ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 514.763.85; 514.763.24

ОБ АВТОПРЕОБРАЗОВАНИИ БЕКЛУНДА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛИУВИЛЛЯ

А. В. Киселев

(*кафедра математики*)

E-mail: arthemy@mccme.ru

Доказано, что масштабная симметрия уравнения Лиувилля порождает однопараметрическое семейство одномерных неабелевых накрытий, соответствующих автопреобразованию Беклунда. Установлено, что изменение формы связности накрытия равно скобке Фрёлихера-Нийенхейса формы связности и продолжения масштабной симметрии.

1. В работе рассматриваются новые когомологические концепции [1–3] в теории преобразований Беклунда между уравнениями в частных производных (УрЧП). Прежде чем перейти к утверждениям, определим основные понятия из геометрии УрЧП [1, 3].

Уравнения и их симметрии. Рассмотрим систему нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных $F^\alpha(x,u,p)=0$, $\alpha=1,\ldots,r$, порядка k, где F^α — гладкие функции, $x=(x^1,\ldots,x^n)$ — независимые переменные, $u=(u^1,\ldots,u^m)$ — неизвестные функции, $p=\{p^j_\sigma \mid p^j_\sigma=\partial^{|\sigma|}u^j/\partial(x^1)^{i_1}\ldots\partial(x^n)^{i_n}$, $\sigma=\{i_1,\ldots,i_n\}$, $|\sigma|=i_1+\ldots+i_n\leqslant k\}$.

Рассмотрим тривиальное m-мерное расслоение $\pi:\ \mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$. Пространство k-струй $J^k(\pi)$ расслоения π — это объединение $\bigcup\limits_x J^k_x$, где J^k_x — множество классов $[s]^k_x$ эквивалентности сечений s расслоения π, касающихся с порядком k в точке $x\in\mathbb{R}^n$.

За координаты в пространстве струй $J^k(\pi)$ примем переменные x,u,p, а дифференциальное уравнение порядка k с n независимыми и m зависимыми переменными будем понимать как поверхность $\mathcal{E}=\{F^\alpha=0\}$ в этом пространстве.

Определение 1. Плоскостью Картана $C_\theta=C^k_\theta$ в точке $\theta\in J^k(\pi)$ называется линейная оболочка всех касательных плоскостей к графикам Γ^k_s k-струй сечений s расслоения π, для которых $[s]^k_x=\theta$.

Определение 2. Эволюционное дифференцирование — это оператор вида $\text{Э}_\varphi=\sum\limits_{j,\sigma}D_\sigma(\varphi^j)\,\partial/\partial p^j_\sigma$, где $\varphi\in C^\infty(J^k(\pi))$ для некоторого k, а D_σ — композиция полных производных D_i, соответствующая мультииндексу σ. Оператор ℓ_ψ, действующий по правилу $\ell_\psi(\varphi)=\text{Э}_\varphi(\psi)$, называется оператором универсальной линеаризации нелинейного дифференциального оператора Δ_ψ, заданного функцией $\psi\in C^\infty(J^k(\pi))$.

Определение 3. Подмножество $\mathcal{E}^{(l)}=\{\theta_{k+l}=[s]^{k+l}_x,\ s\in\Gamma(\pi)\mid j_k(s)(x)$ касается $\mathcal{E}$ в точке $\theta_k=[s]^k_x$ с порядком $\geqslant l\}$ в $J^{k+l}(\pi)$ называется l-м продолжением уравнения $\mathcal{E}\subset J^k(\pi)$. Обратный предел $\mathcal{E}^\infty=\operatorname{proj}\lim\limits_{l\to\infty}\mathcal{E}^{(l)}$ относительно проекций $\pi_{l+1,l}:\ J^{l+1}(\pi)\to J^l(\pi)$ называется бесконечным продолжением уравнения $\mathcal{E}$.

Определение 4. Симметрией уравнения $\mathcal{E}^\infty$ называется π-вертикальное векторное поле X, сохраняющее распределение Картана $\mathcal{C}=\bigcup\limits_{\theta\in\mathcal{E}^\infty}C_\theta$: $[X,\mathcal{C}]\subset\mathcal{C}$.

Любое поле Ли X, сохраняющее распределение Картана $\mathcal{C}$, разложимо в сумму $X=\text{Э}_\varphi+Y$, где $Y\in\mathcal{C}$, а Э_φ — эволюционное поле. Любое инфинитезимальное преобразование пространства $J^0(\pi)$ можно продолжить до поля Ли. В координатах правило поднятия таково: полю $X^0=\sum\limits_i a_i\partial/\partial x^i+\sum\limits_j b_j\partial/\partial u^j$ сопоставляется поле $\hat{X}=\sum\limits_i a_iD_i+\sum\limits_{i,j}\text{Э}_{b_j-a_ip^j_i}$.

