

На правах рукописи

Воронина Юлия Сергеевна

**РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ И ПЕРЕНОРМИРОВКА
ДАВЛЕНИЯ КАЗИМИРА**

Специальность

01.04.02 Теоретическая физика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва – 2013

Работа выполнена на кафедре квантовой теории и физики высоких энергий физического факультета Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова.

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,
профессор Силаев Петр Константинович

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,
профессор кафедры математики
физического факультета МГУ
Боголюбов Александр Николаевич

кандидат физико-математических наук,
старший научный сотрудник
Лаборатории теоретической физики
Объединенного института ядерных
исследований (г. Дубна)
Пироженко Ирина Георгиевна

Ведущая организация: Государственный научный центр
Российской Федерации Институт физики
высоких энергий (г. Протвино)

Защита диссертации состоится 5 декабря 2013 г. в 15 час. 30 мин. на заседании диссертационного совета Д 501.002.10 при Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова по адресу: 119991, г. Москва, Ленинские горы, МГУ, дом 1, стр. 2, физический факультет, СФА.

С диссертацией можно ознакомиться в фундаментальной библиотеке МГУ имени М.В. Ломоносова.

Автореферат разослан «__» _____ 2013 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 501.002.10
доктор физико-математических наук
профессор

Поляков П.А.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Эффект притяжения двух бесконечных плоскопараллельных идеально проводящих пластин в вакууме был предсказан Х. Казимиром еще в 1948 году. Этот эффект получил объяснение в рамках концепции квантового вакуума: определение квантовой системы в ограниченных областях или в топологически нетривиальных пространствах приводит к искажению спектра вакуумных колебаний. Впоследствии явления подобного типа были рассмотрены для разнообразных геометрий и топологий в случае полей с различными спинами. Оказалось, что эффект Казимира находит приложения во многих областях физики от гравитации и космологии до физики элементарных частиц.

Главным образом силы Казимира проявляются на расстояниях порядка нескольких десятков нанометров между объектами и, следовательно, играют очень важную роль при изготовлении и эксплуатации различных микро- и наносистем. Многочисленные теоретические и экспериментальные исследования казимировского взаимодействия между телами с различной геометрией и структурой показали, что в основном эти силы носят характер притяжения. Кроме того, дополнительное притяжение обеспечивают силы межмолекулярного взаимодействия. В результате возможны различные нарушения в функционировании наносистем, вызванные «слипанием» подвижных компонентов или затруднением их движения вследствие статического трения. Однако, как оказалось, силы Казимира существенно зависят от геометрической формы взаимодействующих тел, а также структуры материала, из которого они изготовлены. Как показали расчеты, в некоторых случаях соответствующие модификации могут приводить не только к ослаблению силы Казимира, но и к изменению ее характера с притяжения на отталкивание. Впоследствии этот теоретический факт получил экспериментальное подтверждение. Таким образом, можно надеяться изготовить системы со специальной конфигурацией, необходимой для достижения равновесия между притягивающими и отталкивающими вкладками в результирующую силу. Эти обстоятельства повышают интерес к теоретическому изучению задач казимировского типа.

При исследовании эффекта Казимира возникает ряд проблем до сих пор не получивших удовлетворительного решения. Первый тип проблем связан с перенормировкой физических величин для уединенных тел, имеющих границу с ненулевой кривизной. Как известно, основным источником расходимостей после устранения вклада пространства Минковского являются поверхностные особенности, которые в общем случае являются неинтегрируемыми. Существующие подходы к устранению этих расходимостей достаточно ограничены.

Второй тип проблем связан с непосредственным вычислением конкретных данных, что представляет собой отдельную математическую проблему, разрешить которую точно удастся только для весьма узкого класса систем. В остальных случаях приходится применять различные приближенные методы. К настоящему моменту разработано несколько схем. С одной стороны среди них можно выделить подходы, которые, как правило, довольно просты в технической реализации, однако имеют низкую точность. С другой стороны существуют методы, позволяющие добиться значительной точности, но при этом требующие существенных затрат вычислительных ресурсов. Например, в случае метода граничных элементов, широко применяемого в задачах казимировской тематики, для достижения высокой точности приходится использовать достаточно мелкие элементы, что приводит к необходимости составлять и решать систему линейных уравнений значительных размеров.

Цели и задачи диссертационной работы.

Цели диссертации:

1. Разработка схемы перенормировки граничного давления Казимира, позволяющей установить зависимость давления от параметров области определения поля.
2. Развитие новых методов вычисления функции Грина и ее производных, необходимых для вычисления давления Казимира.

