УДК 537.611.43: 530.145

УЧЕТ СПИН-ТОКОВОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ПРИ ПОМОЩИ ГАМИЛЬТОНИАНА БРЕЙТА В ГИДРОДИНАМИЧЕСКОМ МЕТОДЕ

Д. Э. Харабадзе

(*кафедра теоретической физики*)

E-mail: lsk@phys.msu.su

Для квантовой системы частиц получены уравнения баланса импульса и плотности магнитного момента, учитывающие спин-токовое взаимодействие.

При рассмотрении коллективных процессов в распределенных системах многих взаимодействующих частиц, таких как волны [1, 2], необходимо получить уравнение в трехмерном физическом пространстве. В работе [3] были получены уравнения для систем многих частиц с кулоновским взаимодействием. При рассмотрении систем электрически нейтральных взаимодействующих частиц необходим учет спин-спинового взаимодействия, который был выполнен в работах [4, 5]. Для исследования заряженных частиц кроме кулоновского и спин-спинового взаимодействия важную роль играют спин-токовое и ток-токовое взаимодействия. Но при рассмотрении медленно движущихся частиц ток-токовое взаимодействие имеет более высокий порядок малости по сравнению со спин-токовым взаимодействием. Это дает основание упростить гамильтониан Брейта, исключив слагаемое, отвечающее взаимодействию тока с током.

Запишем уравнение Шрёдингера

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = \hat{H}\psi. \tag{1}$$

При эрмитовом сопряжении оно переходит в уравнение

$$-i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi^+ = \psi^+\hat{H}^+, \tag{2}$$

где введено следующее сокращение: крест над оператором дифференцирования по координате означает, что дифференцирование будет действовать не на часть выражения, стоящую справа от оператора, а на часть выражения, стоящую слева. Крест над матрицей означает просто сопряжение. Крест над комплексным числом означает комплексное сопряжение. Кроме того, обозначение удовлетворяет следующим свойствам:

$$(\hat{A}\hat{B})^+ = \hat{B}^+\hat{A}^+, \quad (\hat{A}+\hat{B})^+ = \hat{A}^+ + \hat{B}^+. \tag{3}$$

Это обозначение согласуется с определением эрмитова сопряжения оператора, принятым в квантовой механике [6].

Рассмотрим временную эволюцию величины, имеющей следующий вид:

$$f = \psi^+\hat{f}\psi, \tag{4}$$

где $\hat{f}$ — произвольный оператор. Найдем производную по времени от этой величины:

$$\frac{\partial}{\partial t}f = \psi^+\frac{\partial\hat{f}}{\partial t}\psi + \frac{i}{\hbar}\psi^+\left(\hat{H}^+\hat{f} - \hat{f}\hat{H}\right)\psi. \tag{5}$$

Выделяя коммутатор и антикоммутатор, получим

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}f = \psi^+\frac{\partial\hat{f}}{\partial t}\psi + \frac{i}{\hbar}\psi^+\Bigg(\frac{1}{2}\left[\left(\hat{H}^+ - \hat{H}\right), \hat{f}\right]_+ &+ \\ +\frac{1}{2}\left[\left(\hat{H}^+ + \hat{H}\right), \hat{f}\right]\Bigg)\psi&,\end{aligned} \tag{6}$$

где квадратными скобками с плюсом внизу $[,]_+$ обозначен антикоммутатор. Для дальнейшего рассмотрения удобно ввести операторы

$$\hat{A} = \hat{\partial}^+ + \hat{\partial}, \quad \hat{E} = \frac{1}{2}\left(\hat{H}^+ + \hat{H}\right). \tag{7}$$

Оператор $\hat{A}$ коммутирует с оператором координаты и импульса и представляет собой оператор «градиента». В дальнейшем будем рассматривать только такие гамильтонианы, которые удовлетворяют равенству

$$(\hat{H}^+ - \hat{H}) = i\hbar\sum_{i=0}^{N}\hat{A}_i\hat{J}_i \tag{8}$$

для какого-либо набора операторов $\hat{J}_i$.