Теорема (из работы [1]). *Если $\mathcal{E}\subset J^k(\pi)$ — такое уравнение $\{F^1=0,\ldots,F^r=0\}$, что $\pi_{\infty,0}(\mathcal{E}^\infty)=J^0(\pi)$, то алгебра Ли симметрий $\operatorname{sym}\mathcal{E}^\infty$ изоморфна алгебре Ли решений системы определяющих уравнений $\ell^{\mathcal{E}}_{F^\alpha}(\varphi)=0$, $\alpha=1,\ldots,r$, где $\varphi\in C^\infty(\mathcal{E}^\infty)$; в алгебре решений φ структура алгебры Ли задана скобкой $\{\varphi,\psi\}_{\mathcal{E}^\infty}=(\text{Э}_\varphi(\psi)-\text{Э}_\psi(\varphi))|_{\mathcal{E}^\infty}$.*

Накрытия. Пусть $\mathcal{E}$ — дифференциальное уравнение в расслоении $\pi:\ E^{n+m}\to M^n$, и $\mathcal{E}^\infty$ — бесконечное продолжение уравнения $\mathcal{E}$. В каждой точке $\theta\in\mathcal{E}^\infty$ определено n-мерное подпространство $\mathcal{C}_\theta\subset T_\theta(\mathcal{E}^\infty)$ — картановская плоскость. Распределение Картана $\mathcal{C}=\{\mathcal{C}_\theta\}_{\theta\in\mathcal{E}^\infty}$ на $\mathcal{E}^\infty$ является фробениусовым: $[\mathcal{C},\mathcal{C}]\subset\mathcal{C}$; в локальных координатах оно задано системой n векторных полей $\bar{D}_1,\ \ldots,\ \bar{D}_n$, где $\bar{D}_i$ — ограничение на $\mathcal{E}^\infty$ оператора полной производной по i-й независимой переменной.

Определение 5. Уравнение $\tilde{\mathcal{E}}^\infty$ с n-мерным распределением Картана $\tilde{\mathcal{C}}$ и регулярное отображение τ называются накрытием над уравнением $\mathcal{E}^\infty$, если для любой точки $\theta \in \tilde{\mathcal{E}}^\infty$ касательное отображение $\tau_{*,\theta}$ является изоморфизмом плоскости $\tilde{\mathcal{C}}_\theta$ на картановскую плоскость $\mathcal{C}_{\tau(\theta)}$ уравнения $\mathcal{E}^\infty$ в точке $\tau(\theta)$.

Размерностью накрытия назовем размерность слоя отображения τ.

Задание накрытий в координатах. Многообразие $\tilde{\mathcal{E}}$ и отображение $\tau : \tilde{\mathcal{E}} \to \mathcal{E}^\infty$ локально можно реализовать как прямое произведение $\mathcal{E}^\infty \times W$ ($W \subseteq \mathbb{R}^N$ — открытое множество, $0 < N \leqslant \infty$) и естественную проекцию $\mathcal{E}^\infty \times W \to \mathcal{E}^\infty$ соответственно. Тогда распределение $\tilde{\mathcal{C}}$ на $\tilde{\mathcal{E}}$ можно локально задать системой векторных полей

$$\tilde{D}_i = \bar{D}_i + \sum_{j=1}^{N} X_{ij}\frac{\partial}{\partial w_j}, \quad i = 1, \ldots, n,$$

где $X_{ij} \in C^\infty(\tilde{\mathcal{E}})$ — коэффициенты τ-вертикальных полей на $\tilde{\mathcal{E}}$, w_1, ..., w_N — декартовы координаты в $\mathbb{R}^N$. При этом условие Фробениуса $[\tilde{\mathcal{C}}, \tilde{\mathcal{C}}] \subset \tilde{\mathcal{C}}$ интегрируемости распределения $\tilde{\mathcal{C}}$ эквивалентно тому, что $[\tilde{D}_i, \tilde{D}_j] = 0$, $i, j = 1, \ldots, n$, или, что равносильно, равенствам $\tilde{D}_i(X_{jk}) = \tilde{D}_j(X_{ik})$ для всех $i, j = 1, \ldots, n$, $0 \leqslant k \leqslant N$.

Кординаты w_i будем называть нелокальными переменными. В координатах x^i, u^j_σ, w_j правила $\tilde{D}_i(w_j) = X_{ij}$ дифференцирования нелокальных переменных w_j вместе с исходным уравнением $\mathcal{E}^\infty$ задают накрывающее уравнение $\tilde{\mathcal{E}}$. Нелокальной симметрией уравнения $\mathcal{E}^\infty$ называется симметрия накрывающего уравнения $\tilde{\mathcal{E}}$. При $n = 2$ накрытие над уравнением $\mathcal{E}^\infty$ называется неабелевым, если оно не сводится к закону сохранения [1] для $\mathcal{E}^\infty$.

