УДК 517.958; 621.372.8

О РАСПРОСТРАНЕНИИ ПОНЯТИЯ ОБОБЩЕННОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ НА РЕШЕНИЯ, НЕ ПРИНАДЛЕЖАЩИЕ L^2

А. Н. Боголюбов, М. Д. Малых

(*кафедра математики*)

E-mail: malykham@mtu-net.ru

Решения задачи Дирихле для уравнения $\Delta u + \lambda u = f$, удовлетворяющие условиям излучения, но не принадлежащие L^2, трактуются как «локально ограниченный» функционал. Доказано, что для гладких областей из такого обобщенного решения можно получить классическое решение.

Рассмотрим в области X евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ задачу Дирихле

$$\begin{cases} \Delta v + \lambda v = f, & x \in X, \\ u = 0, & x \in \partial X, \end{cases} \tag{1}$$

где $f(x)$ — заданная гладкая функция с компактным носителем. Если интерпретировать X как полость с идеально проводящими стенками, f — как ток, а λ — как квадрат частоты, то задача (1) будет задачей о возбуждении колебаний током f, локализованным в конечной области [1].

1. Решение задачи Дирихле как ограниченный функционал

Основную сложность при рассмотрении задачи (1) представляет учет условий на бесконечности. С математической точки зрения наиболее естественное условие — это $v \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(X)$, поскольку тогда задача (1) в обобщенной постановке

$$(\nabla v, \nabla w)_{L^2} - \lambda (v, w)_{L^2} = (f, w)_{L^2} \;\; \forall\, w \in C_0^\infty(X) \tag{2}$$

приводит к задаче

$$v - \lambda A v = F[f], \tag{3}$$

где A — ограниченный оператор [2]. В силу того что A — самосопряженный и положительно определенный, а пространство $\overset{\circ}{W}{}_2^1(X)$ — гильбертово, спектр $\sigma(A) \subset [0, +\infty)$ и резольвента A является однозначной функцией λ, определенной в области, дополнительной к спектру $\sigma(A)$. В частности, при всех отрицательных и комплексных λ уравнение (3) имеет единственное решение.

Без труда доказывается, что это решение является классическим решением задачи (1), поскольку верна

Теорема 1 (лемма Вейля). *Пусть $\eta(x) \in C^1(G)$ и $v(x)$ — локально интегрируемая в G функция. Пусть имеет место соотношение*

$$\int\limits_G v(x) \mathfrak{D} w \, dx = \int\limits_G \eta(x) w(x) \, dx, \tag{4}$$

где $\mathfrak{D}$ — произвольный эллиптический оператор, при всех $w(x) \in C_0^\infty(G)$, то $v(x)$ совпадает почти всюду в G с некоторой функцией $V(x) \in C^2(G)$. Если считать функции, совпадающие почти всюду, равными, то можно сказать, что верно $v \in C^2(G)$.

Это утверждение было доказано Г. Вейлем [3] для случая $\mathfrak{D} = \Delta_n$; прямое и элементарное его доказательство приведено в [4]. Следует отметить, что в этом утверждении содержится больше, чем нужно для доказательства классичности обобщенного решения: обобщенное решение принадлежит $\overset{\circ}{W}{}_2^1(X)$, не просто $L^2(X)$. Мы воспользуемся этим «запасом прочности» для дальнейшего обобщения понятия решения.

2. Решение задачи Дирихле как локально ограниченный функционал

Для физических приложений, когда λ — квадрат частоты, представляет интерес разрешимость этой задачи при $\lambda > 0$. Отсутствие решения из $\overset{\circ}{W}{}_2^1(X)$ неудивительно, в волноведущих системах происходит расхождение бегущих волн от источника тока, которые никогда не принадлежат даже $L^2(X)$. Из тех же соображений ясно, что решение, ведущее себя на бесконечности некоторым правильным образом, должно существовать при всех λ и удовлетворять условиям излучения. Для доказательства фредгольмовости задачи (1), к которой добавлены условия излучения, первыми были применены методы теории потенциала. К настоящему моменту вполне изучен случай, когда X — внешность некоторой ограниченной области (задача дифракции), и случай, когда X — цилиндр (задача о возбуждении колебаний в волноводе) [5–6]. Одно из затруднений, возникающих при применении методов функционального анализа, — отсутствие понятия обобщенного решения, включающего решения (1), не принадлежащие $L^2(X)$.