В этом случае (6) преобразуется к виду

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}f = \psi^+\frac{\partial\hat{f}}{\partial t}\psi - \sum_{i=1}^{N}\nabla_i\left(\psi^+\frac{1}{2}\left[\hat{J}_i, \hat{f}\right]_+\psi\right) &+ \\ +\frac{i}{\hbar}\psi^+\left[\hat{E}, \hat{f}\right]\psi&.\end{aligned} \tag{9}$$

Из этой формулы видно, что полная производная по времени от какой-либо величины состоит из частной производной по времени, потока величины и взаимодействия. В частном случае, когда в качестве оператора $\hat{f}$ выбран единичный оператор, уравнение (9) представляет собой уравнение непрерывности в конфигурационном пространстве. После проекции этого уравнения на трехмерное пространство получается обычное уравнение непрерывности

$$\frac{\partial}{\partial t}n(x) + \nabla\mathbf{J}(x) = 0. \tag{10}$$

Рассмотрим гамильтониан вида

$$\hat{H} = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} a_{ij}\hat{p}_i\hat{p}_j + \sum_{i=1}^{N} b_i\hat{p}_i + c, \tag{11}$$

где a_{ij} и b_i являются действительными, коммутируют с $\hat{p}_i$ и, кроме того, $a_{ij} = a_{ji}$. В частности, гамильтониан Брейта имеет такой вид с точностью до релятивистских поправок, которые являются малыми по сравнению с остальными членами при рассмотрении систем многих частиц.

Воспользуемся общим методом квантовой гидродинамики для получения выражения для тока. Очевидно, что

$$\hat{H}^+ - \hat{H} = i\hbar\sum_{i=1}^{N}\hat{A}_i\hat{J}_i, \tag{12}$$

где оператор тока $\hat{J}$ может быть выбран в виде

$$\hat{J}_i = a_{ij}(\hat{p}_j + \hat{p}_j^+) + b_i. \tag{13}$$

Вычислим оператор $\hat{E}$:

$$\hat{E} = \sum_{i=0}^{N}\hat{J}_i\left(\hat{p}_i^+ + \hat{p}_i\right) - \sum_{i=0}^{N} a_{ij}\hat{p}_i^+\hat{p}_j + c. \tag{14}$$

Видно, что полученные операторы при эрмитовом сопряжении не изменяются.

Для учета спин-токового взаимодействия рассмотрим часть гамильтониана Брейта [7], отвечающую кинетической энергии, энергии взаимодействия спина со спином и током:

$$\hat{H} = \sum_{i=1}^{N}\hat{T}(\hat{p}_i) + \sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N}\frac{1}{2}U(\hat{p}_i, \hat{p}_j, x_i - x_j), \tag{15}$$

где

$$\hat{T}(\hat{p}_i) = \left(\frac{\hat{p}_i^2}{2m} - \frac{\hat{p}_i^4}{8m^3c^2}\right) \tag{16}$$

и

$$\begin{gathered} U(\hat{p}_i, \hat{p}_j, \mathbf{r}) = \frac{e}{r} - \pi\left(\frac{e\hbar}{mc}\right)^2\delta(\mathbf{r}) - \\ - \frac{e^2\hbar}{2m^2c^2r^3}(\sigma_i + 2\sigma_j)[\mathbf{r}\times\hat{p}_i] + \frac{1}{4}\left(\frac{e\hbar}{mc}\right)^2\times \\ \times\left(\frac{\sigma_i\sigma_j}{r^3} - \frac{3(\sigma_i\mathbf{r})(\sigma_j\mathbf{r})}{r^5} - \frac{8\pi}{3}\sigma_i\sigma_j\delta(\mathbf{r})\right). \end{gathered} \tag{17}$$

Для проверки условия применимости (8) вычислим $\frac{i}{\hbar}(\hat{T}^+ - \hat{T})$:

$$\begin{gathered} \frac{i}{\hbar}\left(\hat{T}^+(\hat{p}_i) - \hat{T}(\hat{p}_i)\right) = \\ = \hat{A}\left(\frac{\hat{p}_i^+ + \hat{p}_i}{2m} + \frac{(\hat{p}_i^+)^3 + (\hat{p}_i^+)^2\hat{p}_i + \hat{p}_i^+\hat{p}_i^2 + \hat{p}_i^3}{8m^3c^2}\right) \end{gathered} \tag{18}$$

