ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 519.2:534

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ВОЗМОЖНОСТЕЙ. МЕТОДЫ ОПТИМАЛЬНОГО ОЦЕНИВАНИЯ И ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

4. Максимальное продолжение возможности

Ю. П. Пытьев

(кафедра компьютерных методов физики)

Показано, что возможность $P(\cdot) : \mathcal{A} \to [0,1]$ всегда может быть продолжена с произвольной σ-алгебры $\mathcal{A}$ подмножеств X на алгебру $\mathcal{P}(X)$ всех подмножеств X с сохранением всех ее свойств, а мера $p(\cdot) : \mathcal{L}(X) \to [0,1]$, определяющая возможность нечетких событий, может быть продолжена с сохранением свойств на класс всех функций $X \to [0,1]$.

Введение

Счетность и измеримость, фундаментальные математические понятия, определяющие рамки применимости математической теории вероятностей к моделированию реальности [1], в теории возможностей играют существенно более скромную роль. Как будет показано ниже, возможность $P(\cdot) : \mathcal{A} \to [0,1]$ всегда может быть продолжена с произвольной σ-алгебры $\mathcal{A}$ подмножеств X на алгебру $\mathcal{P}(X)$ всех подмножеств X с сохранением всех ее свойств, а мера $p(\cdot) : \mathcal{L}(X) \to [0,1]$, определяющая возможность нечетких событий, может быть продолжена с сохранением свойств на класс всех функций $X \to [0,1]$. Это означает, что в теории возможностей любое подмножество X можно считать событием (измеримым множеством) и определить его возможность: любую функцию $\mu(\cdot): x \to [0,1]$ можно считать характеристической функцией соответствующего нечеткого события, а значение $p(\mu(\cdot))$ — его возможностью. В отличие от теории вероятностей в теории возможностей любые, в том числе несчетные, объединения и пересечения событий являются событиями, и с этой точки зрения последняя проще теории вероятностей. Но, как уже было отмечено в [2], за это упрощение приходится платить утратой непрерывности: возможность, будучи вполне аддитивной, — не непрерывная функция на $\mathcal{P}(X)$.

В настоящей работе даны конструкции (максимального) продолжения возможности $P(\cdot)$ на алгебру $\mathcal{P}(X)$ и меры $p(\cdot)$ на класс всех функций $X \to [0,1]$. Далее «определение 4.2» означает «определение 2» из работы [4], ссылка на формулу (2.7) является ссылкой на формулу (7) из работы [2] и т.п.

1. Продолжение возможности на алгебру $\mathcal{P}(X)$ всех подмножеств X

По меньшей мере два обстоятельства указывают на то, что теоретико-вероятностная схема в рассматриваемой теории возможности не вполне адекватна. Дело прежде всего в том, что, в отличие от вероятности, счетно-аддитивная возможность, вообще говоря, не непрерывна относительно сходимости последовательности событий, определенной в пункте 3 теоремы 2.2. С другой стороны, требование счетной аддитивности не только не обеспечивает непрерывность возможности, но и неестественно, поскольку операция сложения в данном случае определена так, что «складывать» можно любое множество «слагаемых», а не обязательно конечное или счетное.

Покажем, что в рассматриваемой теории возможность всегда допускает продолжение на алгебру $\mathcal{P}(X)$ всех подмножеств X с сохранением всех ее свойств и при этом может быть задана распределением. С этой целью для каждого $p \in [\alpha, 1]$, где $\alpha = \inf\limits_{A\in\mathcal{A}, A\neq\emptyset} P(A)$, определим множество

$$S_p = \bigcap_{\substack{A\in\mathcal{A},\\ P(X\setminus A)\le p}} A = X \setminus \bigcup_{\substack{A\in\mathcal{A},\\ P(A)\le p}} A. \tag{1}$$

Если $\alpha > 0$, то условию $P(A) < \alpha$, $A \in \mathcal{A}$, удовлетворяет лишь пустое множество $\emptyset \in \mathcal{A}$, и S_p естественно доопределить и для $p \in [0, \alpha)$, положив $S_p = X$. Множества S_p, $0 \le p \le 1$, возможно, неизмеримые, образуют монотонное семейство, а именно: если $0 \le p \le q \le 1$, то $S_p \supset S_q$, причем $S_p\,|_{p=1} = \emptyset$, $S_p|_{p=0} = X$. Далее считается, что $P(\emptyset) = 0$.