В работе решались следующие задачи:

1. Вычисление перенормированного давления Казимира для скалярного поля на отрезке, в том числе и при наличии внешнего потенциала, в случае наложенных граничных условий общего типа. Обоснование выбранного способа перенормировки в отсутствие внешнего поля.
2. Разработка метода построения поверхностной функции Грина в виде ряда Борновского типа. Исследование вопроса сходимости этого ряда.
3. Разработка схемы приближенного вычисления функции Грина и ее производных на основе метода граничных элементов, позволяющей повысить вычислительную эффективность этого подхода.
4. Применение этих методов для поиска перенормированного давления Казимира в случае некоторых частных двумерных задач для скалярного поля.
5. Рассмотрение электромагнитного эффекта Казимира на примере задачи о речной передаче. Вычисление нормальной и тангенциальной составляющей силы казимировского взаимодействия в рамках задачи. Исследование зависимости этих сил от формы рек.

Научная новизна работы. В настоящей работе предложена схема перенормировки давления с помощью модифицированных областей, позволяющая получить зависимость этой величины от параметров основной области, причем эта зависимость в принципе может быть проверена экспериментально. Для ряда задач при определенном выборе вспомогательной области перенормированное давление можно отождествить с физическим. Показано, что асимптотика перенормированного таким образом давления находится в полном соответствии с естественным физическим требованием экспоненциального убывания при неограниченном увеличении массы поля. Также разработаны два новых метода вычисления функции Грина и ее производных.

Практическая значимость работы. Предложенные схемы приближенного вычисления функции Грина и ее производных для задач казимировского типа

могут использоваться и для полей с различными спинами, в том числе и для систем, определенных в областях сложной формы с различными граничными условиями. Рассмотренная в диссертации речная передача может представлять интерес в связи с разработкой различных микромеханических устройств.

Публикации. Результаты диссертации опубликованы в 4 статьях в реферируемых журналах, а также в 3 тезисах докладов на международных конференциях.

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались на международных конференциях студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов 2009» (МГУ, Москва, 2009) и «Ломоносов 2010» (МГУ, Москва, 2010), на «Ломоносовской конференции по физике элементарных частиц» (МГУ, Москва, 2009), а также на семинаре ОТФВЭ НИИЯФ МГУ в 2012 г.

Личный вклад автора. Все результаты, представленные в диссертационной работе, получены автором самостоятельно. Также автор принимала непосредственное участие и в постановке задач.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения, списка литературы (216 наименований), 3 таблиц и 27 рисунков. Изложена на 177 страницах.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении произведен краткий обзор научных статей по теме диссертации. Сформулирована цель работы и обсуждается актуальность рассматриваемых задач.

В первой главе исследуется регуляризация и перенормировка граничного давления Казимира для скалярного поля на интервале $[a, b]$. Вычисление давления в точке a производится с помощью функции Грина соответствующей

краевой задачи

$$G''(x, y) - (\kappa^2 + V^{ext}(x)) G(x, y) = \delta(x - y), \quad (1)$$

$$\cos \alpha g(a) + \sin \alpha g'(a) = 0,$$

$$\cos \beta g(b) + \sin \beta g'(b) = 0,$$

а регуляризация осуществляется раздвижением аргументов этой функции (далее всюду используется «естественная» система единиц $\hbar = c = 1$)

$$p_\epsilon(a) = -\frac{1}{2\pi} \int_m^\infty \frac{\kappa d\kappa}{\sqrt{\kappa^2 - m^2}} (\partial_x \partial_y - \kappa^2 - V^{ext}) G(x, y) \Big|_{x=y-\epsilon=a}.$$

При отсутствии в задаче внешнего поля V^{ext} в качестве точки нормировки можно принять давление на левой границе $x = a$ при условии, что вторая стенка удалена на бесконечность

$$p^{ren}(a; b) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lim_{b' \rightarrow \infty} (p_\epsilon(a; b) - p_\epsilon(a; b')). \quad (2)$$

Выбор условия нормировки в виде (2) можно обосновать тем, что уединенная стенка не должна испытывать давления со стороны квантового поля, поскольку такая система инвариантна относительно сдвига этой стенки. Для граничных условий общего типа перенормированное с помощью (2) давление в случае $V^{ext} = 0$ будет определяться выражением

$$p^{ren}(a; b) = -\frac{1}{2\pi} \int_m^\infty \frac{\kappa^2 d\kappa}{\sqrt{\kappa^2 - m^2}} \left[\frac{2h(\beta)e^{-\kappa(b-a)}}{h(\alpha)e^{\kappa(b-a)} - h(\beta)e^{-\kappa(b-a)}} \right],$$

где

$$h(\theta) = \frac{\cos \theta - \kappa \sin \theta}{\cos \theta + \kappa \sin \theta}.$$

При наличии внешнего поля для уединенной стенки упомянутой выше трансляционной инвариантности, вообще говоря, уже нет, так что вопрос об окончательной перенормировке остается открытым. Тем не менее способ (2) позволяет получить зависимость давления на левой границе от расположения правой. Но такой результат также представляет интерес, поскольку в реальных экспериментах измеряется именно зависимость той или иной физической величины от параметров области определения поля.