Пусть поле $\hat{X}$ — симметрия уравнения $\mathcal{E}^\infty$, а $\tau : \tilde{\mathcal{E}} \to \mathcal{E}^\infty$ — накрытие. Возможны два принципиально разных случая: 1) симметрию $\hat{X}$ уравнения $\mathcal{E}^\infty$ можно продолжить до симметрии $\tilde{X}$ накрывающего уравнения $\tilde{\mathcal{E}}$, и 2) противоположная ситуация, когда любое поднятие симметрии $\hat{X}$ не является симметрией накрывающего уравнения. Во втором случае поле $\hat{X}$ порождает однопараметрическое семейство уравнений $\tilde{\mathcal{E}}_t$, накрывающих $\mathcal{E}^\infty$. Для накрытий, рассматриваемых в данной статье, дело обстоит именно так.

Пусть $\mathcal{E}_i \subset J^{k_i}(\pi_i)$, $i = 1, 2$, — два УрЧП и $\tau_i : \tilde{\mathcal{E}} \to \mathcal{E}_i^\infty$ — накрытия с единым тотальным пространством $\tilde{\mathcal{E}}$. Тогда диаграмма

$$\mathcal{E}_1^\infty \xleftarrow{\tau_1} \tilde{\mathcal{E}} \xrightarrow{\tau_2} \mathcal{E}_2^\infty \quad (1)$$

называется преобразованием Беклунда $\mathcal{B}(\tilde{\mathcal{E}}, \tau_i, \mathcal{E}_i)$ между уравнениями $\mathcal{E}_i$. При $\mathcal{E}_1^\infty = \mathcal{E}_2^\infty = \mathcal{E}^\infty$ диаграмма (1) называется автопреобразованием Беклунда.

В координатах преобразование Беклунда между уравнениями $\mathcal{E}$ и $\mathcal{E}'$ в рассматриваемом ниже случае является системой дифференциальных соотношений на неизвестные функции u и u', которая обладает следующим свойством: если функция u — решение уравнения $\mathcal{E}$ и функции u и u' удовлетворяют этим соотношениям, то функция u' — решение уравнения $\mathcal{E}'$, и наоборот.

Замечание 1. Пусть $\tau_j : \tilde{\mathcal{E}}_j \to \mathcal{E}_j^\infty$, $j = 1, 2$, — два накрытия и $\mu : \tilde{\mathcal{E}}_1 \to \tilde{\mathcal{E}}_2$ — диффеоморфизм, отображающий распределение Картана $\mathcal{C}_{\tau_1}\mathrm{D}(\tilde{\mathcal{E}}_1)$ в $\mathcal{C}_{\tau_2}\mathrm{D}(\tilde{\mathcal{E}}_2)$. Тогда диаграмма $\mathcal{B}(\tilde{\mathcal{E}}_j, \tau_1, \tau_2 \circ \mu, \mathcal{E}_j)$ также является преобразованием Беклунда между уравнениями $\mathcal{E}_j$, а накрытия τ_1 и $\tau_2 \circ \mu$ называются эквивалентными.

Замечание 2. Пусть $\tau : \tilde{\mathcal{E}} \to \mathcal{E}^\infty$ — накрытие и μ — нетривиальный диффеоморфизм многообразий, сохраняющий распределение Картана; например μ — дискретная симметрия, которую нельзя ограничить на $\mathcal{E}^\infty$. Тогда диаграмма

$$\mathcal{E}^\infty \xleftarrow{\tau} \tilde{\mathcal{E}} \xrightarrow{\mu} \tilde{\mathcal{E}} \xrightarrow{\tau} \mathcal{E}^\infty \quad (2)$$

также является автопреобразованием Беклунда для $\mathcal{E}$. Ниже мы применим указанную конструкцию для построения автопреобразований Беклунда для уравнения Лиувилля.