Определение 1. Пусть $B \subset X$ — любое множество и $\mathcal{D}(B) = \{p \in [0,1],\ S_p \cap B \neq \emptyset\}$. Определим

$$\overline{P}(B) = \begin{cases} \sup \mathcal{D}(B), & \text{если} \quad \mathcal{D}(B) \neq \emptyset, \\ 0, & \text{если} \quad \mathcal{D}(B) = \emptyset, \quad B \subset X. \end{cases} \tag{2}$$

Обозначим

$$\varphi(x) = \overline{P}(\{x\}),\ x \in X. \tag{3}$$

Так как $\mathcal{D}(B) = \bigcup\limits_{x\in B} \mathcal{D}(\{x\}) = \bigcup\limits_{x\in B} \{p \in [0,1],\ x \in S_p\}$, то

$$\overline{P}(B) = \begin{cases} \sup\limits_{x\in B} \varphi(x), & \text{если} \quad B \neq \emptyset, \\ 0, & \text{если} \quad B = \emptyset, \quad B \subset X. \end{cases} \tag{2*}$$

Покажем, что функция множества $\overline{P}(\cdot)$ является продолжением возможности $P(\cdot)$ с σ-алгебры $\mathcal{A}$ на алгебру

$\mathcal{P}(X)$ всех подмножеств X; функция $\varphi(\cdot)$ (3) согласно равенству (2*) определяет распределение так продолженной возможности.

Теорема 1.

1. $\overline{P}(B)$, $B \subset X$, — *возможность на алгебре* $\mathcal{P}(X)$ *всех подмножеств* X, *т.е. для любых* $A, B \in \mathcal{P}(X)$

$$A \subset B \Rightarrow \overline{P}(A) \le \overline{P}(B) \qquad (\textit{монотонность}),$$

$$\overline{P}(A \cup B) = \max(\overline{P}(A), \overline{P}(B)) \qquad (\textit{аддитивность}).$$

Для любого семейства $A_j \in \mathcal{P}(X)$, $j \in J$, $\overline{P}(\bigcup_{j\in J} A_j) = \sup_{j \in J} \overline{P}(A_j)$.

2. *Для любого* $B \in \mathcal{P}(X)$ *возможность* $\overline{P}(B)$ *определяется своим распределением* $\varphi(x)$, $x \in X$, (3), — *значениями на одноточечных подмножествах* X — *по формулам* (2*), (3).

3. *Для любого* $A \in \mathcal{A}$ $\overline{P}(A) = P(A)$.

Доказательство.

1. Если $A \subset B$, то, очевидно, $\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(B)$ и, следовательно, $\overline{P}(A) \le \overline{P}(B)$. Далее, так как $\mathcal{D}(A \cup B) = \mathcal{D}(A) \cup \mathcal{D}(B)$, то $\overline{P}(A \cup B) = \sup \mathcal{D}(A \cup B) = \max(\sup \mathcal{D}(A), \sup \mathcal{D}(B)) = \max(\overline{P}(A), \overline{P}(B))$. Наконец,

$$\overline{P}(\bigcup_{j\in J} A_j) = \sup \mathcal{D}(\bigcup_{j\in I} A_j) = \sup_{j\in I} \sup \mathcal{D}(A_j) = \sup_{j\in I} \overline{P}(A_j).$$

2. Это утверждение следует из (2), (3), (2*).