Также внешний потенциал усложняет задачу для функции Грина (1). Если поиск точного ее решения оказывается затруднительным, можно применять различные приближенные методы. В главе 1 исследовалась возможность построения функции Грина для одномерного случая с помощью Борновского ряда.

Вторая глава посвящена исследованию перенормировки давления Казимира на границе области при использовании вспомогательных областей. Перенормировка рассматривается на примере скалярного поля, определенного в двумерной области D с гладкой границей Γ , на которой наложены однородные граничные условия Дирихле. Давление в граничной точке ξ в многомерном случае выражается через соответствующую функцию Грина следующим образом

$$p(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_m^\infty \frac{\kappa d\kappa}{\sqrt{\kappa^2 - m^2}} [-2(\mathbf{n} \cdot \nabla_x)(\mathbf{n} \cdot \nabla_y) + (\nabla_x \cdot \nabla_y) + \kappa^2] G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{y}=\xi}, \quad (3)$$

где \mathbf{n} – внешняя нормаль к поверхности Γ в точке ξ . При решении многомерных задач возникают дополнительные трудности. Во-первых, в отличие от одномерных систем, функция Грина и ее производные сингулярны. А во-вторых, для многомерных систем возникает проблема поверхностных расходимостей, связанных с ненулевой кривизной границ. В результате задача регуляризации и перенормировки сводится не только к выделению расходящейся части в соответствующем интеграле по κ , как в одномерном случае, но и к разделению функции Грина и ее производных на регулярные и сингулярные части. Такое разбиение, разумеется, не является однозначным, и неопределенность снимается после выбора конкретного способа перенормировки.

В главе 2 произведено обобщение одномерного способа перенормировки с помощью бесконечно протяженной системы на случай многомерных задач. В качестве точки нормировки для давления $p_D(\xi)$ в точке ξ на границе основной области D предлагается выбрать давление $p_{D'}(\xi)$ на границе вспомогательной области D' , причем радиусы кривизны границ областей D и D' в точке ξ должны совпадать. Последнее требование позволяет устранить поверхностную расходимость, в результате чего разность $p_D(\xi) - p_{D'}(\xi)$ оказывается

конечной.

В общем случае такая перенормировочная схема определяет давление, совпадающее с физическим только с точностью до конечного выражения, зависящего от параметров вспомогательной системы. Использование различных вспомогательных областей приведет, вообще говоря, к отличающимся значениям конечного давления. Тем не менее такой способ перенормировки позволяет получить зависимость физического давления от геометрических характеристик основной области, причем в некоторых случаях конкретный выбор вспомогательной области отвечает определенной экспериментальной схеме.

Вспомогательную систему предпочтительнее выбирать таким образом, чтобы область ее определения неограниченно увеличивалась по всем пространственным направлениям, поскольку в противном случае, остается ненулевая плотность энергии, связанная с конечным расстоянием между границами этой вспомогательной системы.

Далее предложенная схема применяется при вычислении значений перенормированного давления для семейства областей, полученных из круга радиуса $r = 1$ и содержащих его в качестве предельного случая. Первое семейство представляет собой области D_L^1 , далее называемые «овалами», полученные при раздвижении двух полукругов на расстояние L . Перенормировка при этом производится при использовании «овала» D_∞^1 с бесконечной стороной $L \rightarrow \infty$. Второе семейство областей D_L^2 , называемых «квадратами», получается после раздвижения всех четвертей круга на расстояние L от центра, а вспомогательная область для этого случая соответствует бесконечному «квадрату» D_∞^2 . В силу наложенных граничных условия Дирихле, давление (3) выражается через поверхностную функцию Грина $S(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{n}, \nabla_{\mathbf{y}} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}))|_{\mathbf{y} \in \Gamma}$. Решение для нее было построено в виде разложения по собственным функциям оператора Лапласа для соответствующих областей, образующих «овал». Такое разложение позволяет вычислять значения искомой функции с наперед задаваемой точностью. С помощью найденной поверхностной функции Грина было вычислено перенормированное давление для «овала». С истинным физическим давлением полученный результат совпадает только с точностью до конечного выражения, зависящего от радиуса круга r , что является следстви-

ем конечности расстояния между параллельными стенками вспомогательного «овала» D_∞^1 . Однако разность перенормированных давлений для различных значений L является наблюдаемой величиной.

Предлагаемая процедура перенормировки может быть применена и к более реалистичным трехмерным системам, в том числе и в случае полей с ненулевыми спинами. В частности такая схема может позволить решить проблему диэлектрического шара, и при этом в отличие от традиционных подходов без наложения специальных условий на электрические и магнитные проницаемости шара и внешней среды. Получаемые в результате такой процедуры данные представляют собой лишь зависимость давления от геометрических параметров основной системы, но именно подобная зависимость и исследуется в реальных экспериментах.