2. Гиперболическое уравнение Лиувилля $\mathcal{E}$ имеет вид

$$\mathcal{E} = \{F \equiv u_{xy} - \exp(2u) = 0\}. \quad (3)$$

Рассмотрим структуру накрытия $\tau_t : \tilde{\mathcal{E}}_t \to \mathcal{E}^\infty$, заданную продолженными полными производными

$$\tilde{D}_x = \bar{D}_x + \tilde{u}_x\partial/\partial\tilde{u}, \ \ \tilde{D}_y = \bar{D}_y + \tilde{u}_y\partial/\partial\tilde{u}, \ \ [\tilde{D}_x, \tilde{D}_y] = 0, \quad (4)$$

в случае, когда частные производные по x и y нелокальной переменной $\tilde{u}$ заданы соотношениями

$$\tilde{u}_x = u_x + \mathrm{e}^{-t}\exp(\tilde{u} + u), \quad \tilde{u}_y = -u_y + \mathrm{e}^{t}\operatorname{sh}(\tilde{u} - u). \quad (5)$$

Примем, что диффеоморфизм μ переставляет переменную u вдоль слоя расслоения струй и нелокальную переменную $\tilde{u}$: $u \leftrightarrow \tilde{u}$, — и отображает $x \mapsto -x$, $y \mapsto -y$. Тогда диаграмма (2) определяет автопреобразование Беклунда $\mathcal{B}(\tilde{\mathcal{E}}_t, \tau_t, \tau_t \circ \mu, \mathcal{E})$ для уравнения (3); уравнения $\tilde{\mathcal{E}}_t$ автопреобразования Беклунда [4] для уравнения Лиувилля таковы:

$$(\tilde{u} - u)_x = \exp(-t)\exp(\tilde{u} + u), \quad (6)$$

$$(\tilde{u} + u)_y = 2\exp(t)\operatorname{sh}(\tilde{u} - u). \quad (7)$$

Обозначим $u_k \equiv \partial^k u/\partial x^k$, $u_{\overline{k}} \equiv \partial^k u/\partial y^k$ $\forall k \in \mathbb{N}$. Рассмотрим масштабную симметрию X^0 координат базы: $X^0 = -x\partial/\partial x + y\partial/\partial y$. Ее можно продолжить на все $\mathcal{E}^\infty$:

$$\hat{X} = -x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + \sum_{k\geqslant 1} k u_k \frac{\partial}{\partial u_k} - \sum_{k\geqslant 1} k u_{\overline{k}} \frac{\partial}{\partial u_{\overline{k}}}. \quad (8)$$

З а м е ч а н и е 3. Диффеоморфизмы $A_t = \exp(t\hat{X})$ образуют абелеву группу. Действительно, $x(t) = \exp(-t)x(0)$, $y(t) = \exp(t)y(0)$, $u(t) = u(0)$, $u_k(t) = \exp(kt)u_k(0)$, $u_{\overline{k}}(t) = \exp(-kt)u_{\overline{k}}(0)$, $k \geqslant 1$. Очевидно, $A_0 = \mathrm{id}$ и $A_{t_1} \circ A_{t_2} = A_{t_2} \circ A_{t_1} = A_{t_1+t_2}$.

У т в е р ж д е н и е 1. *Симметрию $\hat{X}$ нельзя продолжить до симметрии накрывающего уравнения $\tilde{\mathcal{E}}_t$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим противное. Обозначим через $\tilde{Э}_\varphi$ эволюционное векторное поле $\sum\limits_\sigma \tilde{D}_\sigma(\varphi)\partial/\partial u_\sigma$ на $\tilde{\mathcal{E}}_t$, где $\varphi \in C^\infty(\tilde{\mathcal{E}}_t)$, а $\tilde{\ell}_F(\varphi) = \tilde{Э}_\varphi(F)$; пусть также $x^1 \equiv x$, $x^2 \equiv y$. Итак, пусть существует функция $a \in C^\infty(\tilde{\mathcal{E}}_t)$, удовлетворяющая линеаризованной системе

$$\begin{aligned} &\tilde{\ell}_F(\varphi) = 0, \\ &\tilde{D}_{x^i}(a) = \tilde{Э}_{\varphi,a}(\tilde{u}_{x^i}) \equiv \left(\tilde{Э}_\varphi + a\partial/\partial\tilde{u}\right)(\tilde{u}_{x^i}). \end{aligned} \tag{9}$$

Это значит, что поле $\tilde{Э}_{\varphi,a}$ есть локальная симметрия накрывающего уравнения $\tilde{\mathcal{E}}_t$, и $\hat{X}$ конструктивно продолжена на $\tilde{\mathcal{E}}_t$. Однако система (9) несовместна, поскольку $\tilde{D}_x \circ \tilde{D}_y(a) \neq \tilde{D}_y \circ \tilde{D}_x(a)$. В самом деле, $\tilde{D}_x \circ \tilde{D}_y(a) - \tilde{D}_y \circ \tilde{D}_x(a)$ не зависит от a и равняется

$$\begin{aligned} &xu_x^2\,\mathrm{e}^{t+u-\tilde{u}} + u_x y u_y\,\mathrm{e}^{t+\tilde{u}-u} - xu_x\,\mathrm{e}^{2\tilde{u}} - u_x y u_y\,\mathrm{e}^{t+u-\tilde{u}} - \\ &-2yu_y\,\mathrm{e}^{2t+\tilde{u}+u} + 2xu_x\,\mathrm{e}^{2t+\tilde{u}+u} - xu_x^2\,\mathrm{e}^{t+\tilde{u}-u} + x\,\mathrm{e}^{2u}\,u_x - \\ &-y\,\mathrm{e}^{2u}\,u_y + 2\,\mathrm{e}^t\,xu_x^2 + yu_y\,\mathrm{e}^{2\tilde{u}} - 2\,\mathrm{e}^t\,yu_yu_x \neq 0. \end{aligned}$$