3. Пусть $A \in \mathcal{A}$, $P(A) = q > 0$. Если $p \ge q$, то согласно формуле (2) $S_p \subset X \setminus A$, и $S_p \cap A = \emptyset$. Поэтому

$$\overline{P}(A) = \sup\{p |\, S_p \cap A \ne \emptyset\} \le q = P(A). \qquad (3^*)$$

С другой стороны, если $p < q$, то $S_p \cap A \ne \emptyset$, поскольку $S_p = X \setminus \bigcup_{P(B)\le p} B$ и $A \not\subset \bigcup_{P(B)\le p} B$. Пусть $p_1 \le p_2 \le \ldots \le p_n \le \ldots$, $p_j < q$, $j = 1, 2, \ldots$, $q = \lim_{j\to\infty} p_j$. Тогда $\overline{P}(A) = \sup\{p | S_p \cap A \ne \emptyset\} \ge \sup_{1\le j\le\infty} \{p_j |\, S_{p_j} \cap A \ne \emptyset\} = q = P(A)$. Если же $P(A) = q = 0$, то согласно (3*) $\overline{P}(A) = 0$. ■

Замечание 1. Пусть X локально компактное хаусдорфово (отделимое) топологическое пространство, функция $\varphi(\cdot) : X \to [0, 1]$ (распределение возможности) полунепрерывна сверху. Тогда $\overline{P}(A) = \sup_{x\in A} \varphi(x)$, $A \in \mathcal{P}(X)$, $A \ne \emptyset$, $\overline{P}(\emptyset) = 0$, — емкость Шоке (см., напр., [3]). Действительно, $\overline{P}(\cdot)$ — емкость Шоке, если выполнены следующие условия:

1) $A_1, A_2 \in \mathcal{P}(X)$, $A_1 \subset A_2 \Rightarrow \overline{P}(A_1) \le \overline{P}(A_2)$,

2) $A_n \in \mathcal{P}(X)$, $n = 1, 2, \ldots$, $A_1 \subset A_2 \subset \ldots$, $A = \bigcup_n A_n$, $\Rightarrow \overline{P}(A_n) \uparrow P(A)$ при $n \to \infty$,

3) K_n — компактное подмножество X, $n = 1, 2, \ldots$, $K_1 \supset K_2 \supset \ldots$, $K = \bigcap_n K_n$, $\Rightarrow \overline{P}(K_n) \downarrow P(K)$ при $n \to \infty$.

Согласно теореме 1 $\overline{P}(\cdot)$ обладает свойствами (1), (2). Покажем, что $\sup_{x\in K_n} \varphi(x) \downarrow \sup_{x\in K} \varphi(x)$. Поскольку $\varphi(\cdot)$ полунепрерывна сверху, K_n компактно, то множество $K_{*n} = \{x \in K_n,\ \varphi(x) = \sup_{y\in K_n} \varphi(y)\}$ непусто и компактно для любого $n = 1, 2, \ldots$ Пусть $x_i \in K_{*i}$, $i = 1, 2, \ldots$ и $\{x_{i_n}\}$ — сходящаяся подпоследовательность $\{x_i\} \subset K_1$, $\overset{\circ}{x} = \lim_{n\to\infty} x_{i_n}$. Так как $\varphi(x_1) \ge \varphi(x_2) \ge \ldots$, то последовательность $\{\varphi(x_n)\}$ сходится, причем $\lim_{n\to\infty} \varphi(x_n) = \lim_{n\to\infty} \varphi(x_{i_n}) = \varphi(\overset{\circ}{x})$. Действительно, с одной стороны, $\varphi(x_{i_n}) \ge \varphi(\overset{\circ}{x})$, $n = 1, 2, \ldots$, а с другой — в силу полунепрерывности сверху $\varphi(\cdot)$ $\lim_{n\to\infty} \varphi(x_{i_n}) \le \varphi(\overset{\circ}{x})$. Так как $\varphi(x_{i_n}) \ge \sup_{x\in K} \varphi(x)$, $n = 1, 2, \ldots$, то $\varphi(\overset{\circ}{x}) \ge \sup_{x\in K} \varphi(x)$, а поскольку $\overset{\circ}{x} \in K_{i_n}$, $n = 1, 2, \ldots$, то $\overset{\circ}{x} \in K$, и поэтому $\varphi(\overset{\circ}{x}) \le \sup_{x\in K} \varphi(x)$. Следовательно, $\sup_{x\in K} \varphi(x) = \varphi(\overset{\circ}{x}) = \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in K_n} \varphi(x)$. ■

