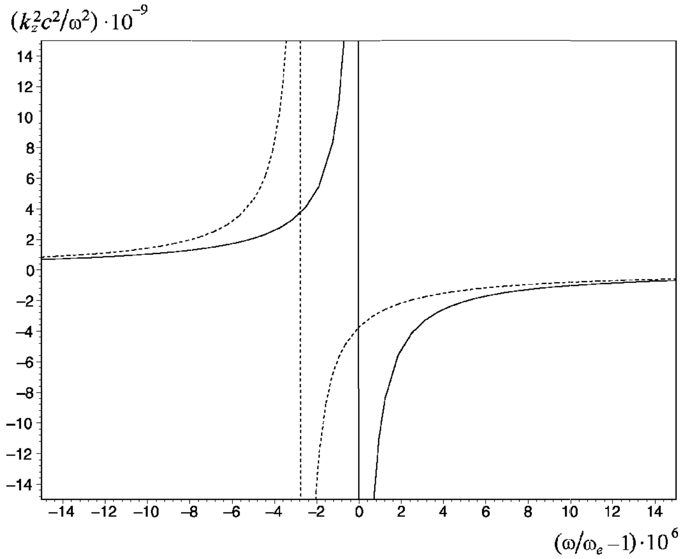

Сдвиг показателя преломления как функции частоты для магнитной восприимчивости $\chi = 2,75 \cdot 10^{-6}$ на моль

Тогда дисперсионное уравнение (7) сводится к уравнению

$$\left(1-\frac{\Omega_e^2+A_ek_z^2}{\omega^2}\right)\left(\left[k_z^2-\frac{\omega^2}{c^2}+\frac{4\pi\chi\omega_e^2k_z^2+\frac{\omega^2}{c^2}\Omega_e^2}{\omega^2-\omega_e^2}\right]^2-\right.$$
$$\left.-\omega^2\omega_e^2\left[\frac{4\pi\chi k_z^2+\frac{\Omega_e^2}{c^2}}{\omega^2-\omega_e^2}\right]^2\right)=0. \qquad (8)$$

Корнями дисперсионного уравнения (8) являются три качественно различные моды:

$$\omega^2 = \Omega_e^2 + A_e k_z^2, \qquad (9)$$

$$\frac{k_z^2c^2}{\omega^2} = \frac{1-\Omega_e^2/[\omega(\omega\pm\omega_e)]}{1\mp 4\pi\omega_e\chi/(\omega\pm\omega_e)}. \qquad (10)$$

Формулой (9) представлен закон дисперсии продольной моды во внешнем магнитном поле. Пространственная дисперсия этой моды обусловлена наличием собственных магнитных моментов электронов. Формула (10) выражает зависимость показателя преломления k_zc/ω поперечных волн от частоты. Показатель преломления явно зависит от равновесной магнитной восприимчивости χ. Для нормальных парамагнитных веществ $\chi \sim 10^{-4} \div 10^{-6}$ на моль. Поэтому зависимость показателя преломления от магнитной восприимчивости χ является слабой. Тем не менее учет конечных значений χ приводит, как это показано на рисунке, к заметному сдвигу частоты циклотронного резонанса. Это обстоятельство может быть использовано для измерения χ.

Литература

1. *Зейтц Ф.* Современная теория твердого тела. М.: ГИТТЛ, 1949. С. 605–657.
2. *Галошина Э.В.* // УФН. 1974. **113**, № 1. С. 105.
3. *Кузьменков Л.С., Максимов С.Г.* // ТМФ. 1999. **118**, № 2. С. 287.
4. *Бор О., Моттельсон Б.* Структура атомного ядра. **Т**. 1. М.: Мир, 1971. С. 72.
5. *Берестецкий В. Б., Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П.* Квантовая электродинамика. М.: Наука, 1989. С. 383–390.
6. *Александров А. Ф., Богданкевич Л. С., Рухадзе А. А.* Основы электродинамики плазмы. М.: Высш. школа, 1988.