Утверждение доказано. ■

Таким образом, масштабная симметрия $\hat{X}$ является лишь τ_t-тенью (т. е. решением уравнения $\tilde{\ell}_F(\varphi) = 0$, см. (9)) и порождает семейство накрывающих $\mathcal{E}^\infty$ уравнений $\tilde{\mathcal{E}}_t$, параметризованных $t \in \mathbb{R}$.

3. В локальных координатах форма связности U_t накрывающего многообразия $\tilde{\mathcal{E}}_t$ с распределением Картана $\tilde{\mathcal{C}}_t$ имеет вид

$$\begin{aligned} U_t = \sum_\sigma d_{\mathcal{C}}(u_\sigma) \otimes \frac{\partial}{\partial u_\sigma} &+ \\ + (d\tilde{u} - (u_x + \exp(\tilde{u} + u - t))dx &+ \\ + (u_y - 2\exp(t)\,\mathrm{sh}(\tilde{u} - u))dy) &\otimes \frac{\partial}{\partial\tilde{u}}, \end{aligned} \tag{10}$$

где d_C — дифференциал Картана: $d_C u_\sigma = du_\sigma - \sum\limits_i u_{\sigma+1_i}\,dx^i$.

Назовем μ степенью дифференцирования Ω, если $\Omega \in \mathrm{D}(\Lambda^\mu(\tilde{\mathcal{E}}))$. Через $[\![\cdot,\cdot]\!]^{\mathrm{FN}}$ обозначим скобку Фрёлихера-Нийенхейса [2, 3]: $[\![\Omega,\Theta]\!]^{\mathrm{FN}}(f) = \mathrm{L}_\Omega(\Theta(f)) - (-1)^{\mu\nu} \cdot \mathrm{L}_\Theta(\Omega(f))$, где $\Omega, \Theta \in \mathrm{D}(\Lambda^*(\mathcal{E}))$ — дифференцирования со значениями в формах, $f \in C^\infty(\mathcal{E})$, и степени $\mu = \deg\Omega$, $\nu = \deg\Theta$; $\mathrm{L}_\Omega = [i_\Omega, \mathrm{d}] : \Lambda^k(\mathcal{E}) \to \Lambda^{k+\deg\Omega}(\mathcal{E})$ — производная Ли, $i_\Omega : \Lambda^k(\mathcal{E}) \to \Lambda^{k+\deg\Omega-1}(\mathcal{E})$ — внутреннее произведение (подстановка).

Т е о р е м а (из работы [2]). *Пусть $\tau : \tilde{\mathcal{E}} \to \mathcal{E}^\infty$ — накрытие и $A_t : \tilde{\mathcal{E}} \to \tilde{\mathcal{E}}$ — гладкое семейство диффеоморфизмов, причем $A_0 = \mathrm{id}$ и $\tau_t = \tau \circ A_t : \tilde{\mathcal{E}} \to \mathcal{E}^\infty$ является накрытием $\forall t \in \mathbb{R}$. Тогда изменение формы связности U_t описывается соотношением*

$$\frac{dU_t}{dt} = [\![\hat{X}_t, U_t]\!]^{\mathrm{FN}}, \tag{11}$$

где $\hat{X}_t$ является τ_t-тенью $\forall t \in \mathbb{R}$.

В случае когда $\tilde{\mathcal{E}}$ — конечномерное многообразие, существует изоморфизм $\mathrm{D}(\Lambda^*(\tilde{\mathcal{E}})) \simeq \Lambda^*(\tilde{\mathcal{E}}) \otimes \mathrm{D}(\tilde{\mathcal{E}})$; таким образом, всякое дифференцирование $\Omega \in \mathrm{D}(\Lambda^*(\tilde{\mathcal{E}}))$ представимо в виде конечной суммы слагаемых $\Omega = \omega \otimes X$, где $\omega \in \Lambda^*(\tilde{\mathcal{E}})$ и $X \in \mathrm{D}(\tilde{\mathcal{E}})$. Скобка Фрёлихера-Нийенхейса таких элементов

$$\begin{aligned} &[\![\omega \otimes X, \theta \otimes Y]\!]^{\mathrm{FN}} = \omega \wedge \theta \otimes [X, Y] + \omega \wedge \mathrm{L}_X(\theta) \otimes (Y) + \\ &+(-1)^i\,d\omega \wedge (X \lrcorner\, \theta) \otimes Y - (-1)^{ij}\theta \wedge \mathrm{L}_Y(\omega) \otimes X - \\ &-(-1)^{(i+1)j}\,d\theta \wedge (Y \lrcorner\, \omega) \otimes X, \end{aligned} \tag{12}$$

