УДК 539.12.01

ЭНЕРГИЯ КВАРКА В ТРЕХМЕРНОЙ МОДЕЛИ КХД С ПОСТОЯННЫМ ФОНОВЫМ ПОЛЕМ

В. Ч. Жуковский, Н. А. Песков, С. А. Денисов

(*кафедра теоретической физики*)

E-mail: th180@phys.msu.su

Вычислена однопетлевая поправка к энергии кварка в $SU(2)$ модели полей Янга–Миллса с топологической массой θ в пространстве размерности $d=2+1$ с учетом внешнего фонового поля. В качестве фонового поля были выбраны точные постоянные решения для полей Янга–Миллса. Показано, что в случае, когда масса кварка равна $m=\frac{1}{4}\theta$, эффективная масса кварка остается равной нулю даже с учетом вычисленной однопетлевой вакуумной поправки. Данное обстоятельство может быть следствием внутренней симметрии, присущей совокупности решений для фонового калибровочного поля (постоянное неабелево поле) и решений уравнения Дирака.

Введение

Исследование моделей квантовой теории поля в пространствах с пониженной размерностью началось с ряда открытий, сделанных на рубеже 1970-х и 1980-х гг. В 1979 г. появилась работа [1], в которой исследовались линейные полимеры. Как оказалось, континуальная модель ряда полимерных цепочек в основных чертах совпадает с уже изученными ранее одномерными моделями квантовой теории поля. Таким образом, малоразмерные модели зарекомендовали себя как весьма полезные инструменты при изучениии квазиодномерных и квазидвумерных сред. А с момента открытия в 1980 г. фон Клитцингом с сотрудниками целочисленного квантового эффекта Холла [2] такие модели в пространстве размерности $d=2+1$ стали особенно популярными. В настоящее время выявлена тесная связь между предсказаниями квантовой теории поля в пространствах с пониженной размерностью и рядом необычных эффектов, экспериментально обнаруженных в физике конденсированных сред.

Особенностью пространств нечетной размерности в калибровочных теориях является возможность ввести в лагранжиан калибровочного поля слагаемое, отвечающее за генерацию массы этого поля, — так называемый черн-саймоновский топологический член. Одной из первых работ, посвященных массивным калибровочным полям в пространстве размерности $d=3$, была опубликованная в 1982 г. статья Дезера, Джакива и Темплтона [3] (см. также работу [4]). Вопрос динамической генерации члена Черна–Саймонса в некоторых моделях был подробно рассмотрен в работах [5] и [6]. Дальнейшее исследование структуры $(2+1)$-мерных калибровочных массивных теорий интересно как само по себе, так и с точки зрения их связи с топологическими свойствами квантовой теории поля в пространстве размерности $d=4$, поскольку в этом случае возможно возникновение структур, подобных черн-саймоновскому члену. Отметим, например, возможную модификацию $(3+1)$-мерной электродинамики, предложенную в работе [7]. Эта модификация, нарушающая лоренц-инвариантность и четность, основана на введении в лагранжиан КЭД черн-саймоновского члена, который связывает дуальный электромагнитный тензор с 4-вектором.

В настоящей статье рассмотрен радиационный сдвиг энергии кварка, находящегося во внешнем поле (модельном глюонном конденсате), представляющем собой точное решение уравнений калибровочного поля с членом Черна–Саймонса.

1. Постоянное фоновое поле

Лагранжиан массивного калибровочного поля в $(2+1)$-мерной $SU(2)$ модели глюодинамики выглядит следующим образом [3]:

$$\mathcal{L}=-\frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^{a\,\mu\nu}-\frac{\theta}{4}\varepsilon^{\mu\nu\alpha}\left(F^a_{\mu\nu}A^a_\alpha-\frac{g}{3}\varepsilon^{abc}A^a_\mu A^b_\nu A^c_\alpha\right), \tag{1}$$

где $A_\mu\equiv\tau^aA^a_\mu/2$ — потенциалы глюонного поля, τ^a — матрицы Паули в цветовом пространстве, а $F^a_{\mu\nu}=\partial_\mu A^a_\nu-\partial_\nu A^a_\mu+g\varepsilon^{abc}A^b_\mu A^c_\nu$ — напряженность хромомагнитного поля. Коэффициент θ в топологическом члене Черна–Саймонса играет роль массы калибровочного поля и называется черн-саймоновской массой.