и $\frac{i}{\hbar}(\hat{U}^+ - \hat{U})$:

$$\begin{gathered} \frac{i}{\hbar}\left(\hat{U}^+(\hat{\mathbf{p}}_i, \hat{\mathbf{p}}_j, \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) - \hat{U}(\hat{\mathbf{p}}_i, \hat{\mathbf{p}}_j, \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)\right) = \\ = \hat{A}^\alpha\left(\frac{e^2\hbar}{2m^2c^2}\epsilon^{\alpha\beta\gamma}\left(\sigma_i^\beta + 2\sigma_j^\beta\right)\frac{r^\gamma}{r^3}\right). \end{gathered} \tag{19}$$

Таким образом, получаем

$$\begin{gathered} \frac{i}{\hbar}\left(\hat{H}^+(\hat{\mathbf{p}}_i, \hat{\mathbf{p}}_j, \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) - \hat{H}(\hat{\mathbf{p}}_i, \hat{\mathbf{p}}_j, \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)\right) = \\ = \hat{A}\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\hat{p}_i^+ + \hat{p}_i}{2m} + \frac{(\hat{p}_i^+)^3 + (\hat{p}_i^+)^2\hat{p}_i + \hat{p}_i^+\hat{p}_i^2 + \hat{p}_i^3}{8m^3c^2}\right) + \\ + \hat{A}\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N}\frac{1}{2}\left(\frac{e^2\hbar}{2m^2c^2}\epsilon^{\alpha\beta\gamma}(\sigma_i^\beta + 2\sigma_j^\beta)\frac{r^\gamma}{r^3}\right), \end{gathered} \tag{20}$$

что соответствует условию (8) и позволяет использовать приведенный метод. При рассмотрении систем многих частиц при нормальных температурах релятивистские поправки, имеющие порядок $\frac{1}{c^2}$, обычно являются малыми по сравнению с остальными членами гамильтониана. Этому в первую очередь способствует линейная зависимость релятивистских поправок от числа частиц. Поэтому, пренебрегая релятивистскими поправками, гамильтониан Брейта можно считать частным случаем квадратичного гамильтониана.

Для упрощения выкладок сделаем ряд приближений. Пренебрежем релятивистскими поправками, что может быть сделано при нормальных температурах. Так как целью работы является получение поправок, отвечающих спин-токовому взаимодействию, в равенстве (11) можно считать матрицу a_{ij} диагональной, что соответствует пренебрежению ток-токовым взаимодействием частиц. Кроме того, заменим $\hat{\sigma}$ в части, отвечающей за спин-токовое взаимодействие на $2\hat{\sigma}$, что отвечает симметричному случаю. В этом случае

$$\hat{E} = \frac{1}{4m}\sum_{i=1}^{N}\left(\hat{\mathbf{p}}_i\hat{\mathbf{p}}_i + \hat{\mathbf{p}}_i^+\hat{\mathbf{p}}_i^+\right) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} b_i\left(\hat{\mathbf{p}}_i + \hat{\mathbf{p}}_i^+\right) + c, \tag{21}$$

$$\hat{\mathbf{J}}_i = \frac{1}{2m}\left(\hat{\mathbf{p}}_i + \hat{\mathbf{p}}_i\right) + \mathbf{b}_i, \tag{22}$$

где

$$b_i^\alpha = -\frac{e^2\hbar}{4m^2c^2}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N}\frac{x_i^\beta - x_j^\beta}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|^3}\epsilon^{\alpha\beta\gamma}\left(2\hat{\sigma}_i^\gamma + 2\sigma_j^\gamma\right), \tag{23}$$

$$\begin{gathered} c = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N}\Bigg(\frac{e^2}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|} - \frac{\pi e^2\hbar^2}{m^2c^2}\delta(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) + \\ + \frac{e^2\hbar^2}{4m^2c^2}\hat{\sigma}_i^\alpha\hat{\sigma}_j^\beta\times \\ \times\left(-\frac{\partial}{\partial x_i^\alpha}\frac{\partial}{\partial x_j^\beta}\frac{1}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|} - 4\pi\delta^{\alpha\beta}\delta(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)\right)\Bigg). \end{gathered} \tag{24}$$

