

того, из уравнений (2) следует, что должны быть выполнены еще два неравенства:

$$L(\lambda) \geqslant 0, \quad M(\mu) \geqslant 0.$$

Таким образом, задача сводится к анализу расположения кратных корней функций $L(\lambda) = 0$, $M(\mu) = 0$ на плоскости постоянных (α, γ).

Первая работа в этом направлении была выполнена К. Шарлье [3], затем Г. К. Бадалян [4] указал на ряд неточностей и, наконец, основываясь на подходе В. М. Алексеева [5], И. А. Герасимов и Е. Л. Винников [6] провели полный анализ проблемы. Классификации, полученные в упомянутых работах, сведены нами в табл. 1, где сохранены обозначения, введенные самими авторами.

Очевидно, что классификации областей возможных движений в работах [4] и [6] почти полностью совпадают. Исключения составляют область № 7, ошибочно обозначенная Г. К. Бадаляном как невозможная для реальных движений и области № 42–47, которые отвечают случаю равных масс центров P_1, P_2.

Следует отметить, что кроме указанных областей, в случае $m_1 = m_2$ в работе [6] необходимо было указать и области уже упомянутые для $m_1 \neq m_2$. Мы восстанавливаем этот пробел и приводим табл. 2, в которой приняты следующие обозначения:

$$A_1 = \alpha + 2n_1, \quad A_2 = \alpha + 2n_2,$$
$$A_3 = \alpha - 2n_2, \quad A_4 = \alpha - 2n_1.$$

Таблица 2

Области возможных движений в случае равных масс центров P_1, P_2

№	Множества на плоскости (α, γ)
6	Открытая полубесконечная полоса $\alpha < \gamma < A_2$, $\gamma < 0$
7	Полупрямая $\gamma = A_2$, $\alpha < -2n_1$
8	Точка $\alpha = -2n_1$, $\gamma = 0$
9	Открытый отрезок $-2n_1 < \alpha < 0$, $\gamma = 0$
14	Открытый треугольник $0 < \gamma < A_1$, $\alpha < 0$
15	Открытый отрезок $\gamma = A_1$, $-2n_1 < \alpha < -n_1$
16	Точка $\alpha = -n_1$, $\gamma = n_1$
17	Открытый отрезок $\gamma = A_1$, $n_1 < \alpha < 0$
18	Открытая полубесконечная полоса между гиперболой $A_1 < \gamma < -n_1^2\alpha^{-1}$ и прямой $-n_1 < \alpha < 0$
20	Открытая полубесконечная дуга гиперболы $\alpha\gamma = -n_1^2$, $-n_1 < \alpha < 0$
30	Открытый отрезок $0 < \alpha < 2n_1$, $\gamma = 0$
31	Точка $\alpha = 2n_1$, $\gamma = 0$
32	Полупрямая $\gamma = 0$, $\alpha > 2n_1$
33	Открытый угол между прямыми $0 < \gamma < A_4$, $\alpha < 2n_1$
34	Полупрямая $\gamma = A_4$, $\alpha > 2n_1$
35	Открытая полубесконечная полоса $A_4 < \gamma < \alpha$, $\gamma > 0$
39	Открытая полубесконечная полоса $\alpha < \gamma < A_1$, $\alpha > 0$
40	Полупрямая $\gamma = A_1$
41	Открытый угол между прямыми $\gamma > A_1$, $\alpha > 0$

Классификация областей движений в пространственном случае

В случае пространственных движений точки P основные полиномы $L(\lambda)$ и $M(\mu)$ примут вид:

$$L(\lambda) = \alpha\lambda^4 + 2n_1'\lambda^3 + \delta\lambda^2 - 2n_1'\lambda + \varepsilon,$$

$$M(\mu) = \alpha\mu^4 + 2n_2'\mu^3 + \delta\mu^2 - 2n_2'\mu + \varepsilon.$$

В этой записи приняты следующие обозначения:

$$\delta = \gamma - \alpha, \quad \varepsilon = -\gamma - I,$$

где I — еще одна постоянная интегрирования, а для величин коэффициентов n_1' и n_2' имеют место соотношения

$$n_1' = m_1 + m_2, \quad n_2' = m_1 - m_2.$$

Скорость изменения третьей координаты, угла w, определяется уравнением

$$\frac{dw}{d\tau} = \sqrt{I}\left(\frac{1}{\lambda^2 - 1} + \frac{1}{1 - \mu^2}\right).$$

Таблица 3

Сравнение классификаций пространственных движений

Герасимов, Винников [6]	Алексеев [5]
1	2/D
2	2/D
3	2/D
4	2/2
5	D/2
6	D/D
7	D/D
8	D/D
9	D/24
10	D/24
11	2/C
12	D/C
13	3′/2, 23/2
14	2/2, 23/2, 3/2
15	D/2
16	D/2, 2/2
17	D/D, 2/D
18	23/D, 3′/D
19	2/D, 3/D, 23/D
20	D/D
21	2/24
22	D/24
23	2/2
24	2/D
25	2/D
26	2/2

Первая классификация областей возможных движений для пространственного случая была предложена В. М. Алексеевым [5]. Позднее, основываясь на этой идее, был предложен более простой подход, в котором учитывалось то обстоятельство, что основные многочлены L и M являются полиномами [6]. Результаты этих работ представлены в табл. 3. Из сравнения следует идентичность полученных результатов.

Таким образом, в задаче двух неподвижных центров Л. Эйлера мы имеем 47 типов областей возможных движений для двумерного случая и только 26 типов — для пространственного. Последнее обстоятельство следует из того факта, что в случае пространственных движений точка P не может пересекать ось OX [2].

Литература

1. *Euler L.* // Hist. de L'Academie Roy. sci. Belles-lett. 1767. **16**. P. 228.
2. *Герасимов И.А.* Введение в задачу Л. Эйлера о движении материальной точки в поле притяжения двух неподвижных центров. М., 2004.
3. *Charlies C.L.* Die Mechanik des Himmels. Leipzig, 1902.
4. *Бадалян Г.К.* // Астрон. журн. 1934. **11**, №4. С. 346.
5. *Алексеев В.М.* // Бюлл. ИТА АН. 1965. **10**. С. 241.
6. *Герасимов И.А., Винников Е.Л.* // Тр. ГАИШ. 2000. **68**. С. 31.

Поступила в редакцию
25.02.03