Уравнения для калибровочного поля при наличии черн-саймоновского члена модифицируются. В отличие от уравнений Янга–Миллса [8] они содержат добавочный член с черн-саймоновской массой:

$$D^{ac}_\mu F^{a\,\mu\beta}-\frac{\theta}{2}\varepsilon^{\beta\mu\nu}F^c_{\mu\nu}=0, \tag{2}$$

где $D^{ac}_\mu=\delta^{ac}\partial_\mu-g\varepsilon^{abc}A^b_\mu$. Решения такого уравнения можно искать в виде «сферически-симметричного», не зависящего от координат анзаца

$A^{a\,\mu} \sim \delta^{a\mu}$, так что отличными от нуля компонентами неабелева потенциала оказываются лишь те, которые имеют совпадающие групповые и координатные индексы*). Уравнению (2) в этом анзаце удовлетворяют четыре решения

$$A^{a\,\mu} = \frac{\theta}{2g}\delta^{a\mu}\chi^{(a)}_{\lambda\omega}, \tag{3}$$

где безразмерный единичный вектор $\chi^{(a)}_{\lambda\omega} = (\lambda i, \lambda\omega i, \omega)$ определяет «диагональные» компоненты, а параметризирующие решение константы $\lambda = \pm 1$ и $\omega = \pm 1$ принимают свои значения независимо друг от друга. Заметим, что постоянное решение в виде выбранного анзаца не содержит и не может содержать свободных параметров, поскольку уравнение (2) является нелинейным и, более того, неоднородным по степени потенциала. Такое поле удовлетворяет следующим замечательным соотношениям:

$$F^a_{\mu\nu} = -\frac{\theta}{2}\varepsilon_{\mu\nu\alpha}A^{a\,\alpha},$$
$$A^{a\,\mu}A^b_\mu = \frac{\theta^2}{4g^2}\delta^{ab}, \qquad A^{a\,\mu}A^{a\,\nu} = \frac{\theta^2}{4g^2}g^{\mu\nu}.$$

В работе [9] была вычислена плотность энергии калибровочного поля $E = -\frac{1}{32}\theta^4/g^2$, описываемого лагранжианом (1), а также найден однопетлевой эффективный потенциал

$$V_{\text{eff}} = E + \mathcal{E}^{(1)}_G + \mathcal{E}^{(1)}_Q$$

с учетом вкладов как глюонной $\mathcal{E}^{(1)}_G$, так и кварковой $\mathcal{E}^{(1)}_Q$ петель. После проведения процедуры перенормировки и исключения вклада нефизических степеней свободы поля глюонов было найдено, что вклад бозонного сектора в эффективный потенциал при $d = 3$ содержит и действительную, и мнимую части:

$$\operatorname{Re} V_{\text{eff}} \equiv E + \operatorname{Re}\mathcal{E}^{(1)}_G = -\frac{\theta^4}{32g^2} - \frac{|\theta|^3}{4\pi}\left(\frac{3\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}} + \frac{5}{3}\right),$$
$$\operatorname{Im}\mathcal{E}^{(1)}_G = -\frac{5}{24\sqrt{2}\pi}|\theta|^3.$$

Наличие мнимой части в эффективном потенциале свидетельствует о том, что фоновое поле (3) не является классическим устойчивым решением, т. е. соответствующий вакуум нестабилен. Причина этого заключается в том, что квантовые возбуждения на фоне (3) содержат тахионные моды. Нахождение стабильных решений по-прежнему остается актуальной проблемой современной теоретической физики калибровочных полей. Неустойчивость бозонного вакуума топологически массивной калибровочной теории была, например, частично исследована в работе [10].

Отметим, что в неабелевых теориях, в отличие от КЭД, требование калибровочной инвариантности относительно топологически нетривиальных калибровочных преобразований влечет за собой квантование θ [3]: $4\pi\frac{\theta}{g^2} = n$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Условие квантования массы калибровочного поля позволяет оценить полученные величины для различных значений квантующего массу целого числа n. Энергия калибровочного поля, заданного формулой (3), $E \sim g^6 n^4$ и однопетлевая поправка к нему за счет глюонов $\mathcal{E}^{(1)}_G \sim g^6 n^3$ являются величинами одного порядка, если число n порядка единицы (что, в свою очередь, говорит о малости величины θ в пертурбативной теории). Поэтому для малых n недостаточно рассматривать только однопетлевые эффекты при вычислении эффективного потенциала, а необходимо учитывать также и высшие петли.