В третьей главе предлагается способ построения функции Грина и ее производных с помощью ряда борновского типа. Решение для функции $u(\mathbf{x})$, заданной на границе Γ и удовлетворяющей однородному уравнению Гельмгольца внутри области определения, можно записать с помощью соответствующей поверхностной функции Грина $S(\mathbf{x}, \mathbf{z})$

$$u(\mathbf{x}) = \oint_{\Gamma} S(\mathbf{x}, \mathbf{z})u(\mathbf{z})dl_z. \quad (4)$$

В рамках предлагаемого метода поверхностная функция Грина представляется в виде суммы регулярной и сингулярной частей, которые во внутренних точках области определения являются решениями однородного уравнения Гельмгольца, а на границе удовлетворяют условию

$$S^{(r)}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = \delta_{\Gamma}(\mathbf{x} - \mathbf{z}) - S^{(s)}(\mathbf{x}, \mathbf{z}), \quad \mathbf{x} \in \Gamma, \quad (5)$$

где δ_{Γ} – δ -функция, сосредоточенная на поверхности Γ , т.е. $\oint_{\Gamma} \delta_{\Gamma}(\mathbf{x} - \mathbf{z})f(\mathbf{z})dl_z = f(\mathbf{x})$ для произвольной функции $f(\mathbf{x})$. Выделение сингулярной части содержит определенный произвол. При этом после конкретного выбора этой функции значения регулярной части на границе области оказываются заданными соотношением (5).

С помощью формулы Грина (4) для регулярной части $S^{(r)}$ можно записать интегральное уравнение, решение которого методом последовательных

приближений, позволяет получить представление этой функции в виде ряда борновского типа

$$S^{(r)}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = \sum_{m=1}^{\infty} C_m, \quad (6)$$

где

$$C_m = \underbrace{\oint_{\Gamma} \dots \oint_{\Gamma}}_m S^{(s)}(\mathbf{x}, \mathbf{z}_1) S^{(r)}(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2) \dots S^{(r)}(\mathbf{z}_{m-1}, \mathbf{z}_m) S^{(r)}(\mathbf{z}_m, \mathbf{z}) dl_{z_1} \dots dl_{z_m}. \quad (7)$$

Оценка m -го слагаемого в (6) показывает, что параметром, определяющим скорость сходимости ряда, является

$$\lambda = \max_{\chi \in \Gamma} \oint_{\Gamma} |S^{(r)}(\mathbf{z}, \chi)| dl_z.$$

Причем ряд сходится при условии $\lambda < 1$. Предлагаемый метод позволяет выделять различными способами сингулярную часть поверхностной функции Грина, влияя тем самым на величину λ , и, следовательно, на скорость сходимости ряда (6)-(7). Оптимальный выбор сингулярной части будет реализован в том случае, если вблизи границы наибольший вклад в поверхностную функцию Грина дает именно сингулярная часть. Тогда в представлении (6)-(7) для регулярной части можно ограничиться несколькими первыми членами ряда.

В качестве $u(\mathbf{x})$ в (4) можно выбрать в том числе и различные регулярные части самой функции Грина и ее производных при фиксированном значении $\mathbf{z} = \boldsymbol{\xi}$, необходимые для вычисления регуляризованного давления Казимира в точке $\boldsymbol{\xi} \in \Gamma$ в общем случае.

В настоящей работе были рассмотрены два различных способа выделения сингулярной части. В первом варианте она была выбрана в виде

$$S^{(s)}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = 2\partial_{n_z} G_0(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \Big|_{z \in \Gamma}, \quad (8)$$

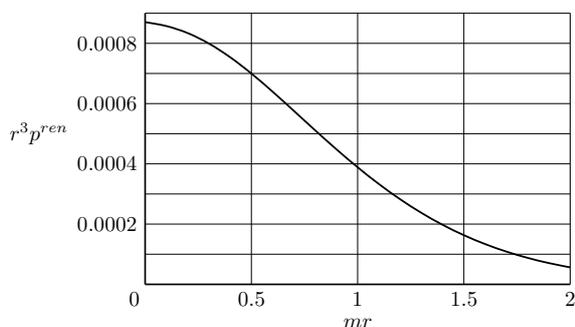
совпадающем с точной поверхностной функцией Грина для плоской границы. При таком выборе сингулярной части ряд (6)-(7) для функции Грина идентичен ряду, построенному в рамках метода «разложения по числу рассеяний». При альтернативном выделении сингулярная часть строилась таким образом, чтобы соответствующая регулярная часть $S_{new}^{(r)}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = S(\mathbf{x}, \mathbf{z}) - S_{new}^{(s)}(\mathbf{x}, \mathbf{z})$ в точке

$x = z \in \Gamma$ обращалась в нуль. Тем самым в нулевом приближении была учтена кривизна границы в точке z , в отличие от тривиального варианта (8).