Коммутируем с оператором тока, получаем

$$\left[\hat{E},\hat{J}_i\right]=\frac{1}{4m}\sum_{j=1}^{N}\left[\left(\hat{p}_j\hat{p}_j+\hat{p}_j^{+}\hat{p}_j^{+}\right),b_i\right]+ \\ +\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}b_j[\hat{p}_j+\hat{p}_j^{+},b_i]+ \\ +\frac{1}{4m}\sum_{j=1}^{N}[b_j,\hat{p}_i+\hat{p}_i^{+}]\left(\hat{p}_j+\hat{p}_j^{+}\right)+\frac{1}{2}[c,\hat{p}_i+\hat{p}_i^{+}]. \quad (25)$$

В этом случае вычисление коммутатора оператора энергии с оператором тока сводится к следующему выражению:

$$\frac{i}{\hbar}\left[\hat{E},\hat{J}_i\right]=\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{2}\left[\frac{\partial b_i^{\alpha}}{\partial x_j^{\beta}}-\frac{\partial b_j^{\beta}}{\partial x_i^{\alpha}},\hat{J}_j^{\beta}\right]_{+}-\frac{1}{m}\frac{\partial c}{\partial x_i^{\alpha}}. \quad (26)$$

Последний член этого выражения представляет собой выражение для кулоновского и спин-спинового взаимодействия и был вычислен в работах [4, 5]. Первый член представляет собой выражение для спин-токового взаимодействия, вычисление которого и представляет интерес:

$$\frac{\partial b_i^{\alpha}}{\partial x_j^{\beta}}-\frac{\partial b_j^{\beta}}{\partial x_i^{\alpha}}=\frac{e^2\hbar}{4m^2c^2}\times \\ \times\left[\sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{N}\frac{\partial}{\partial x_j^{\beta}}\frac{\partial}{\partial x_i^{\mu}}\frac{1}{|\mathbf{x}_i-\mathbf{x}_k|}\epsilon^{\alpha\mu\nu}\left(2\hat{\sigma}_i^{\nu}+2\hat{\sigma}_k^{\nu}\right)-\right. \\ \left.-\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{N}\frac{\partial}{\partial x_i^{\alpha}}\frac{\partial}{\partial x_j^{\mu}}\frac{1}{|\mathbf{x}_j-\mathbf{x}_k|}\epsilon^{\beta\mu\nu}(2\hat{\sigma}_j^{\nu}+2\hat{\sigma}_k^{\nu})\right]. \quad (27)$$

Полученное выражение вычислим в двух случаях: $i=j$ и $i\neq j$. В случае, когда $i=j$, выражение преобразуется к виду

$$\frac{\partial b_i^{\alpha}}{\partial x_i^{\beta}}-\frac{\partial b_i^{\beta}}{\partial x_i^{\alpha}}=\frac{e^2\hbar}{4m^2c^2}\sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{N}(2\hat{\sigma}_i^{\nu}+2\hat{\sigma}_k^{\nu})\times \\ \times\frac{\partial}{\partial x_i^{\mu}}\left(\epsilon^{\alpha\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x_i^{\beta}}-\epsilon^{\beta\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x_i^{\alpha}}\right)\frac{1}{|\mathbf{x}_i-\mathbf{x}_k|}. \quad (28)$$

Используя соотношение

$$\epsilon^{\alpha\mu\nu}\nabla^{\beta}-\epsilon^{\beta\mu\nu}\nabla^{\alpha}=\epsilon^{\alpha\beta\nu}\nabla^{\mu}-\epsilon^{\alpha\beta\mu}\nabla^{\nu}, \quad (29)$$