Поступила в редакцию
17.12.99

УДК 519.5

ОБ ЭФФЕКТИВНОМ РАНГЕ БЕСКОНЕЧНОМЕРНОЙ ЛИНЕЙНОЙ МОДЕЛИ ИЗМЕРЕНИЯ

М. Л. Сердобольская

(*кафедра компьютерных методов физики*)

Рассмотрена проблема эффективного ранга (максимальной размерности оценки измеряемого сигнала как функции контролируемой среднеквадратичной погрешности оценивания) бесконечномерной линейной модели измерения. Найден эффективный ранг модели, в которой приборное воздействие на сигнал описывается произвольным линейным ограниченным оператором.

Линейное статистическое оценивание сигнала по результатам косвенных наблюдений широко применяется при анализе и интерпретации экспериментальных данных [1, 2]. К достоинствам этого подхода можно отнести относительную простоту вычислительных алгоритмов и применимость их к обширному классу моделей измерения. Однако во многих экспериментах оцениваемый сигнал и результат измерения являются функциями от непрерывно меняющегося параметра — времени или энергии и т. п. При интерпретации таких экспериментальных данных возникает необходимость решать уравнения в бесконечномерных векторных пространствах, и это настолько усложняет вычислительную процедуру, что большинство исследователей в этом случае заменяют функции их конечномерными проекциями, а интегралы — конечными суммами. Применение аппроксимации вместо исходной математической модели, во-первых, вносит дополнительную, вообще говоря, неконтролируемую погрешность в решение задачи интерпретации, во-вторых, ставит это решение в зависимость от абстрактного, не связанного с реальной физической моделью способа дискретизации.

Контролируя допустимую среднеквадратичную погрешность интерпретации, можно определенным образом заменить бесконечномерную модель конечномерной так, что полученное в этой приближенной модели решение задачи интерпретации будет обладать минимальной среднеквадратичной погрешностью среди всех решений данной размерности. Размерность этой, в указанном смысле наилучшей, дискретной модели, рассматриваемая как функция сопутствующей погрешности, в работе [3] была названа эффективным рангом модели измерения. Там же были подробно рассмотрены свойства эффективного ранга конечномерных линейных моделей. Полученные результаты легко обобщить на случай бесконечномерных моделей измерения, в которых преобразование измеряемого сигнала в процессе измерения описывается линейным оператором с чисто дискретным спектром [4].

В настоящей работе рассмотрена проблема эффективного ранга модели, в которой приборное воздействие на оцениваемый сигнал описывается произвольным ограниченным оператором, в том числе с непрерывным спектром.

1. Задача интерпретации. Эффективный ранг

В рамках линейных статистических методов задача интерпретации ставится следующим образом: требуется найти линейный оператор R, на котором достигается

$$\inf_R \sup_{f\in\mathcal{F}} \mathbf{E}\|R(Af+\nu)-\Pi f\|^2, \tag{1}$$

где $\mathbf{E}$ — знак математического ожидания по распределению случайного элемента ν гильбертова пространства $\tilde{\mathcal{R}}$; f — неслучайный элемент, принадлежащий априори заданному подмножеству $\mathcal{F}$ гильбертова пространства $\mathcal{R}$; A, Π — линейные операторы.

В данной задаче речь идет о построении оценки элемента Πf по результату измерения $\xi = Af+\nu$. Оператор A моделирует приборное воздействие на измеряемый сигнал f, который априори принадлежит некоторому множеству $\mathcal{F}$; случайный элемент ν есть погрешность измерения; оператор Π выделяет те параметры измеряемого сигнала, которые интересуют исследователя. За критерий качества оценки $R\xi$ принята величина наибольшей по $f\in\mathcal{F}$ среднеквадратичной погрешности $\mathbf{E}\|R\xi-\Pi f\|^2$: чем меньше величина погрешности, тем лучше оценка. Таким образом, если R есть оператор, на котором достигается точная нижняя грань в (1), то $R\xi$ есть наилучшая оценка элемента Πf. В этом случае $R\xi$ будем называть результатом интерпретации измерения ξ, а величину $\sup\limits_{f\in\mathcal{F}} \mathbf{E}\|R(Af+\nu)-\Pi f\|^2$ — погрешностью интерпретации. Сделаем ряд предположений, уточняющих математическую модель интерпретации. (В работе будут использованы обозначения: $\mathcal{R}(A)$ — пространство значений оператора A; $\mathcal{L}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ — линейная оболочка элементов $x_1, x_2, \dots, x_n$; A^- — оператор, псевдообратный к оператору A. Символ $^-$ означает ортогональное дополнение к множеству, а черта над оператором или множеством — замыкание.)