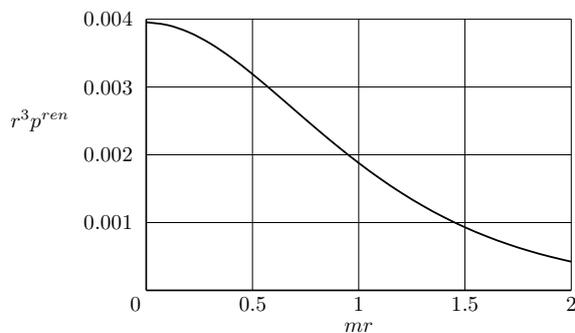
Для обоих вариантов был произведен анализ эффективности предлагаемого метода на примере тестовых задач в круге и «овале», для которых ранее уже были получены ответы с наперед задаваемой точностью. Расчеты производились в первых трех порядках борновского приближения для каждой из двух сингулярных частей. Выяснилось, что альтернативный ряд, полученный при использовании $S_{new}^{(s)}$, в каждом порядке обеспечивает лучшее согласование с точными данными для различных L . Кроме того, оказалось, что величина параметра λ сильно зависит от геометрии рассматриваемой области. При этом с ростом параметра L скорость сходимости ряда при «разложении по числу рассеяний» уменьшается настолько, что для получения удовлетворительной точности решения необходимо применять старшие порядки разложения, но при этом существенно возрастает вычислительная сложность задачи. Для «квадрата» с большим значением L метод «разложения по числу рассеяний» также оказывается малоэффективным. В свою очередь альтернативный борновский ряд оказывается достаточно результативным для всех рассмотренных значений L .

Далее предлагаемый метод применялся для получения перенормированного давления на границе «овала» и «квадрата». Поскольку при выбранном способе перенормировки необходимо вычисление регулярной части поверхностной функции Грина для вспомогательных областей с $L \rightarrow \infty$, то найти перенормированное давление с помощью метода «разложение по числу рассеяний» затруднительно. Искомые значения рассматриваемой физической величины были получены с помощью альтернативного борновского ряда в третьем порядке разложения.

Для общего предельного случая $L \rightarrow 0$ для обоих семейств областей (круга) зависимость перенормированного давления от массы приведена на Рис. 1. Разумеется, использование различных вспомогательных областей приводит к отличающимся абсолютным значениям для круга, что обусловлено конечным расстоянием между вертикальными стенками «овала». Однако, предложенный метод перенормировки позволяет получить зависимость давления для



(a)



(b)

Рис. 1: Давление на границе круга, перенормированное с помощью бесконечных «овала» (a) и «квадрата» (b).

этих семейств областей от величины L , причем эта зависимость наблюдаема. Отметим также, что результаты для перенормированного давления находятся в полном соответствии с естественным физическим требованием экспоненциального убывания этой физической величины с ростом mr при фиксированном значении L .

Перечислим основные преимущества метода. Во-первых, данный подход дает решение в явной аналитической форме, что упрощает анализ найденного ответа. Например, с помощью борновского ряда несложно показать, что при выбранном способе перенормировки давление и для овала и для квадрата экспоненциально убывает с ростом mr . Во-вторых, выделяя различными способами сингулярную часть, можно добиться повышения эффективности метода. В частности, использовавшийся в работе конкретный выбор альтернативной сингулярной части не является единственно возможным, и скорость сходимости борновского ряда, в принципе, может быть увеличена. В-третьих, метод позволяет совершать оценку искомого решения при применении уже первого порядка альтернативного ряда. В-четвертых, вычисление повторных интегралов в рамках данного подхода технически представляет более простую задачу, чем, например, составление и решение системы линейных уравнений достаточно больших размеров при использовании других методов.

Таким образом, предложенный подход к построению решения в виде ряда борновского типа позволяет значительно повысить точность ответа по сравнению с «разложением по числу рассеяний», ограничиваясь при этом лишь младшими порядками разложения.

В главе 4 предлагается метод приближенного вычисления функции Грина и ее производных, основанный на методе граничных элементов и позволяющий сократить размеры получаемой системы линейных уравнений с сохранением требуемой точности решения. Это приводит к уменьшению затрат вычислительных ресурсов для решения задачи.

