

АКУСТИКА И МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА

УДК 551.463.21

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ ЧЕРЕЗ
СЛАБО ПРЕЛОМЛЯЮЩУЮ ПЛОСКУЮ НЕОДНОРОДНОСТЬ

С. Н. Сергеев, А. С. Шуруп

(кафедра акустики)

E-mail: sergeev@phys.msu.ru

В работе рассматривается распространение цилиндрической волны через слабую неоднородность (отсутствует рассеяние назад) с плоскими границами. Найдено удобное представление поля в виде разложения по плоским волнам с целью решения прямой задачи и дальнейшего его использования в акустической томографии океана в волновой постановке. Важным достоинством полученных результатов является простота основных соотношений и возможность их непосредственного применения для расчета акустических полей в океанических волноводах.

Необходимость описания процесса распространения волны через рефракционную неоднородность возникает в различных проблемах волновой физики, например при решении прямой задачи, необходимой для методов акустической томографии океана. Хорошо известно решение задачи о рассеянии плоской волны на неоднородности с плоскими границами, для которой коэффициенты прохождения и отражения легко рассчитываются. В случае когда геометрическая форма волнового фронта не совпадает с формой границы рассеивателя, задача перестает быть столь тривиальной и требует дополнительного исследования. Известно, например, точное решение задачи рассеяния плоской волны на цилиндрической неоднородности с жесткими или, наоборот, мягкими границами [1].

С практической точки зрения важной является задача рассеяния цилиндрических волн на плоской границе. Актуальность этой задачи определяется тем, что в однородном океане за счет наличия верхней и нижней границ или наличия подводного звукового канала реализуется волноводное распространение звука, что позволяет рассматривать волну, испускаемую точечным источником, как набор цилиндрических волн, связанных с дискретным спектром собственных функций волновода.

Настоящая работа рассматривает рассеяние цилиндрической волны на слабо преломляющей неоднородности в виде плоского слоя (полоски). В качестве такой неоднородности может выступать область со скоростью звука, несколько отличной от скорости звука в окружающих областях. Отражение от такой области практически отсутствует, а рассеяние в ней слабо искажает исходное поле, что позволяет считать ее слабым рассеивателем. Сложность задачи о прохождении цилиндрической волны через полоску обусловлена различием между геометрией фронта волны и формой границы. Реализованный ниже метод позволяет решить эту задачу достаточно

просто, но является приближенным, поэтому требуется оценка его точности.

В предлагаемом методе задача решается путем разложения падающей волны на плоские волны. Подобный подход был использован в работе Л. М. Бреховских [2] при исследовании задачи об отражении и преломлении сферической волны на плоской границе раздела двух сред.

Применительно к задаче распространения звука океан будет рассматриваться как горизонтально стратифицированный, в силу чего задача становится двумерной. Как известно, двумерная функция Грина $g(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0, \omega)$ в уравнении Гельмгольца однородного пространства, которая и описывает распространение цилиндрической волны в предположении временной зависимости поля $\sim e^{+i\omega t}$, имеет вид

$$g(k_0 R) = -\frac{i}{4} H_0^{(2)}(k_0 R),$$

где $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|$ — расстояние между источником с радиус-вектором $\mathbf{r}_0 = \{x_0, y_0\}$ и точкой наблюдения $\mathbf{r} = \{x, y\}$; $k_0 = \omega/c_0$ — волновое число, c_0 — скорость звука.

Непосредственное применение разложения функции Ганкеля на плоские волны [1]

$$H_0^{(2)}(k_0 R) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{i\infty} e^{-ik_0 R \cos \theta} d\theta$$

не является удобным для рассматриваемого метода, так как представляет собой разложение только по волнам с комплексными углами распространения, теория отражения и преломления которых усложняет рассмотрение. Поэтому удобнее воспользоваться интегральным представлением функции Грина, имеющим вид [1]

$$g(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\mathbf{k}_1(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)} dk_{1x} dk_{1y}}{k_1^2 - k_0^2} \frac{1}{4\pi^2},$$

$$\mathbf{k}_1 = \{k_{1x}, k_{1y}\}, \quad k_1 = |k_1|.$$

При взятии интеграла по k_{1y} используется метод контурного интегрирования. При этом в значения k_{1x} и k_{1y} вводятся небольшие мнимые части, то есть предполагается наличие затухания. В итоге функция Грина принимает вид

$$g(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{i e^{-i[k_{1x}(x-x_0) + \sqrt{k_0^2 - k_{1x}^2}(y-y_0)]}}{\sqrt{k_0^2 - k_{1x}^2}} dk_{1x},$$

$$k_{1y} = \sqrt{k_0^2 - k_{1x}^2}. \quad (1)$$

В этом разложении присутствуют распространяющиеся и неоднородные волны. Поскольку неоднородные волны достаточно быстро затухают, можно предположить, что если их отбросить и учитывать только обычные плоские волны, волновые векторы которых лежат на окружности Эвальда ($k_1^2 = k_0^2$), что и предполагалось при выводе (1), то будет получено достаточно точное приближение для искомой функции Грина на некотором расстоянии от источника.