если X, $Y \in \mathrm{D}(\tilde{\mathcal{E}})$, $\omega \in \Lambda^i(\tilde{\mathcal{E}})$ и $\theta \in \Lambda^j(\tilde{\mathcal{E}})$. Для произвольного $\tilde{\mathcal{E}}$ существует вложение $\Lambda^*(\tilde{\mathcal{E}}) \otimes \mathrm{D}(\tilde{\mathcal{E}}) \subset \mathrm{D}(\Lambda^*(\tilde{\mathcal{E}}))$, заданное правилом $(\omega \otimes X)(f) = X(f)\omega$ для любой $f \in C^\infty(\tilde{\mathcal{E}})$.

Если накрытия τ_t соответствуют автопреобразованию Беклунда (6–7) для уравнения Лиувилля (3), то

$$\frac{dU_t}{dt} = (\exp(\tilde{u} + u - t)\,dx - 2\exp(t)\,\mathrm{sh}(\tilde{u} - u)\,dy) \otimes \frac{\partial}{\partial\tilde{u}}. \tag{13}$$

Утверждается, что масштабная симметрия $\hat{X}$ и является той τ_t-тенью, для которой изменение формы связности U_t (10) накрытия τ_t (4) задано формулой (13) в силу уравнения (11). Для доказательства этого утверждения необходимы леммы 1–4.

Л е м м а 1. $[\![\hat{X}, U_t]\!]^{\mathrm{FN}} \lrcorner\, d\tilde{u} = (dU_t/dt) \lrcorner\, d\tilde{u}$.

Л е м м а 2. $[\![\hat{X}, U_t]\!]^{\mathrm{FN}} \lrcorner\, dx = [\![\hat{X}, U_t]\!]^{\mathrm{FN}} \lrcorner\, dy = [\![\hat{X}, U_t]\!]^{\mathrm{FN}} \lrcorner\, du = 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Доказательство лемм 1 и 2 заключается в последовательном применении (12). ■

Тем не менее вычисление коэффициентов $[\![\hat{X}, U_t]\!]^{\mathrm{FN}}$ при $\partial/\partial u_k$ или $\partial/\partial u_{\overline{k}}$ нетривиально при $k \geqslant 1$.

З а м е ч а н и е 4. Пусть $u(x)$, $f(u)$ — гладкие функции, D_x — полная производная по x, натуральное $n > 0$ и натуральное число $l \leqslant n - 1$. Тогда

$$\begin{aligned} &D_x\left(\frac{\partial}{\partial u_l} D_x^{n-1}(f(u))\right) = \\ &= \frac{\partial}{\partial u_l} D_x^n(f(u)) - \frac{\partial}{\partial u_{l-1}} D_x^{n-1}(f(u)). \end{aligned} \tag{14}$$

Следствие 1. *При тех же условиях*

$$(n+1)u_{n+1}\frac{\partial}{\partial u_{n+1}}D_x^{n+1}(f(u)) = \\ = (n+1)u_{n+1}\frac{\partial}{\partial u_n}D_x^n(f(u)) = (n+1)u_{n+1}f'(u). \tag{15}$$

Лемма 3. *Пусть $u(x)$, $f(u)$ — гладкие функции, D_x — полная производная по x, $u_k \equiv D_x^k(u(x))$, $k \geqslant 0$, $u_0 \equiv u$. Тогда*

$$nD_x^n(f(u)) = \sum_{m=1}^{n} mu_m \frac{\partial}{\partial u_m}D_x^n(f(u)) \tag{16}$$

выполнено при любом целом $n \geqslant 0$.

Доказательство. Докажем (16) индукцией по n с базой $n=0$. При $n \geqslant 0$ имеем

$$(n+1)D_x^{n+1}(f(u)) = D_x(nD_x^n(f(u)) + D_x^n(f(u))) =$$

по предположению индукции,

$$= D_x\left(\sum_{m=1}^{n} mu_m\frac{\partial}{\partial u_m}D_x^n(f(u)) + D_x^n(f(u))\right) =$$

по правилу Лейбница,

$$=\sum_{m=1}^{n} mu_{m+1}\frac{\partial}{\partial u_m}D_x^n(f(u)) + \\ + \sum_{m=1}^{n} mu_m D_x\frac{\partial}{\partial u_m}D_x^n(f(u)) + D_xD_x^n(f(u)) =$$