2. Кварки на фоне глюонного конденсата

Для рассмотрения поведения кварков на фоне внешнего поля выберем представление γ-матриц в $(2+1)$-мерном пространстве в виде $\gamma^0 = \sigma^3$, $\gamma^{1,2} = i\sigma^{1,2}$, где σ^i — матрицы Паули. При этом они удовлетворяют соотношению $\gamma^\mu\gamma^\nu = g^{\mu\nu} - i\varepsilon^{\mu\nu\alpha}\gamma_\alpha$.

В постановке настоящей задачи возможны два различных состояния кварка, которые отвечают различным цветам в фундаментальном представлении группы $SU(2)$. Спиноры при $d = 3$ являются двухкомпонентными величинами, описывающими лишь две степени свободы «частица–античастица», так что спиновые коэффициенты и знак энергии оказываются жестко связанными друг с другом.

Решение (3) уравнения (2) является характерным примером полевых конфигураций, движение в которых представляет собой комбинацию движений в цветовом (внутренний индекс a) и конфигурационном и спинорном (пространственный индекс μ) пространствах [11, 12]. В свою очередь, это позволяет связать преобразования спина и изоспина (см., напр., [13]), причем появляется возможность ввести новую сохраняющуюся величину — комбинированный спин, — которая обобщает понятия спина и изоспина. Комбинированный спин описывает систему двух спинов: изотопического, связанного с группой цветовой симметрии $SU(2)_c$, и обычного $d = 2+1$ спина, который характеризуется простейшим спинорным представлением единичного ранга группы $SU(2)$.

Движение кварков во внешнем поле (3) определяется гамильтонианом уравнения Дирака

$$H_D = ip^1\gamma^2 - ip^2\gamma^1 + \left(m\gamma^0 - \frac{\theta}{4}\omega\tau^3\right) - \lambda\frac{\theta}{4}(\tau^1\gamma^2 - \omega\tau^2\gamma^1) \tag{4}$$

---

*) Будем считать далее, что индекс 3 цветового пространства совпадает с индексом 0 координатного пространства-времени Минковского.

и оператором комбинированного спина

$$J = \frac{4}{\theta} g A^\mu p_\mu - \omega\gamma^0\tau^3\Big(p_\mu\gamma^\mu - m + \frac{\theta}{4}\Big), \qquad (5)$$

который удовлетворяет условию $[H_D, J] = 0$.

Решение уравнения Дирака

$$H_D\psi = \varepsilon\psi \qquad (6)$$

дает две различные ветви энергетического спектра кварков во внешнем поле (3):

$$\varepsilon_s^2 = \mathbf{p}^2 + m_{\text{eff}\,s}^2 \quad (s = 1, 2), \qquad (7)$$

где эффективные массы кварков определяются выражениями

$$m_{\text{eff}\,1}^2 = (m - \tilde\theta)^2, \quad m_{\text{eff}\,2}^2 = (m - \tilde\theta)(m + 3\tilde\theta),$$

а $\tilde\theta = \theta/4$. Две ветви энергии совпадают, однако, если $m = \tilde\theta$, что соответствует равенству нулю эффективной массы кварка в данном поле ($m_{\text{eff}\,1} = m_{\text{eff}\,2} = 0$). Следует отметить, что в случае, когда $-\tilde\theta - 2|\tilde\theta| < m < -\tilde\theta + 2|\tilde\theta|$, в спектре кварков будут присутствовать тахионные моды, поскольку для некоторых значений импульса в спектре возникают мнимые ветви, $\varepsilon_2^2 < 0$. Наличие тахионных мод свидетельствует о неэрмитовости оператора H_D на собственных состояниях, отвечающих мнимым собственным значениям.

Решения уравнения (6) можно представить в виде плоских волн:

$$\psi_s(x) = (2\pi)^{-1}\exp(-i\varepsilon_s t + i\mathbf{px})\Psi_s,$$

где $s = 1, 2$, а Ψ_s — постоянные спиноры, являющиеся собственными для оператора комбинированного спина (5):

$$J\Psi_s = (-1)^s(\tilde\theta - m)\Psi_s.$$

Отметим, что правая часть последнего выражения обращается в нуль, если $m = \tilde\theta$, т.е. $m_{\text{eff}\,s} = 0$. При этом не только совпадают две ветви энергии $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$, но и отождествляются состояния кварка: $\Psi_1 = \Psi_2$. В этом случае уравнение Дирака (6) имеет нулевую моду $\varepsilon_0 = \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$ при $\mathbf{p} = 0$. При условии $m = \tilde\theta$ оператор H_D является заведомо эрмитовым.