Семейство S_p, $0 \le p \le 1$, (1), определяет распределение $\varphi(x)$, $x \in X$ (3). Рассмотрим, в какой степени распределение $\varphi(\cdot)$ определяет исходное семейство (1). Условившись далее считать, что $\sup\{p \in [0, 1] \,|\, p \in \emptyset\} = 0$, будем использовать следующее выражение для возможности $\overline{P}(\cdot)$: $\overline{P}(A) = \sup \mathcal{D}(A) = \sup\{p \in [0, 1] | S_p \cap A \ne \emptyset\}$, $A \in \mathcal{P}(X)$.

Лемма 1.

1. *Для любого* $p \in [0, 1]$ $S_{\sim p} = \{x \in X, \varphi(x) > p\} \subset S_p \subset \{x \in X, \varphi(x) \ge p\} = S_p^{\sim}$.

2. *Для любого* $A \in \mathcal{P}(\mathcal{X})$ $P_{\sim}(A) = \sup\{p \in [0, 1] | S_{\sim p} \cap A \ne \emptyset\} = \overline{P}(A) = \sup\{p \in [0, 1] | S_p^{\sim} \cap A \ne \emptyset\} = P^{\sim}(A)$.

Доказательство.

1. Пусть $x \in S_p$, тогда $\varphi(x) = \sup\{q, x \in S_q\} \ge p$, следовательно, $S_p \subset S_p^{\sim}$. Если $x \in S_{\sim p}$, то $\sup\{q | x \in S_q\} = \varphi(x) > p$. Следовательно, найдется $\varepsilon > 0$ такое, что $q_\varepsilon = \varphi(x) - \varepsilon > p$ и $x \in S_{q_\varepsilon}$. Поскольку $S_{q_\varepsilon} \subset S_p$, то $x \in S_p$, т.е. $S_{\sim p} \subset S_p$.

2. Так как $\varphi^{\sim}(x) \triangleq \sup\{p | x \in S_p^{\sim}\} = \sup\{p | \varphi(x) \ge p\} = \varphi(x) = \sup\{p | \varphi(x) > p\} = \sup\{p,\ x \in S_{\sim p}\} \triangleq \varphi_{\sim}(x)$, $x \in X$, то $P_{\sim}(A) = \sup_{x\in A} \varphi_{\sim}(x) = \overline{P}(A) = \sup_{x\in A} \varphi^{\sim}(x) = P^{\sim}(A)$, $A \in \mathcal{P}(X)$. ■

Замечание 2. Семейство $\overline{S}_p$, $p \in [0, 1]$, определенное с помощью возможности $\overline{P}(\cdot)$ по формуле $\overline{S}_p = X \setminus \bigcup_{A\in\mathcal{P}(X),\ \overline{P}(A)\le p} A$, $0 \le p \le 1$, аналогичной (1), приводит к тем же значениям возможности, если в (2) использовать $\overline{S}_p$ вместо S_p. Действительно, очевидно, $\overline{S}_p \subset S_p$, ибо $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ и $\overline{S}_p = X \setminus \bigcup_{A\in\mathcal{P}(X),\ x\in A, \sup\varphi(x)\le p} = X \setminus \{x \in X,\ \varphi(x) \le p\} = \{x \in X,\ \varphi(x) > p\} = S_{\sim p}$. Следовательно, $S_{\sim p} \subset \overline{S}_p \subset S_p \subset S_p^{\sim}$ и согласно лемме 1 семейство $\overline{S}_p$, $0 \le p \le 1$, в (2) даст те же значения $\overline{P}(\cdot)$. ■