применяя (14) ко второй сумме,

$$=\sum_{m=1}^{n} mu_m\frac{\partial}{\partial u_m}D_x^{n+1}(f(u)) + \\ + \sum_{m=1}^{n} mu_{m+1}\frac{\partial}{\partial u_m}D_x^n(f(u)) - \\ - \sum_{m=1}^{n} mu_m\frac{\partial}{\partial u_{m-1}}D_x^n(f(u)) + D_xD_x^n(f(u)) =$$

используя определение D_x и сдвигая индекс в последней сумме,

$$=\sum_{m=1}^{n} mu_m\frac{\partial}{\partial u_m}D_x^{n+1}(f(u)) + \\ + \sum_{m=0}^{n}(m+1)u_{m+1}\frac{\partial}{\partial u_m}D_x^n(f(u)) - \\ - \sum_{m=0}^{n-1}(m+1)u_{m+1}\frac{\partial}{\partial u_m}D_x^n(f(u)) =$$

поскольку почти все слагаемые в последних двух суммах совпадают,

$$=\sum_{m=1}^{n} mu_m\frac{\partial}{\partial u_m}D_x^{n+1}(f(u)) + \\ + (n+1)u_{n+1}\frac{\partial}{\partial u_n}D_x^n(f(u)) =$$

в силу (15),

$$=\sum_{m=1}^{n} mu_m\frac{\partial}{\partial u_m}D_x^{n+1}(f(u)) + \\ + (n+1)u_{n+1}\frac{\partial}{\partial u_{n+1}}D_x^{n+1}(f(u)) = \\ =\sum_{m=1}^{n+1} mu_m\frac{\partial}{\partial u_m}D_x^{n+1}(f(u)).$$

■

Лемма 4. $[\![\hat{X}, U_t]\!]^{\mathrm{FN}} \lrcorner\, du_k = [\![\hat{X}, U_t]\!]^{\mathrm{FN}} \lrcorner\, du_{\overline{k}} = 0$, $k \geqslant 1$.

Доказательство. Пусть $k \in \mathbb{N}$. Используя (12), рассмотрим 1-форму

$$[\![\hat{X}, U_t]\!]^{\mathrm{FN}} \lrcorner\, du_k = \\ = \left((k-1)\bar{D}_y u_k - \sum_{l=1}^{k-1} lu_l\frac{\partial}{\partial u_l}\bar{D}_x^{k-1}(\exp(2u))\right)dy;$$

мы видим, что коэффициенты при dx, du, du_l, $du_{\overline{l}}$ тривиальны $\forall l \geqslant 1$. Заметим также, что $\bar{D}_y u_k = \bar{D}_x^{k-1}(\exp(2u))$. По лемме 3, коэффициент при dy равен нулю. Аналогичные рассуждения показывают, что $[\![\hat{X}, U_t]\!]^{\mathrm{FN}} \lrcorner\, du_{\overline{k}} = 0$. Лемма доказана. ■

Теорема 1. *τ_t-тень* (8) *удовлетворяет соотношению*

$$[\![\hat{X}, U_t]\!]^{\mathrm{FN}} = \\ = (\exp(\tilde{u}+u-t)dx - 2\exp(t)\,\mathrm{sh}(\tilde{u}-u)dy)\otimes\frac{\partial}{\partial\tilde{u}},$$

т. е. группа диффеоморфизмов $A_t = \exp(t\hat{X})$ порождает гладкое однопараметрическое семейство (5) *эквивалентных одномерных неабелевых накрытий над уравнением Лиувилля* (3). *Эти накрытия соответствуют автопреобразованиям Беклунда для уравнения Лиувилля, заданным диаграммой* (2). *Изменение формы связности задано формулой* (13).

Заключительное замечание. Нетрудно доказать справедливость аналогичных теорем для преобразования Беклунда между уравнением Лиувилля (3) и волновым уравнением $v_{xy}=0$:

$$(v-u)_x = \exp(-t)\exp(u+v), \\ (v+u)_y = -\exp(t)\exp(u-v), \quad t \in \mathbb{R},$$

а также преобразования Беклунда между уравнением Лиувилля и scal^{+}-уравнением Лиувилля $\Upsilon_{xy} = \exp(-2\Upsilon)$:

$$(\Upsilon-u)_x = 2\exp(-t)\,\mathrm{ch}(\Upsilon+u), \\ (\Upsilon+u)_y = -\exp(t)\exp(u-\Upsilon), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Масштабная симметрия (8) является необходимой τ_t-тенью в обоих случаях, а тождество (16) в полных производных позволяет успешно доказать эти теоремы.