Будем полагать, что заданы:

$(M1)$ математическое ожидание $\mathbf{E}\nu = 0$ случайного элемента ν и его ковариационный оператор $\Sigma > 0$;

$(M2)$ множество $\mathcal{F}$ априорных значений элемента f, совпадающее со всем пространством $\mathcal{R}$;

$(M3)$ оператор A, такой, что оператор $\Sigma^{-1/2}A$ ограничен и всюду определен;

$(M4)$ $\dim\mathcal{R} = \infty$, $\operatorname{rank}\Sigma^{-1/2}A = \infty$.

Будем говорить, что условия $(M1)$–$(M4)$ определяют бесконечномерную модель $[A,\Sigma]$ измерения $\xi = Af+\nu$ без априорной информации об измеряемом сигнале. Наложим на оператор Π в (1) условия:

$(P1)$ Π есть ортогональный проектор в $\mathcal{R}$, $\operatorname{rank}\Pi < \infty$;

$(P2)$ $\mathcal{R}(\Pi) \subset \mathcal{R}\left(\Sigma^{-1/2}A\right)^*$.

Поскольку величина $\sup\limits_{f\in\mathcal{R}} \mathbf{E}\|R(Af+\nu)-\Pi f\|^2$ конечна только тогда, когда для всех $f\in\mathcal{R}$ имеет место равенство $RAf = \Pi f$, потребуем $RA = \Pi$. Заметим, что это условие гарантирует несмещенность оценки $R\xi$ элемента Πf. Таким образом, задача (1) становится задачей на минимум величины $\mathbf{E}\|R\nu\|^2$ по всем операторам R, для которых $RA = \Pi$. Решение этой задачи дает следующая лемма [5].

Лемма 1. *Если Σ, A удовлетворяют условиям $(M1), (M3)$ и ортогональный проектор Π — условиям $(P1), (P2)$, то задача (1) разрешима, точная нижняя грань в (1) равна*

$$h(A,\Sigma,\Pi) = \sum_{j=1}^{\operatorname{rank}\Pi} \left\| \left((\Sigma^{-1/2}A)^- \right)^* e_j \right\|^2,$$

где $\{e_j\}_{j=1,\dots,\operatorname{rank}\Pi}$ — произвольный ортонормированный базис $\mathcal{R}(\Pi)$, и достигается на операторе $R = \overline{\Pi(\Sigma^{-1/2}A)^-}\,\Sigma^{-1/2}$.

Зададим максимальное значение погрешности δ, при котором результат интерпретации приемлем для экспериментатора, и поставим задачу определения максимальной размерности ортогональной проекции Πf, для которой выполнено условие $h(A,\Sigma,\Pi) \leqslant \delta$, другими словами, определим натуральное число ρ условиями (Π_ρ и Π_r — ортогональные проекторы в $\mathcal{R}$):

$$\begin{array}{llll} \textit{найдется} & \Pi_\rho: & \operatorname{rank}\Pi_\rho = \rho, & h(A,\Sigma,\Pi_\rho) \leqslant \delta; \\ \textit{для любого} & \Pi_r: & \operatorname{rank}\Pi_r = r > \rho, & h(A,\Sigma,\Pi_r) > \delta. \end{array} \tag{2}$$