Регулярная часть ищется в виде потенциала простого слоя

$$S^{(r)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \oint_{\Gamma} G_0(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \rho(\mathbf{z}, \mathbf{y}) dl_z, \quad (9)$$

где Γ – граница рассматриваемой области, $G_0(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ – свободная функция Грина уравнения Гельмгольца, а $\rho(\mathbf{z}, \mathbf{y})$ – ограниченная непрерывная функция плотности, подлежащая определению. После явного выделения сингулярной части, граничные значения регулярной известны и определяются условием (5), то есть для $\mathbf{x} \in \Gamma$ равенство (9) представляет собой интегральное уравнение Фредгольма первого рода относительно неизвестной функции ρ . Согласно основной идее метода граничных элементов замкнутая кривая Γ разбивается на N достаточно малых элементов точками (узлами) \mathbf{z}_n , $n = 0 \dots N$, $\mathbf{z}_N = \mathbf{z}_0 = \mathbf{y}$.

Для задания функции плотности $\rho(\mathbf{z}, \mathbf{y})$ на элементе $\mathbf{z}_{n+i} \mathbf{z}_{n+i+1}$ вместо традиционных сплайнов в настоящей работе предлагается использовать интерполяцию по значениям $\rho_k = \rho(\mathbf{z}_k, \mathbf{y})$ этой функции в узловых точках \mathbf{z}_k , $k = n, \dots, n+2i+1$, $0 \leq n \leq N-2i-1$. Как показали расчеты, для требуемой точности решения разумный баланс между общим количеством узлов и затрачиваемом на задачу временем достигается при использовании полиномиальной интерполяции по четырем точкам. В результате регулярная часть представима в форме

$$S^{(r)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{n=0}^{N-1} \rho_n \cdot \int_{\Delta l_n} G_0(\mathbf{x}, \mathbf{z}) W_n(\mathbf{z}, \mathbf{y}) dl_z. \quad (10)$$

Здесь для суммарного коэффициента при ρ_n , являющегося полиномом третьего порядка, введено обозначение $W_n(\mathbf{z}, \mathbf{y})$, а Δl_n – соответствующий участок кривой Γ , состоящий из одного или нескольких примыкающих друг к другу элементов. При получении формулы (10) учитывалось, что полиномы Лагранжа линейно зависят от узловых значений интерполируемой функции.

Записывая равенство (10) для узловых точек $\mathbf{x}_n = \mathbf{z}_n - \alpha \mathbf{n}_{z_n}$, где \mathbf{n}_{z_n} - нормаль к границе Γ в точке \mathbf{z}_n , $\alpha \rightarrow 0$, можно получить систему N линейных уравнений относительно ρ_n . Найденные в результате решения этой системы значения ρ_n позволяют вычислять регулярную часть (10) в любой точке $\mathbf{x} \in \bar{D}$.

Кроме того, повышения вычислительной эффективности метода можно добиться, если при составлении системы линейных уравнений записать граничные условия не только в узловых точках \mathbf{x}_n , но и в дополнительных точках внутри элементов. Полученная таким образом система уравнений оказывается переопределенной и ее решения могут быть найдены в результате минимизации соответствующей невязки. Такая модификация позволяет сократить время счета в 1.5 – 2 раза.

Для оценки точности метода поверхностных зарядов в главе 4 рассмотрена решаемая точно задача поиска распределения плотности ρ как функции взаимного расположения точек \mathbf{z} и \mathbf{y} на границе круга радиуса r . Вычисления показывают, что, во-первых, найденное с помощью описываемого метода распределение зарядов является гладким даже без введения регуляризующих функционалов, а, во-вторых, при сравнении точного ответа с приближенным видно, что метод дает 8-10 верных знаков в зависимости от степени удаленности точки \mathbf{z} от \mathbf{y} . С помощью предложенного метода также вычислено перенормированное давление для «овала» и «квадрата». Результаты для «овала» совпадают с полученными в главе 2 результатами с точностью 6-8 знаков.

Также обсуждаемый вычислительный алгоритм применялся к расчету силы казимировского взаимодействия между двумя разделенными телами. При этом был использован подход, предложенный впервые в работе Дзялошинского, Лифшица, Питаевского для вычисления ван-дер-ваальсовых сил между макроскопическими телами. В рамках этого подхода сила взаимодействия вычисляется как поток импульса квантовой системы через произвольную замкнутую поверхность Σ , охватывающую одно из двух тел

$$F^i = \oint_{\Sigma} \langle 0 | T^{ij}(\boldsymbol{\xi}) n_j | 0 \rangle d\sigma. \quad (11)$$

Здесь $d\sigma$ – элемент поверхности Σ , \mathbf{n} – нормаль к этой поверхности в точке $\boldsymbol{\xi}$, T^{ij} – пространственные компоненты тензора энергии-импульса. При этом

предполагается, что поверхность Σ не имеет общих точек с этими телами. Перенормировка в этом случае тривиальна и сводится к нормировке функции Грина соответствующей краевой задачи на свободную функцию Грина.