Результаты данной работы позволяют решить [5] задачу интегрирования (авто)преобразований Беклунда для уравнения (3) в нелокальных переменных, а также построить нелокальные законы сохранения и симметрии уравнения Лиувилля.

Автор благодарен А.М. Вербовецкому, И.С. Красильщику, А.В. Овчинникову и В.В. Трушкову за полезные замечания и конструктивную критику. Работа выполнена при частичной финансовой поддержке INTAS, грант YS 2001/2-33.

Литература

1. *Бочаров А.В., Вербовецкий А.М., Виноградов А.М.* и др. Симметрии и законы сохранения уравнений математической физики / Под ред. А.М. Виноградова, И.С. Красильщика. М.: Факториал, 1997.
2. *Igonin S., Krasil'shchik I.S.* // Adv. Studies in Pure Math., Math. Soc. of Japan, 2002 (в печати).
3. *Krasil'shchik I.S., Kersten P.H.M.* Symmetries and recursion operators for classical and supersymmetric differential equations. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht etc., 2000.
4. *Dodd R.K., Bullough R.K.* // Proc. Roy. Soc. London, 1976, **A351**. С. 499.
5. *Киселев А.В.* // Сб. «Ломоносов-2002». Сек. «Физика». 2002. М.: Изд-во Моск. ун-та. С. 35.

Поступила в редакцию
21.12.01

УДК 517.55

ОБОБЩЕНИЕ $1/N$ РАЗЛОЖЕНИЯ В ТЕОРИЯХ С МАТРИЧНЫМИ ПОЛЯМИ

Д. В. Малышев

(*кафедра квантовой статистики и теории поля*)

E-mail: malyshev@gate.itep.ru

Фейнмановские диаграммы в теориях с матричными полями $\Phi \in \mathrm{Mat}(N, N)$ являются ленточными графами. Есть взаимнооднозначное соответствие между ленточными графами и поверхностями с границей и с клеточным разбиением. Степень N в фейнмановских интегралах зависит только от топологии соответствующей поверхности. В работе показано, что это верно и для обобщенных ленточных графов. Такие графы соответствуют поверхностям с разбиением на сферы с отверстиями.

Введение

Основной метод вычислений в квантовой теории поля — разложение в ряд по константе связи. В теориях с матричными полями $\Phi \in \mathrm{Mat}(N, N)$ есть новый параметр $1/N$, по которому можно проводить разложение [1]. В последнее время интерес к $1/N$ разложению сильно возрос в связи с так называемым AdS/CFT соответствием [2–6], также $1/N$ разложение играет важную роль в некоммутативных и в матричных теориях [7, 8].

$1/N$ разложение было сформулировано т'Хофтом для теорий, в которых взаимодействие имеет вид следа от произведения матриц [1]. В частности, так устроены теории Янга–Миллса, описывающие электрослабые и сильные взаимодействия. Вследствие тождеств Славнова–Тейлора перенормировки в теориях Янга–Миллса не меняют вид взаимодействия [9]. Это неверно в случае произвольных теорий с матричными полями, где перенормировки приводят к появлению в лагранжиане взаимодействия произведений следов матриц [10]. Например, в теории с комплексным полем Φ и затравочным взаимодействием $L_{\mathrm{int}} = g\,\mathrm{Tr}[(\Phi\Phi^+)^2]$ перенормировки приводят к появлению взаимодействия $\widetilde{L}_{\mathrm{int}} = \widetilde{g}(\mathrm{Tr}[\Phi\Phi^+])^2$. С другой стороны, мультиследовые взаимодействия можно вводить, чтобы нарушить суперсимметрию [11, 12], поэтому довольно широко обсуждается роль мультиследовых операторов в AdS/CFT соответствии [11–14].

В настоящей работе формулируется обобщение $1/N$ разложения для теорий с мультиследовыми взаимодействиями. Оно основано на соответствии между фейнмановскими диаграммами в таких теориях и поверхностями.

1. Ленточные графы и $1/N$ разложение

Фейнмановские диаграммы в теориях с матричными полями изображаются ленточными графами. Если взаимодействие имеет вид следа от произведения полей $L_{int} = g\,\mathrm{Tr}(\Phi_1 \ldots \Phi_n)$, то в соответствующей вершине графа разрешены только циклические перестановки ребер. Другие перестановки, вообще говоря, запрещены.

Пусть $\Phi \in \mathrm{Mat}(N, N)$ — комплексное поле. В качестве примера рассмотрим ленточные графы в теории с лагранжианом

$$L = L_0 + g\,\mathrm{Tr}[(\Phi^+\Phi)^2],$$

где свободный лагранжиан выберем в виде

$$L_0 = \mathrm{Tr}(\partial_\mu \Phi^+ \partial^\mu \Phi + m^2 \Phi^+ \Phi).$$