Функция $\rho(\cdot)$, определенная на $[0,\infty)$ и принимающая значения $0, 1, 2, \dots$, в работе [3] названа эффективным рангом модели $[A,\Sigma]$. Эффективный ранг показывает, какое максимальное число ортогональных составляющих элемента f можно оценить по измерению $\xi = Af + \nu$ со среднеквадратичной погрешностью, не превосходящей δ. Ортогональный проектор Π_ρ в (2) назовем эффективным проектором. Понятно, что для определения эффективного ранга модели необходимо для каждого натурального r решить следующую вариационную задачу: найти

$$h_*(A,\Sigma,r) = \inf_{\{e_j\}} \sum_{j=1}^{r} \left\| \left((\Sigma^{-1/2}A)^-\right)^* e_j \right\|^2,$$

где точная нижняя грань вычисляется по всем ортонормированным системам элементов $\{e_j\}_{j=1,\dots,r}$ в $\mathcal{R}\left(\Sigma^{-1/2}A\right)^*$. Решение этой задачи показывает, какую минимальную погрешность интерпретации можно получить, оценивая не менее r ортогональных составляющих элемента f.

Целью настоящей работы является исследование проблемы эффективного ранга для модели $[A,\Sigma]$ с произвольным ограниченным оператором $\Sigma^{-1/2}A$ бесконечного ранга. Будет показано, что значение $\rho = \rho(\delta)$ эффективного ранга конечно при любом $\delta > 0$, и найдена явная формула, позволяющая вычислить эффективный ранг модели $[A,\Sigma]$.

2. Ранг модели

Сформулируем несколько утверждений, на основании которых покажем, чему равен эффективный ранг модели $[A,\Sigma]$. Далее все точные нижние и точные верхние грани вычисляются по множеству элементов единичной нормы, если иное не оговорено особо.

Пусть S — произвольный ненулевой ограниченный оператор, действующий из $\mathcal{R}$ в $\tilde{\mathcal{R}}$, $\operatorname{rank} S = \infty$, $B = S^*$, и $s_1^2 = \|B\|^2 = \|S\|^2$. Как известно [6], в этом случае существует последовательность $s_1 \geqslant s_2 \geqslant \ldots \geqslant s_n \ldots$ неотрицательных чисел, называемых сингулярными числами оператора S, которая обладает следующими свойствами.

1. Каждое s_j^2 есть точка спектра оператора B^*B при всех $j = 1, 2, \ldots$.

2. Если $s_1^2, s_2^2, \ldots, s_k^2$ — собственные значения (СЗ) оператора B^*B и $\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \ldots, \tilde{e}_k$ — отвечающие им собственные векторы, то

$$\begin{aligned} \|B\tilde{e}_1\|^2 &= \sup_{y\in\tilde{\mathcal{R}}} \|By\|^2 = s_1^2, \\ \|B\tilde{e}_k\|^2 &= \sup_{y\in\mathcal{L}^-(\tilde{e}_1,\dots,\tilde{e}_{k-1})} \|By\|^2 = s_k^2, \quad k = 2, 3, \ldots . \end{aligned} \tag{3}$$

3. Если s_1^2 — точка непрерывного спектра оператора B^*B, то для любого линейного подпространства $\mathcal{L}$ произвольной конечной размерности и для любого $j > 1$

$$s_j^2 = s_1^2 = \sup_{y\in\mathcal{L}^-} \|By\|^2,$$

и не существует элемента $y \in \tilde{\mathcal{R}}$ единичной нормы, для которого $\|By\|^2 = s_1^2$.

4. Если при некотором натуральном k сингулярные числа удовлетворяют условиям (3) и s_{k+1}^2 — точка непрерывного спектра оператора B^*B, то для любого линейного подпространства $\mathcal{L} \subset \mathcal{L}^-(\tilde{e}_1, \ldots, \tilde{e}_k)$ произвольной конечной размерности и для любого $j > k+1$

$$s_j^2 = s_{k+1}^2 = \sup_{y\in\mathcal{L}^{-k}} \|By\|^2,$$

где $\mathcal{L}^{-k}$ — ортогональное дополнение к $\mathcal{L}$ в $\mathcal{L}^-(\tilde{e}_1, \ldots, \tilde{e}_k)$, и не существует элемента $y \in \mathcal{L}^{-k}$ единичной нормы, для которого $\|By\|^2 = s_{k+1}^2$.