С помощью описанного выше подхода произведено исследование зависимости силы Казимира, действующей на цилиндрический стержень бесконечной длины, помещенный внутри цилиндрической ямы, от расстояния h между дном ямы и нижним торцом стержня. Задача рассматривалась для скалярного поля, удовлетворяющего нулевым граничным условиям, в двумерном и трехмерном случаях. На Рис. 2 приведены результаты для следующих геометрических характеристик систем: радиус дна ямы $r_J = 1$, ее глубина $d_J = 4r_J$, радиус основания цилиндра $r_c = 0.75r_J$.

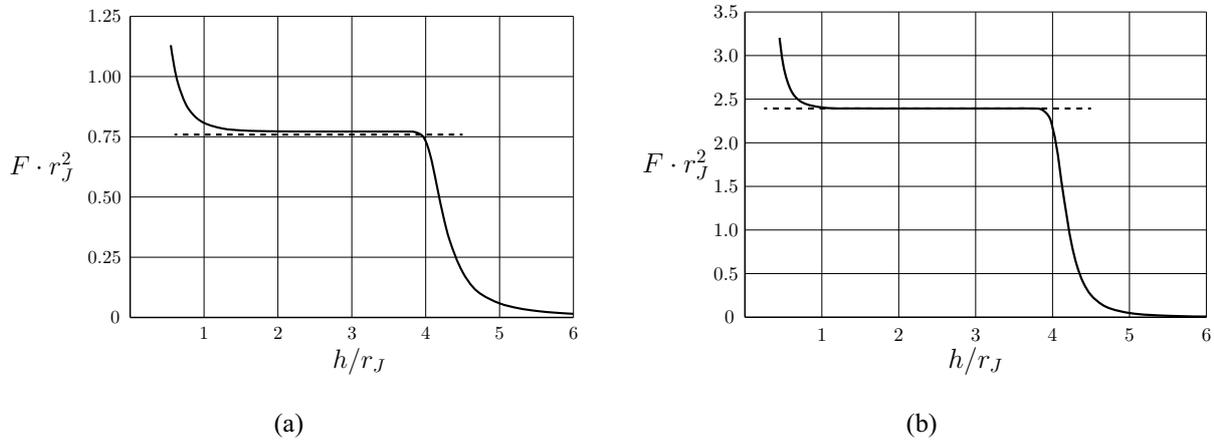


Рис. 2: Зависимость от h/r_J силы Казимира, действующей на размещенный в яме стержень, в двумерном (a) и трехмерном случаях (b). Штриховая линия отвечает энергетической оценке для предельного случая $d_J - h \rightarrow \infty$, $h \rightarrow \infty$.

Согласно полученным данным сила носит характер притяжения. Кроме того существует диапазон расстояний между взаимодействующими объектами, в пределах которого она сохраняет почти постоянное значение (Рис. 2). Очевидно, эта картина соответствует предельному случаю бесконечно глубокой ямы, в которую помещен стержень на бесконечном расстоянии от ее дна. Для силы, соответствующей этому предельному случаю, была произведена энергетическая оценка в пренебрежении краевыми эффектами, которая хорошо согласуется с полученными данными при решении задачи без упрощающих предположений. Это означает, что для таких расстояний между рассматриваемыми телами краевые эффекты незначительны. С увеличением расстояния сила резко убывает практически до нуля, что соответствует извлеченному из

ямы стержню.

Кроме того были вычислены нормальная и тангенциальная составляющие силы для двух идеально проводящих компонент реечной передачи в случае электромагнитного эффекта Казимира. Расчеты выполнялись для нескольких вариантов профиля реек. При этом изменения формы реек производились в достаточно малой окрестности ребер гребенки, так что «глобальные» геометрические свойства системы были сохранены. В настоящей работе рассматривались следующие геометрии – прямоугольная гребенка, ее сглаженный вариант (все прямые углы были заменены участками цилиндра соответствующего радиуса), и случай плоского среза (все углы $\pi/2$ исходной прямоугольной гребенки заменялись парами углов $3\pi/4$). Для контроля точности используемого метода для рассматриваемой задачи, во-первых, проверялось согласие найденного решения в предельном случае плоскопараллельных пластин с точным ответом, а во-вторых, отслеживалось изменение ответа при увеличении плотности узловых точек.