получим

$$\frac{\partial b_i^{\alpha}}{\partial x_i^{\beta}}-\frac{\partial b_i^{\beta}}{\partial x_i^{\alpha}}=\frac{e^2\hbar}{4m^2c^2}\sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{N}\left(4\pi\delta^{\mu\nu}\delta(\mathbf{x}_i-\mathbf{x}_k)-\right. \\ \left.-\frac{\partial}{\partial x_i^{\mu}}\frac{\partial}{\partial x_i^{\nu}}\frac{1}{|\mathbf{x}_i-\mathbf{x}_k|}\right)\epsilon^{\alpha\beta\mu}\left(2\hat{\sigma}_i^{\nu}+2\hat{\sigma}_k^{\nu}\right). \quad (30)$$

Для случая $i\neq j$ аналогично получаем

$$\frac{\partial b_i^{\alpha}}{\partial x_j^{\beta}}-\frac{\partial b_j^{\beta}}{\partial x_i^{\alpha}}=\frac{e^2\hbar}{4m^2c^2}\epsilon^{\alpha\beta\mu}\left(-4\pi\delta^{\mu\nu}\delta(\mathbf{x}_i-\mathbf{x}_j)+\right. \\ \left.+\frac{\partial}{\partial x_i^{\mu}}\frac{\partial}{\partial x_i^{\nu}}\frac{1}{|\mathbf{x}_i-\mathbf{x}_j|}\right)\left(2\hat{\sigma}_j^{\nu}+2\hat{\sigma}_i^{\nu}\right). \quad (31)$$

Подставим (30), (31) в (27):

$$\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{2}\left[\frac{\partial b_i^{\alpha}}{\partial x_j^{\beta}}-\frac{\partial b_j^{\beta}}{\partial x_i^{\alpha}},\hat{J}_j^{\beta}\right]_{+}= \\ =\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{N}\frac{1}{2}\left[\frac{e^2\hbar}{4m^2c^2}\epsilon^{\alpha\beta\mu}\left(4\pi\delta^{\mu\nu}\delta(\mathbf{x}_i-\mathbf{x}_j)-\right.\right. \\ \left.\left.-\frac{\partial}{\partial x_i^{\mu}}\frac{\partial}{\partial x_i^{\nu}}\frac{1}{|\mathbf{x}_i-\mathbf{x}_j|}\right)\left(2\hat{\sigma}_j^{\nu}+2\hat{\sigma}_i^{\nu}\right),\hat{J}_i^{\beta}-\hat{J}_j^{\beta}\right]_{+}. \quad (32)$$

Также необходимо вычислить коммутатор с оператором магнитного момента

$$\hat{M}^{\alpha}=\frac{e\hbar}{2mc}\hat{\sigma}^{\alpha}. \quad (33)$$

При коммутировании с оператором энергии получим

$$\left[\hat{E},\hat{M}_i^{\mu}\right]=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}\left[b_j^{\alpha},\hat{M}_i^{\mu}\right]\left(\hat{p}_j^{\alpha}+(\hat{p}_j^{\alpha})^{+}\right)+\left[c,\hat{M}_i^{\mu}\right]. \quad (34)$$

Последнее слагаемое отражает спин-спиновое взаимодействие и было вычислено в работах [4, 5]. Поэтому в настоящей работе мы ограничимся вычислением первого слагаемого

$$\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}\left[b_j^{\alpha},\hat{M}_i^{\mu}\right]\left(\hat{p}_j^{\alpha}+(\hat{p}_j^{\alpha})^{+}\right)= \\ =\frac{e}{mc}\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{N}\frac{e}{c}\frac{x_i^{\beta}-x_j^{\beta}}{|\mathbf{x}_i-\mathbf{x}_j|^3}\epsilon^{\alpha\beta\gamma}\epsilon^{\gamma\mu\nu}\frac{1}{2}\left[\hat{M}_i^{\nu}\hat{J}_i^{\alpha}\right]_{+}+ \\ +\frac{e}{mc}\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{N}\frac{1}{c}\frac{x_j^{\beta}-x_i^{\beta}}{|\mathbf{x}_j-\mathbf{x}_i|^3}\epsilon^{\alpha\beta\gamma}\epsilon^{\gamma\mu\nu}\frac{e}{2}\left[\hat{M}_i^{\nu}\hat{J}_j^{\alpha}\right]_{+}. \quad (35)$$