Множество сингулярных чисел указанной последовательностью, вообще говоря, не исчерпывается, однако для любого конечного n сингулярные числа $s_1, s_2, \ldots, s_n$, удовлетворяющие этим условиям, максимальны.

Справедливы следующие утверждения, касающиеся свойств псевдообращения.

Л е м м а 2. *Для любого ограниченного B*

$$\inf_{x\in\mathcal{R}(B)} \|B^-x\|^2 = \frac{1}{\sup\limits_{y\in\mathcal{R}t} \|By\|^2} = \frac{1}{s_1^2},$$

причем нижняя грань достигается тогда и только тогда, когда s_1^2 — собственное значение оператора B^*B.

Л е м м а 3. *Пусть элементы $\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \ldots, \tilde{e}_k$ удовлетворяют условиям (3) и*

$$\sup_{y\in\mathcal{L}^-(\tilde{e}_1,\tilde{e}_2,\dots,\tilde{e}_k)} \|By\|^2 = s_{k+1}^2 > 0.$$

Тогда для любого натурального $n > k$ и для любой ортонормированной системы элементов $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ в $\mathcal{R}(B)$ справедлива следующая оценка:

$$\sum_{i=1}^{n} \|B^-\varphi_i\|^2 \geqslant \sum_{i=1}^{k} s_j^{-2} + \sum_{i=k+1}^{n} s_{s+1}^{-2}, \tag{4}$$

причем если $e_j \in \mathcal{L}(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)$ при всех $j = 1, 2, \ldots, k$, то в (4) имеет место равенство.

Из этих утверждений вытекает теорема, позволяющая вычислить эффективный ранг бесконечномерной модели $[A,\Sigma]$.

Т е о р е м а 1. *Если операторы A, Σ удовлетворяют условиям $(M1)$–$(M4)$, то*

$$h_*(A,\Sigma,r) = \inf_{\{e_j\}} \sum_{j=1}^{r} \left\| \left((\Sigma^{-1/2}A)^-\right)^* e_j \right\|^2 = \sum_{j=1}^{r} s_j^{-2}, \tag{5}$$

где $s_1, s_2, \ldots, s_r$ — сингулярные числа оператора $S = \Sigma^{-1/2}A$. При этом

1) если $s_1^2, s_2^2, \ldots, s_r^2$ — СЗ оператора $S^*S = A^*\Sigma^{-1}A$, то точная нижняя грань в (5) достигается на собственных векторах $e_1, e_2, \ldots, e_r$, отвечающих этим СЗ;

2) ортонормированная система, на которой достигается точная нижняя грань в (5), не существует, если и только если s_n^2 есть точка непрерывного спектра оператора S^*S при некотором $n \leqslant r$.

Перейдем к нахождению эффективного ранга модели. Зафиксируем операторы A, Σ и величину $\delta \geqslant 0$, ограничивающую погрешность интерпретации. Для определения эффективного ранга модели $[A, \Sigma]$ необходимо знать первые n сингулярных чисел оператора $\Sigma^{-1/2}A$, где n — минимальное натуральное число, при котором $h_*(n) \geqslant \delta$. (Для краткости мы опустили зависимость от A, Σ в h_*.) Положим для любого $\delta \geqslant 0$

$$\rho(\delta) = \max_{\substack{r=1,2,\ldots \\ h_*(r) \leqslant \delta}} r; \qquad h_*(0) = 0.$$

Тогда $\rho(\delta) = r$ при $\delta \in \left[h_*(r), h_*(r+1)\right)$, причем $\rho(\delta)$ принимает конечное значение при любом $\delta \in [0, \infty)$. Дальнейшее решение проблемы эффективного ранга зависит от структуры спектра оператора $A^*\Sigma^{-1}A$. Рассмотрим три взаимоисключающие возможности.