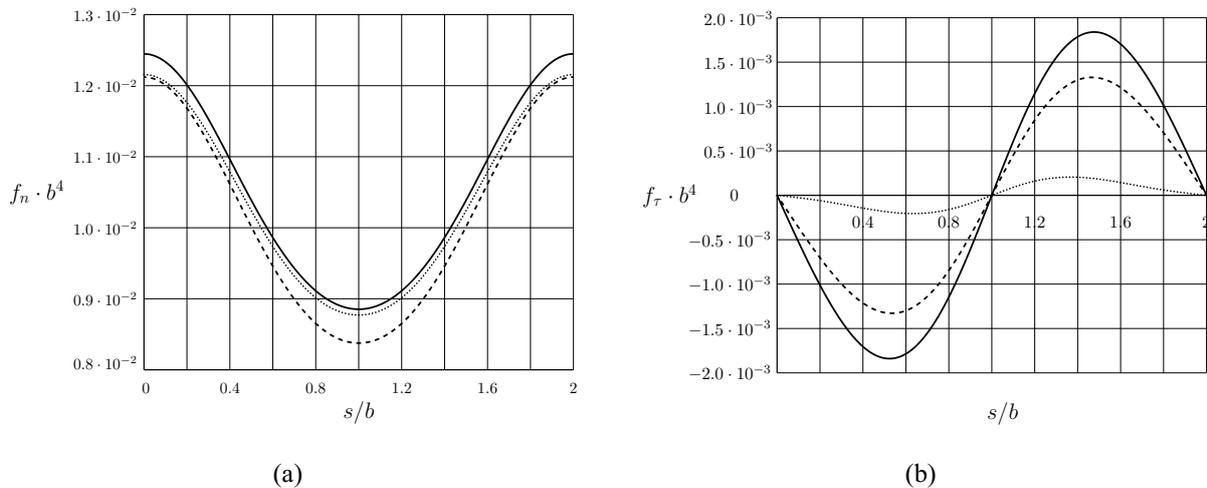


Рис. 3: Зависимость плотности нормальной (а) и тангенциальной (б) компонент силы от смещения s . Прямоугольный случай – сплошная линия, плоский срез – штриховая линия, сглаженный случай – пунктирная линия.

Представленные на Рис. 3 результаты отвечают следующим геометрическим характеристикам системы: ширина и расстояние между выступами каждой рейки b , высота выступа $h = b/2$, расстояние между вершинами выступов $b = 1$. Как показали расчеты, результирующая тангенциальная сила существенно зависит от формы реек. Даже небольшие изменения профиля взаимодействующих реек приводят к значительным изменениям тангенциальной компо-

ненты (Рис. 3(b)). Например, при касательном смещении реек в четверть периода относительно их симметричного расположения для сглаженной геометрии происходит ослабление тангенциальной силы почти на порядок по сравнению с прямоугольным случаем, даже при малом значении радиуса кривизны ребра. При этом нормальная составляющая силы при таких незначительных модификациях формы реек остается почти неизменной (Рис. 3(a)).

На примере рассмотренных в данной главе задач было установлено, что предлагаемый метод существенно снижает требуемое для расчетов машинное время.

В заключении сформулированы основные результаты диссертации. Обсуждается практическая ценность рассмотренных в работе задач, приводятся возможные области применимости разработанных методов.

Заключение

Основные результаты, выносимые на защиту:

1. Предложен способ перенормировки граничного давления Казимира с помощью вспомогательных областей. Показано, что перенормированное таким образом давление имеет разумную с физической точки зрения асимптотику при увеличении массы поля.
2. Построено решение для функции Грина в виде ряда борновского типа. Исследована сходимость этого ряда и установлен параметр, характеризующий скорость сходимости. Такой подход дает возможность получить решение задачи с удовлетворительной точностью при задействовании минимального количества вычислительных ресурсов.
3. Разработана схема численного расчета функции Грина, представляющая собой модификацию метода граничных элементов. Предложенные модификации позволяют снизить размеры получаемой в итоге системы линейных уравнений с сохранением желаемой точности решения.
4. Исследована зависимость нормальной и тангенциальной силы Казимира от геометрии взаимодействующих поверхностей в задаче о речной

передаче для различных значений касательного смещения реек. Показано, что даже незначительные изменения формы взаимодействующих пластин приводят к существенным отличиям тангенциальной силы.

Публикации

1. Воронина Ю.С., Силаев П.К. Связь давления и энергии Казимира в одномерных полевых моделях. // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон., 2009, №1, с. 37–41
2. Воронина Ю.С., Силаев П.К. Регуляризация давления Казимира в двумерных полевых моделях. // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон., 2009, №3, с. 14–18
3. Воронина Ю.С., Силаев П.К. Перенормировка давления Казимира методом эффективных поверхностных зарядов. // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон., 2010, №5, с. 19–25
4. Voronina Yu., Silaev P. On the shape dependence of the tangential Casimir force. // Письма в ЭЧАЯ, 2013, т. 10, №6, с. 874-880.
5. Воронина Ю.С. Регуляризация давления Казимира в двумерной модели скалярного поля. // «Ломоносов-2009», секция «Физика», сборник тезисов, с. 10-10
6. Voronina Yu., Silaev P. Casimir pressure regularization and renormalization in two-dimensional scalar field model. // «14th Lomonosov conference on elementary particle physics», 2009, proceedings, p. 414-415
7. Воронина Ю.С. Нахождение регуляризованной функции Грина методом эффективных поверхностных зарядов. // «Ломоносов-2010», секция «Физика», сборник тезисов, с. 4–1-2