Можно заметить, однако, что уравнение (3) не теряет смысл и при $v \notin L^2(X)$, поскольку носитель w ограничен и, следовательно, выражения

$$(v, w)_{L^2(X)}, \quad (v, \Delta w)_{L^2(X)}$$

вполне определены. Значит, мы не можем рассматривать $v \notin L^2(X)$ как решение только потому, что слишком рано замыкаем C_0^∞ по норме W_2^1.

Решение v задачи (1), вне зависимости от того, из L^2 оно или нет, задает функционал

$$v(w) = \int\limits_X v\overline{w}\,dx$$

на $C_0^\infty(X)$. Хотя этот функционал неограничен по норме $\overset{\circ}{W}{}_2^1(X)$, он является ограниченным локально. Именно, рассматривая X как топологическое пространство с обычным набором окрестностей $\mathbb{R}^n$, можно для любой точки x указать такую окрестность U_x, что этот функционал при $w \in C_0^\infty(U_x)$ ограничен по норме L^2 и даже W_2^1.

Наоборот, пусть v — произвольная гладкая функция, заданная в области X и на ее границе, тогда выполнение соотношения

$$v(\Delta w) + \lambda v(w) = (f, w)_{L^2} \quad \forall\, w \in C_0^\infty(X) \tag{5}$$

влечет выполнение уравнения $\Delta v + \lambda v = f$. То, что v удовлетворяет граничному условию Дирихле, можно выразить, заменив $C_0^\infty(X)$ на более широкое множество $\mathcal{O}(X)$ всех гладких функций, которые обращаются в нуль на границе X и их носитель лежит в некотором компакте. В самом деле, если v — решение $\Delta v + \lambda v = f$, определенное вплоть до границы X, то выполнение (5) при w, равном нулю на ∂X, дает

$$\int\limits_{\partial X} v\frac{\partial w}{\partial n}\,dx = 0,$$

откуда следует $v|_{\partial X} = 0$. Поэтому обобщенное решение задачи (1) можно трактовать следующим образом.

Определение. Пусть $\mathcal{O}(X)$ — множество всех гладких функций, которые обращаются в нуль на границе X и их носитель лежит в некотором компакте. Линейный функционал $v(w)$, определенный для всех $w \in \mathcal{O}(X)$, будем называть обобщенным решением задачи (1), если для любой точки x, лежащей внутри области X, найдется такая окрестность U_x, что $v(w)$ при $w \in \mathcal{O}(U_x)$ ограничен по норме L^2 и верно соотношение

$$v(\Delta w) + \lambda v(w) = (f, w)_{L^2} \quad \forall\, w \in \mathcal{O}(U_x). \tag{6}$$

Функционал, обладающий только первым свойством, будем называть локально ограниченным.

При этом справедливо следующее обобщение леммы Вейля.

Теорема 2. *Если граница области X не имеет входящих углов, то из существования обобщенного решения $v(w)$ задачи (1) следует существование классического решения этой задачи.*

Доказательство. Пусть x — произвольная точка, лежащая внутри области X, тогда существует такая ее окрестность U_x, что $v(w)$ ограничено по норме L^2. Поэтому существует такой элемент $v_x \in L^2(U_x)$, что

$$v(w) = \int\limits_{U_x} v_x\overline{w}\,dx \quad \forall\, w \in \mathcal{O}(U_x).$$

Тогда в силу соотношения (6) и леммы Вейля эта функция, а вернее один из представителей класса эквивалентности, является дважды непрерывно дифференцируемой.

Допустим, что U_x и U_y пересекаются, и пусть $U = U_x \cap U_y$. Тогда

$$v(w) = \int\limits_{U_x} v_x\overline{w}\,dx = \int\limits_{U_y} v_y\overline{w}\,dx$$

при всех $w \in \mathcal{O}(U)$, а следовательно, и при всех $w \in L^2(U)$. Поскольку функции v_x и v_y — непрерывные, то $v_x \equiv v_y$ на U. Это позволяет ввести функцию $v(x)$ как функцию, равную $v_x(x)$, и, поскольку тогда в некоторой окрестности U_x верно $v(y) = v_y(y) = v_x(y)$, эта функция всюду в X дважды непрерывно дифференцируема.