2. О единственности продолжения возможности

Возможность $p(\cdot)$ допускает, вообще говоря, различные продолжения на $\mathcal{P}(x)$. Действительно, пусть, например, $X = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} A_j$, $A_i \bigcap A_j = \emptyset$, $i \neq j$, $i, j = 1, 2, \ldots$, и $\mathcal{A}$ — минимальная σ-алгебра, содержащая $\{A_j\}$. Продолжением $P(\cdot)$ на $\mathcal{P}(X)$ является любая возможность $\hat{P}(\cdot)$, удовлетворяющая условию

$$\hat{P}(A_j) = \sup_{x \in A_j} \hat{\varphi}(x) = P(A_j), \ j = 1, 2, \ldots, \tag{4}$$

в котором $\hat{\varphi}(\cdot): X \to [0,1]$ — распределение $\hat{P}(\cdot)$. Если A_j — не одноточечное подмножество X, условие (4) не определяет распределение $\hat{\varphi}(x)$, $x \in A_j$, однозначно, $j = 1, 2, \ldots$

Построенное продолжение $\overline{P}(\cdot)$ может быть охарактеризовано как максимальное в том смысле, что для любого другого продолжения $\hat{P}(\cdot)$

$$\overline{P}(B) \geq \hat{P}(B), \quad B \in \mathcal{P}(X).$$

Для доказательства полезно воспользоваться другим представлением распределения $\overline{P}(\cdot)$, имеющим и самостоятельный интерес.

Лемма 2. *Пусть*

$$\varphi_*(x) = \inf\{P(A),\ A \in \mathcal{A}, \quad x \in A\}, \quad x \in X. \tag{5}$$

Тогда $\varphi_*(x) = \varphi(x)$, $x \in X$, *где распределение* $\varphi(\cdot)$ *определено равенством* (3), *и, следовательно, для любого непустого* $B \in \mathcal{P}(X)$

$$P_*(B) = \sup_{x \in B} \varphi_*(x) = \overline{P}(B).$$

Доказательство. Зафиксируем $x \in X$ и выберем произвольно $\varepsilon > 0$. Согласно равенству (5), во-первых, для любого $A \in \mathcal{A}$, содержащего x, $P(A) > \varphi_*(x) - \varepsilon = p_*$, и, во-вторых, найдется содержащее x $A_\varepsilon \in \mathcal{A}$, такое, что $P(A_\varepsilon) \leq \varphi_*(x) + \varepsilon = p^*$. Согласно определению (1) $x \in S_{p_*}$, так как $x \notin \bigcup\limits_{\substack{A \in \mathcal{A} \\ P(A) \leq p_*}} A$, и $x \notin S_{p^*}$, ибо $x \in \bigcup\limits_{\substack{A \in \mathcal{A} \\ P(A) \leq p^* A}}$. А так как $\varphi(x) = \sup\{p \in [0,1] \big| x \in S_p\}$, то $\varphi_*(x) - \varepsilon \leq \varphi(x) \leq \varphi_*(x) + \varepsilon$, и в силу произвольности $\varepsilon > 0$, $\varphi_*(x) = \varphi(x)$, $x \in X$. ■

Лемма 3. *Равенство* (2) *определяет максимальное продолжение* $\overline{P}(\cdot)$ *возможности* $P(\cdot)$ *в том смысле, что для любого другого продолжения* $\hat{P}(\cdot)$: $\overline{P}(B) \geq \hat{P}(B)$, $B \in \mathcal{P}(X)$.

Доказательство. Пусть $\hat{\varphi}(x) = \hat{P}(\{x\})$, $x \in X$, — распределение $\hat{P}(\cdot)$. Покажем, что $\hat{\varphi}(x) \leq \varphi(x)$, $x \in X$. Если одноточечное множество $\{\overset{\circ}{x}\} \in \mathcal{A}$, то $\hat{\varphi}(\overset{\circ}{x}) = \varphi(\overset{\circ}{x})$, если $\{\overset{\circ}{x}\} \notin \mathcal{A}$, определим минимальное $A = \overset{\circ}{A} \in \mathcal{A}$, содержащее $\overset{\circ}{x}$. Иначе говоря, пусть $\overset{\circ}{x} \in \overset{\circ}{A} \in \mathcal{A}$ и для любого $\tilde{A} \in \mathcal{A}$, такого, что $\overset{\circ}{x} \in \tilde{A}$, $\overset{\circ}{A} \subset \tilde{A}$. В таком случае в силу монотонности $P(\cdot)$

$$\varphi(\overset{\circ}{x}) = \varphi_*(\overset{\circ}{x}) = \inf\{P(A),\ A \in \mathcal{A},\ \overset{\circ}{x} \in A\} = P(\overset{\circ}{A}).$$