Вклад в вещественную часть эффективного потенциала фермионной петли имеет вид [9]

$$\operatorname{Re}\mathcal{E}_Q^{(1)} = \frac{1}{6\pi}\left\{|m_{\text{eff}\,1}|^3 - |m|^3 + \Theta(m_{\text{eff}\,2}^2)[|m_{\text{eff}\,2}|^3 - |m|^3]\right\}.$$

Здесь Θ — функция Хевисайда. При вычислении этой величины была проведена стандартная перенормировка, так что $\operatorname{Re}\mathcal{E}_Q^{(1)} = 0$ в отсутствие внешнего поля ($\tilde\theta = 0$).

Мнимая часть, как и в случае глюонов, конечна и отлична от нуля лишь в присутствии в спектре кварков тахионных мод:

$$\operatorname{Im}\mathcal{E}_Q^{(1)} = -\frac{1}{6\pi}\left|(m - \tilde\theta)(m + 3\tilde\theta)\right|^{3/2}\Theta\left(4\tilde\theta^2 - (m + \tilde\theta)^2\right).$$

Наиболее интересной представляется ситуация, когда $m = \tilde\theta$. Напомним, что в силу выбора внешнего поля изотопический спин оказывается жестко связанным с обычным спином. Решая уравнение Дирака, найдем, что

$$\Psi(p) = \psi_\tau\psi_\sigma = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\varkappa\lambda \\ \mathrm{e}^{-i\omega\phi}\end{pmatrix}_\tau \begin{pmatrix}\mathrm{e}^{i\phi} \\ \varkappa\end{pmatrix}_\sigma. \qquad (8)$$

Это выражение справедливо для отличного от нуля импульса кварка $\mathbf{p}$. Величина $\varkappa = \pm 1$ определяет знак энергии ($\varepsilon \equiv p_0 = \varkappa|\mathbf{p}|$), а фазу ϕ определяют соотношения $p^2 \pm ip^1 = |\mathbf{p}|\,\mathrm{e}^{\pm i\phi}$. Спинор ψ_τ описывает цветовое состояние кварка, а ψ_σ характеризует спиновое состояние. Для нахождения радиационного сдвига энергии кварка воспользуемся выражением для однопетлевого массового оператора из [9]:

$$iM(p) = ig^2\frac{\pi^2\sqrt{2}}{|\theta|}\Big[-b_1\theta + \frac{5}{9}\left(\frac{2}{\theta}gA^\mu + \frac{1}{2}\gamma^\mu\right)p_\mu - \\ - gA^\mu\gamma^\nu(b_2\,g_{\mu\nu} - b_3\,\theta^{-2}p_\mu p_\nu)\Big],$$

где b_i ($i = 1, 2, 3$) — постоянные коэффициенты:

$$b_1 = \frac{5}{6} - i\Big(\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{\sqrt{3}}\Big), \quad b_2 = \frac{10}{9} + i\Big(\frac{8}{3\sqrt{3}} + \sqrt{2}\Big), \\ b_3 = \frac{4}{45} - \frac{4i}{5\sqrt{3}}.$$

Оператор $i\gamma^0 M$ представляет собой возмущение исходного оператора Гамильтона (4) дираковской частицы.

Отметим, что в силу специального выбора фонового поля (3) гамильтониан (4) не является эрмитовым оператором в полном пространстве представления решений. Данный факт приводит к тому, что собственные векторы невозмущенного оператора Гамильтона не образуют полного базиса в этом пространстве, а лишь выделяют в нем подпространство, в котором невозмущенный гамильтониан является эрмитовым (в спектре отсутствуют тахионные моды). Кроме того, в интересующем нас случае $m = \tilde\theta$ указанное подпространство представляет собой подпространство синглетов по отношению к оператору J, определенному в (5).