Для всех функций $w \in C_0^\infty(U_x)$ соотношение (6) можно записать так:

$$\int\limits_X [\Delta v + \lambda v]\overline{w}\,dx = (f, w)_{L^2},$$

откуда сразу видно, что v — классическое решение уравнения $\Delta v + \lambda v = f$ в окрестности x, а следовательно, и всюду в X.

Допустим, что граница X содержит плоский участок. Сделав линейную замену переменных, всегда можно добиться того, чтобы этот участок задавался уравнением $x_1 = 0$. Окружим его некоторой окрестностью U, симметричной относительно $x_1 = 0$, и продолжим v и f в ней через границу антисимметрично. Произвольную функцию $w \in C_0^\infty(U)$ можно представить в виде симметричной и антисимметричной функции $w = w' + w''$, где

$$w' = \frac{w(x_1, \ldots) - w(-x_1, \ldots)}{2},$$

$$w'' = \frac{w(x_1, \ldots) + w(-x_1, \ldots)}{2}.$$

При этом

$$v(w') = \int\limits_U vw'\,dx = 0,$$

$$v(w'') = \int\limits_U vw''\,dx = 2\int\limits_{U\cap X} vw''\,dx,$$

и в силу

$$\int\limits_X [w\Delta v - v\Delta w]\,dx = 0$$

верно и

$$v(\Delta w') = 0, \quad v(\Delta w'') = 2\int\limits_{U\cap X} v\Delta w''\,dx.$$

Поэтому удовлетворяется соотношение

$$v(\Delta w) + \lambda v(w) = (f, w), \quad w \in C_0^\infty(U).$$

В силу леммы Вейля отсюда следует, что $v \in C^2(U)$. Раз она антисимметрична относительно $x_1 = 0$, то $v|_{x=x_1} = 0$. Таким образом, на данном участке границы v удовлетворяет задаче Дирихле в классическом смысле.

В общем случае, когда x — точка, лежащая на гладком участке границы ∂X, всегда можно рассмотреть шар

$$K = \{y \in \mathbb{R}^n \colon |x - y| \leqslant R\}$$

столь малого радиуса R, что граница ∂X делит его на две части K_1, лежащую целиком в X, и K_2, не принадлежащую X. Поскольку граница гладкая, существует такое взаимно однозначное и гладкое отображение

$$\psi \colon K \to K_0 = \{z \in \mathbb{R}^n \colon |z| \leqslant 1\},$$

переводящее K_1 в область $x_1 > 0$, а K_2 — в область $x_1 < 0$. При этом $\Delta v + \lambda v = f$ остается эллиптическим и к нему применима лемма Вейля. Поэтому все сказанное о прямом участке границы переносится и на общий случай гладкой границы.

Если область X имеет входящие углы, то функция $v(x)$, введенная в доказательстве этой теоремы, существует, а условие локальной ограниченности функционала $v(w)$ эквивалентно классическим условиям Мейкснера.

Таким образом, представление о решении как локально ограниченном функционале вполне соответствует главному принципу: существование обобщенного решения должно приводить к существованию классического решения в случае регулярной в указанном смысле области.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 03-01-00166).

Литература

1. *Ильинский А.С., Кравцов В.В., Свешников А.Г.* Математические модели электродинамики. М., 1993.
2. *Ладыженская О.А.* Краевые задачи математической физики. М., 1973.
3. *Weyl H.* // Duke Math. J. 1940. **7**. P. 411.
4. *Hellwig G.* Differentialoperatoren der mathematischen Physik. Berlin–Göttingen–Heidelberg, 1964.
5. *Шестопалов В.П.* Спектральная теория и возбуждение открытых структур. М., 1987.
6. *Боголюбов А.Н., Малых М.Д., Свешников А.Г.* // Докл. РАН. 2002. **385**, №6. С. 744.

Поступила в редакцию
02.06.04