Для любой другой точки $x \in \overset{\circ}{A}$ $\varphi(x) = \varphi_*(x) = \varphi(\overset{\circ}{x})$, поскольку $\overset{\circ}{A}$ — минимальное множество для любой своей точки. Так как $P(\overset{\circ}{A}) = \sup\limits_{x \in \overset{\circ}{A}} \hat{\varphi}(x)$, то $\hat{\varphi}(x) \leq \varphi(x)$, $x \in \overset{\circ}{A}$. ■

3. Продолжение возможности нечетких событий

В заключение рассмотрим продолжение возможности $p(f(\cdot))$ нечетких событий, заданных характеристическими функциями $f(\cdot) \in \mathcal{L}(X)$. Пусть $\overline{\mathcal{L}}(X)$ — класс всех функций $f(\cdot)$, определенных на X, принимающих значения в $\mathcal{R}_{(p)}$, на котором определены операции сложения и умножения (2.3).

Определение 2. Функцию $\overline{p}(\cdot)$, определенную на $\overline{\mathcal{L}}(X)$ и принимающую значения в $\mathcal{R}_{(p)}$, назовем мерой, если она линейна в смысле определения 2.1 и для любого семейства[*)] $f_j(\cdot) \in \overline{\mathcal{L}}(X)$, $j \in J$,

$$\overline{p}(\sup_{j \in J} f_j(\cdot)) = \sup_{j \in J} \overline{p}(f_j(\cdot)). \tag{6}$$

Меру $\overline{p}(f(\cdot)), f(\cdot) \in \overline{\mathcal{L}}(X)$, назовем максимальным продолжением меры $p(f(\cdot)), f(\cdot) \in \mathcal{L}(X)$, если $\overline{p}(f(\cdot)) = p(f(\cdot)), f(\cdot) \in \mathcal{L}(X)$ и для любого другого продолжения $\hat{p}(\cdot)$ выполняется неравенство

$$\overline{p}(f(\cdot)) \geq \hat{p}(f(\cdot)),\ f \in \overline{\mathcal{L}}(X).$$

Теорема 2.

1. *Для любой меры* $\overline{p}(\cdot)$ *имеет место представление*

$$\overline{p}(f(\cdot)) = \sup_{x \in X} \min(f(x), \varphi(x)),\ f(\cdot) \in \overline{\mathcal{L}}(X), \tag{7}$$

в котором $\varphi(\cdot) \in \overline{\mathcal{L}}(X)$, — *распределение возможности* $\overline{P}(\cdot)$,

$$\overline{P}(A) = \overline{p}(\chi_A(\cdot)) = \sup_{x \in A} \varphi(x),\ A \in \mathcal{P}(X),$$

причем

$$\varphi(x) = \overline{p}(\delta_x(\cdot)),\ x \in X,$$

где $\{\delta_y(\cdot),\ y \in X\}$ — *семейство функций*

$$\delta_y(x) = \begin{cases} 1, & x = y, \\ 0, & x \neq y, \end{cases} \quad x \in X,\ y \in X,$$

из $\overline{\mathcal{L}}(X)$.

2. *Любая функция* $f(\cdot) \in \overline{\mathcal{L}}(X)$ *интегрируема по возможности* $\overline{P}(\cdot)$ *в смысле определения 4.2,* $\overline{p}(f(\cdot))$ — *ее интеграл,* $\overline{P}(A) = \overline{p}(\chi_A(\cdot))$, $A \in \mathcal{P}(X)$, *т.е. между* $\overline{P}(A), A \in \mathcal{P}(X)$, *и* $\overline{p}(f(\cdot))$, $f(\cdot) \in \overline{\mathcal{L}}(X)$, *имеется взаимно однозначное соответствие.*

3. $\overline{P}(\cdot)$ — *максимальное продолжение* $P(\cdot)$, *если и только если* $\overline{p}(\cdot)$ — *максимальное продолжение* $p(\cdot)$.