Результат вычисления энергетического спектра возмущенного оператора Гамильтона зависит от выбора пространства, в котором рассматривается эволюция системы. Предположим, что эволюция возмущенной системы происходит в *пространстве решений невозмущенного уравнения* и возмущение не выводит кварк из синглетного состояния. В этом случае для того чтобы получить выражение для $\Delta\varepsilon$, необходимо лишь усреднить массовый оператор по состоянию (8). В результате приходим к следующему равенству:

$$\Delta\varepsilon = \frac{5\pi^2\sqrt{2}}{18}\, ig^2|\theta|^{-1}\left(p_0 - \varkappa|\mathbf{p}|\right) = 0.$$

Следует подчеркнуть, что этот результат выполняется тождественно для любых значений импульса $\mathbf{p} = (p^1, p^2)$, не равных нулю. Таким образом, в пространстве решений невозмущенного уравнения фермионы остаются безмассовыми и в однопетлевом приближении.

Возмущенный оператор Гамильтона можно рассматривать и в полном пространстве представления решений. Применять обычный метод теории возмущений в этом случае уже нельзя, так как базис из решений для невозмущенного оператора не является полным, однако, непосредственно решая уравнение Шрёдингера с возмущенным оператором Гамильтона, можно найти возмущение спектра (7):

$$\Delta\varepsilon_s = 0 \quad (s = 1,\, 2),$$

$$\Delta\varepsilon_s = \pm\frac{\sqrt{2}}{18}\,\frac{\pi^2 g^2\,|\theta|}{|\mathbf{p}|}\left(\sqrt{3} + 10i\right) \quad (s = 3,\, 4).$$

Рассмотрим более подробно структуру гамильтониана в пространстве решений невозмущенного уравнения. Для этого перейдем к новому базису, в котором оператор будет диагональным на пространстве решений невозмущенного уравнения. В качестве двух базисных элементов можно выбрать собственные векторы невозмущенного гамильтониана (8), а два других базисных элемента (для выполнения условия полноты базиса в полном пространстве состояний) получить как собственные векторы оператора Гамильтона с противоположным знаком параметра λ. Действительно, следующий набор векторов:

$$\begin{aligned} e_1 &= \psi(\varkappa, \lambda), & e_2 &= \psi(-\varkappa, \lambda), \\ e_3 &= \psi(\varkappa, -\lambda), & e_4 &= \psi(-\varkappa, -\lambda) \end{aligned} \tag{9}$$

образует ортонормированный базис. Заметим, что векторы e_3 и e_4 не являются собственными для оператора Гамильтона и выбраны в указанном виде исходя из условия ортогональности первым двум векторам и простоты представления. Таким образом, *физические решения* уравнения Дирака (при $m = \tilde{\theta}$) даже после учета однопетлевой радиационной поправки отвечают безмассовым фермионам. Этот вывод, по-видимому, связан с наличием своеобразной симметрии в множестве решений, включающем решения для фонового поля как с $\lambda > 0$, так и с $\lambda < 0$. Более детальное исследование этой симметрии требует специального рассмотрения.

Литература

1. *Su W.P., Schrieffer J.R., Heeger A.J.* // Phys. Rev. Lett. 1979. **42**. P. 1698.
2. *Von Klitzing K., Dorda G., Pepper M.* // Phys. Rev. Lett. 1980. **45**. P. 494.
3. *Deser S., Jackiw R., Templeton S.* // Ann. of Phys. (N.Y.). 1982. **140**. P. 372.
4. *Jackiw R., Templeton S.* // Phys. Rev. 1981. **D23**. P. 2291.
5. *Клименко К.Г.* // ТМФ. 1992. **92**. С. 166.
6. *Клименко К.Г.* // ТМФ. 1993. **95**. С. 42; *Вшивцев А.С., Клименко К.Г., Татаринцев А.В.* // Ядерная физика. 1996. **59**. С. 367.
7. *Carroll S.M., Field G.B., Jackiw R.* // Phys. Rev. 1990. **D41**. P. 1231.
8. *Соколов А.А., Тернов И.М., Жуковский В.Ч., Борисов А.В.* Калибровочные поля. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1986.
9. *Жуковский В.Ч., Песков Н.А.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2000. № 1. С. 62 (Moscow University Phys. Bull. 2000. No. 1. P. 75).
10. *Коган Я.И.* // Письма в ЖЭТФ. 1990. **51**. С. 496; *Kogan Yan I., Polyubin I.V.* // Phys. Lett. 1990. **B252**. P. 237.
11. *Jackiw R., Rebbi C.* // Phys. Rev. 1976. **D13**. P. 3398.
12. *Hasenfratz P., t'Hooft G.* // Phys. Rev. Lett. 1976. **36**. P. 1119.
13. *Раджараман Р.* Солитоны и инстантоны в квантовой теории поля. М.: Мир, 1985.

Поступила в редакцию
30.03.01