1. Пусть s_k^2 суть СЗ $A^*\Sigma^{-1}A$ при всех $k = 1, 2, \ldots, \rho(\delta)$. Тогда эффективный проектор Π_ρ проецирует на собственное подпространство, натянутое на собственные векторы оператора $A^*\Sigma^{-1}A$, отвечающие собственным значениям $s_1^2, s_2^2, \ldots, s_{\rho(\delta)}^2$, и

$$\mathbf{E}||R\xi - \Pi_\rho f||^2 = h_*(\rho(\delta)) \leqslant \delta. \qquad (6)$$

Заметим, что ортогональный проектор ранга $\rho(\delta)$, при котором выполнено равенство (6), вообще говоря, не единствен.

2. Пусть s_k^2 при некотором $k \leqslant \rho(\delta)$ есть точка непрерывного спектра $A^*\Sigma^{-1}A$, и $h\left(\rho(\delta)\right) = \delta$. Тогда ортогонального проектора ранга $\rho(\delta)$, при котором выполнено равенство (6), не существует, однако для любого $\varepsilon > 0$ найдется проектор Π_ρ^ε, удовлетворяющий условиям

$$\mathbf{E}||R\xi - \Pi_\rho^\varepsilon f||^2 \leqslant \delta + \varepsilon, \quad \operatorname{rank}\Pi_\rho^\varepsilon = \rho(\delta).$$

3. Пусть s_k^2 при некотором $k \leqslant \rho(\delta)$ есть точка непрерывного спектра $A^*\Sigma^{-1}A$ и $h\left(\rho(\delta)\right) < \delta$. Положим $\varepsilon = \delta - h\left(\rho(\delta)\right)$. Тогда, как и в предыдущем случае, проектора ранга $\rho(\delta)$, на котором достигается минимум $\mathbf{E}||R\xi - \Pi_\rho f||^2$, не существует, но найдется, причем не единственный, проектор Π_ρ^ε, удовлетворяющий условиям

$$\mathbf{E}||R\xi - \Pi_\rho^\varepsilon f||^2 \leqslant h\left(\rho(\delta)\right) + \varepsilon \leqslant \delta, \quad \operatorname{rank}\Pi_\rho^\varepsilon = \rho(\delta).$$

Функция $\rho(\cdot)$ является эффективным рангом модели $[A, \Sigma]$.

Литература

1. *Себер Дж.* Линейный регрессионный анализ. М.: Мир, 1980.
2. *Гольцман Ф. М.* Статистические модели интерпретации. М.: Наука, 1971.
3. *Пытьев Ю.П., Бондаренко С.П.* // ЖВМ и МФ. 1995. **35**, № 1. С. 6.
4. *Пытьев А.Ю., Пытьев Ю.П.* // ЖВМ и МФ. 1998. **38**, № 4. С. 682.
5. *Пытьев Ю.П.* Математические методы интерпретации эксперимента. М.: Высш. школа, 1989.
6. *Гохберг И.Ц., Крейн М.Г.* Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов. М.: Высш. школа, 1965.

Поступила в редакцию
22.12.99

УДК 539.12.01

ЭФФЕКТИВНОЕ ДЕЙСТВИЕ В $SU(2)$ КАЛИБРОВОЧНОЙ МОДЕЛИ С ВИХРЕМ

В. Ч. Жуковский

(*кафедра теоретической физики*)

В однопетлевом приближении в 4-мерном пространстве-времени рассчитан эффективный потенциал $SU(2)$ калибровочной модели при наличии вихревой структуры. Найден минимум эффективного потенциала.

Введение

Явление конфайнмента получило удовлетворительное объяснение в целом ряде моделей (см., напр., обзор [1]). В соответствии с одной из них, основанной на дуальном эффекте Мейсснера, цветовой электрический поток кварк-антикварковой пары сжимается в трубку, что ведет к возникновению линейно растущего потенциала межкваркового взаимодействия. Так называемая техника абелевого проектирования, которая развивалась, начиная с первых работ Мандельстама и Тоофта [2], предоставила удобные методы, такие, как максимальная абелева проекция, для дальнейшего исследования этой модели на решетке. Это дало численное подтверждение того, что трубки цветового электрического потока действительно формируются вследствие дуального эффекта Мейсснера, обусловленного конденсацией цветовых монополей [3] (см. также [4, 5] и цитированные там работы), — явления, дуального хорошо известному образованию струн с заключенным в них магнитным