[*)] В силу линейности (2.7) $\overline{p}(\cdot)$ монотонно не убывает (2.9), поэтому $\overline{p}(\inf\limits_{j \in J} f_j(\cdot)) \leq \overline{p}(f_i(\cdot)) \leq \overline{p}(\sup\limits_{j \in J} f_j(\cdot))$, $i \in J$. Следовательно, вообще говоря, $\overline{p}(\inf\limits_{j \in I} f_j(\cdot)) \leq \inf\limits_{j \in J} \overline{p}(f_j(\cdot)) \leq \sup\limits_{j \in J} \overline{p}(f_j(\cdot)) \leq \overline{p}(\sup\limits_{j \in J} f_j(\cdot))$.

Доказательство.

1. Для $f(\cdot) \in \overline{\mathcal{L}}(X)$ имеет место «интегральное представление»

$$f(x) = \sup_{y \in X} \min(\delta_y(x), f(y)), \; x \in X.$$

В силу свойства (6) и линейности $\overline{p}(\cdot)$

$$\overline{p}(f(\cdot)) = \sup_{y \in X} \overline{p}(\min(\delta_y(\cdot), f(y))) =$$
$$\sup_{y \in X} \min(f(y), \overline{p}(\delta_y(\cdot))) = \sup_{y \in X} \min(f(y), \varphi(y)).$$

Доказательство утверждения 2 не отличается от доказательства теоремы 4.3. Утверждение 3 очевидно. ■

Теорема 2 определяет максимальное продолжение $\overline{p}(\cdot)$ возможности $p(\cdot)$ нечетких событий, заданных характеристическими функциями из $\mathcal{L}(X)$ на класс любых нечетких событий с характеристическими функциями из $\overline{\mathcal{L}}(X)$, и дает представление продолженной возможности $\overline{p}(\cdot)$ в виде интеграла (7) характеристической функции нечеткого события $f(\cdot) \in \overline{\mathcal{L}}(X)$ по возможности $\overline{P}(\cdot)$.

Замечание 3. Для любой функции $f(\cdot) \in \mathcal{L}(X)$ имеют место следующие представления:

$$f(x) = \sup_{0 \le \alpha \le 1} \min(\lambda, \chi_\alpha(x)) = \sup_{0 \le \alpha \le 1} \min(\alpha, \tilde{\chi}_\alpha(x)), \; x \in X,$$

где $\chi_\alpha(\cdot)$ и $\tilde{\chi}_\alpha(\cdot)$ — характеристические функции множеств $A_\alpha = \{x \in X, f(x) = \alpha\}$ и $\tilde{A}_\alpha = \{x \in X, \; f(x) \ge \alpha\}$ соответственно. В силу свойства (6) меры и линейности (2.7) $\overline{p}(\cdot)$ отсюда следует, что

$$\overline{p}(f(\cdot)) = \sup_{0 \le \alpha \le 1} \min(\alpha, \overline{P}(A_\alpha)) = \sup_{0 \le \alpha \le 1} \min(\alpha, \overline{P}(\tilde{A}_\alpha)).$$

Второе из этих выражений известно как интеграл Sugeno, определенный в работе [5] на классе (измеримых) функций из $\mathcal{L}(X)$.

Литература

1. *Неве Ж.* Математические основы теории вероятностей. М., 1969.
2. *Пытьев Ю.П.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1997. № 3. С. 3 (Moscow University Phys. Bull. 1997. No. 3. P. 1).
3. *Майер П.А.* Вероятность и потенциалы. М., 1973.
4. *Пытьев Ю.П.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1997. № 4. С. 3 (Moscow University Phys. Bull. 1997. No. 4. P. 1).
5. *Sugeno M.* // Trans. S.I.C.E. 1972. **8**, No. 2. P. 95.

Поступила в редакцию
26.03.97