Для получения уравнений в трехмерном пространстве необходимо проинтегрировать полученные уравнения, записанные для функций в трехмерном конфигурационном пространстве по всем координатам, кроме трех координат исследуемой частицы. Выбор частицы не имеет существенной роли в силу принципа симметрии волновой функции для тождественных частиц. Такая операция проектирования эквивалентна интегрированию уравнения, предварительно умноженного на δ-функцию по всем $3N$ координатам.

Интегрируя полученные выражения (32), (35) с δ-функцией и пренебрегая корреляциями, приходим к уравнениям

$$\left(\frac{d\mathbf{M}(\mathbf{x})}{dt}\right)_{MJ} = \frac{e}{mc}\left[\mathbf{M}(\mathbf{x}) \times \mathbf{B}^J(\mathbf{x})\right] - \\ - \frac{e}{mc}\left[\mathbf{M}(\mathbf{x}) \times \left[\frac{\mathbf{v}(\mathbf{x})}{c} \times \mathbf{E}(\mathbf{x})\right]\right], \tag{36}$$

$$\left(\frac{d\mathbf{J}(\mathbf{x})}{dt}\right)_{MJ} = \frac{e}{mc}[\mathbf{J}(\mathbf{x}) \times \mathbf{B}^S(\mathbf{x})] + \frac{e}{m}n\mathbf{E}^S(\mathbf{x}) + \\ + \frac{1}{m}(\mathbf{M}(\mathbf{x})\nabla)\mathbf{B}^J(\mathbf{x}) - \frac{1}{m}\left[\frac{\mathbf{v}(\mathbf{x})}{c} \times (\mathbf{M}(\mathbf{x})\nabla)\mathbf{E}(\mathbf{x})\right], \tag{37}$$

где

$$[\nabla \times \mathbf{B}^J(\mathbf{x})] = \frac{4\pi}{c}e\mathbf{J}(\mathbf{x}), \tag{38}$$

$$[\nabla \times (\mathbf{B}^S(\mathbf{x}) + 4\pi\mathbf{M}(\mathbf{x}))] = 0, \tag{39}$$

$$(\nabla\mathbf{E}(\mathbf{x})) = 4\pi en(\mathbf{x}), \tag{40}$$

$$[\nabla \times \mathbf{E}^S(\mathbf{x})] = -\frac{1}{c}\left(\frac{\partial\mathbf{B}^S(\mathbf{x})}{\partial t}\right)_J. \tag{41}$$

В уравнении (41) ротор электрического поля, создаваемого движущимися магнитными моментами, зависит от изменения спинового магнитного поля, обусловленного переносом магнитных моментов.

Таким образом, были получены уравнения баланса импульса и плотности магнитного момента, учитывающие взаимодействие тока с собственным магнитным моментом частиц.

Автор выражает благодарность Л. С. Кузьменкову и С. Г. Максимову за постановку задачи и полезные обсуждения в процессе решения.

Литература

1. *Кузьменков Л.С., Харабадзе Д.Э.* // Изв. вузов. Физика. 2004. № 4. С. 87.
2. *Кузьменков Л.С., Максимов С.Г., Харабадзе Д.Э.* // Тез. докл. XII Международной конференции по спиновой электронике и гировекторной электродинамике. 14–16 ноября 2003 г., г. Москва (Фирсановка). С. 333.
3. *Кузьменков Л.С., Максимов С.Г.* // ТМФ. 1999. **118**, № 2. С. 287.
4. *Кузьменков Л.С., Максимов С.Г., Федосеев В.В.* // ТМФ. 2001. **126**, № 1. С. 136.
5. *Кузьменков Л.С., Максимов С.Г., Федосеев В.В.* // ТМФ. 2001. **126**, № 2. С. 258.
6. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Квантовая механика (нерелятивистская теория). М., 1989.
7. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Квантовая электродинамика. М., 1989.

Поступила в редакцию
11.11.05