При численной реализации такого приближения, где используется разложение цилиндрической волны на плоские волны, предполагается, что точечный источник находится в центре координат ($\mathbf{r}_0 = 0$), а точка наблюдения определяется вектором \mathbf{r} с координатами $x = R \cos \beta$, $y = R \sin \beta$. Волновой вектор \mathbf{k}_1 суммируемых плоских волн задается текущим углом α и имеет компоненты $k_{1x} = k_0 \cos \alpha$, $k_{1y} = k_0 \sin \alpha$. В этих обозначениях плоская волна единичной амплитуды, распространяющаяся под углом α , имеет вид

$$e^{-i\mathbf{k}_1\mathbf{r}} = e^{-ik_0 R \cos(\alpha - \beta)}.$$

Согласно формуле (1), рассчитываемое поле (с точностью до множителя $-i/4$) в точке $\{R, \beta\}$ может быть представлено в виде

$$U(R, \beta, N) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^N e^{-ik_0 R \cos(n\pi/N - \beta)} \Delta\alpha \quad (2)$$

с шагом дискретизации $\Delta\alpha = \pi/N$. Поскольку неоднородность считается слабой, при суммировании не учитываются плоские волны, распространяющиеся в обратном направлении, т.е. волны с углами α от π до 2π . При расчете полей угол β задается далее в интервале от $\pi/2 - \pi/N$ до $\pi/2 + \pi/N$, так как при этом расходящиеся волны соответствуют аргументу функции \cos в формуле (2), находящемуся в интервале от $-\pi/2$ до $\pi/2$.

Достоинством данного приближения является его простота. Кроме этого, согласно (2) цилиндрическая волна представляется в виде суммы плоских волн, распространяющихся под различными углами, теория отражения и преломления которых хорошо известна.

В однородной среде, т.е. в отсутствие каких-либо неоднородностей, разложение поля по предлагаемому методу в ряд (2) легко сравнивается с истинным значением, даваемым функцией Ганкеля, что может быть использовано для оценки точности предлагаемого метода. Сравнение проводилось непосредственно численным образом. Для этого рассматривались значения волны вплоть до расстояния $R = 30\lambda_0$ от источника (λ_0 — длина волны в однородной среде). В разложении суммировалось $N = 500$ волн, угол направления на точку наблюдения полагался равным $\beta = \pi/2$. Рассогласование модулей сравниваемых величин представлено на рис. 1. Точность

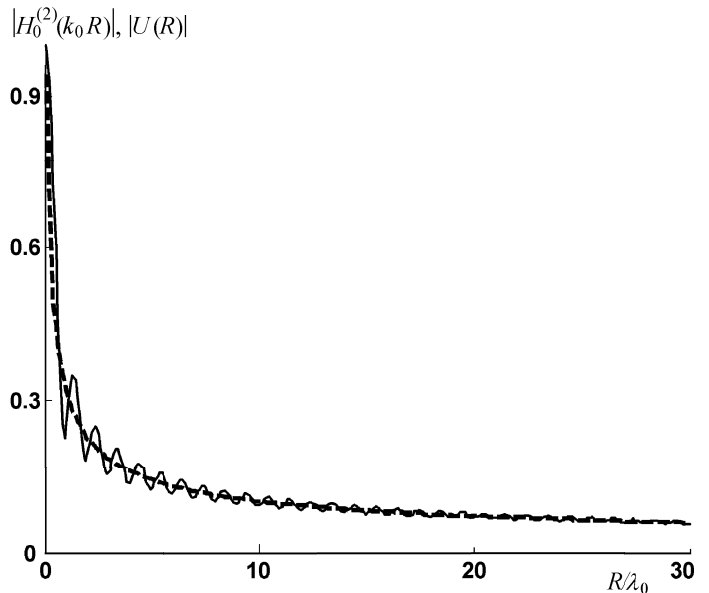


Рис. 1. Зависимость модулей функции Ганкеля (пунктирная линия) и ее приближения функцией $U(R, \beta, N)$ (сплошная линия) от расстояния при количестве суммируемых плоских волн $N = 500$ и угле на точку приема $\beta = \pi/2$

предлагаемого метода определяется тем, насколько хорошо ряд (2) приближается к функции $H_0^{(2)}(k_0 R)$. Для оценки точности рассчитывалась погрешность по формуле

$$\varepsilon(R, \beta, N) = \frac{|H_0^{(2)}(k_0 R) - U(R, \beta, N)|}{|H_0^{(2)}(k_0 R)|}. \quad (3)$$

Интерес представляет вопрос о том, насколько хорошо рассматриваемое приближение работает в зависимости от расстояния R между источником и точкой наблюдения и количеством суммируемых членов N в ряду (2).

Из рис. 2, где приведена зависимость погрешности (3) от расстояния при фиксированных значениях $\beta = \pi/2$ и разных N (150, 200 и 500), видно, что при $R > 10\lambda_0$ погрешность составляет $\sim 10\%$. Такая погрешность приводит к необходимости оценки величины остаточного (неучитываемого) члена нашего приближения, что делалось следующим образом. В случае выбора значения угла на приемник

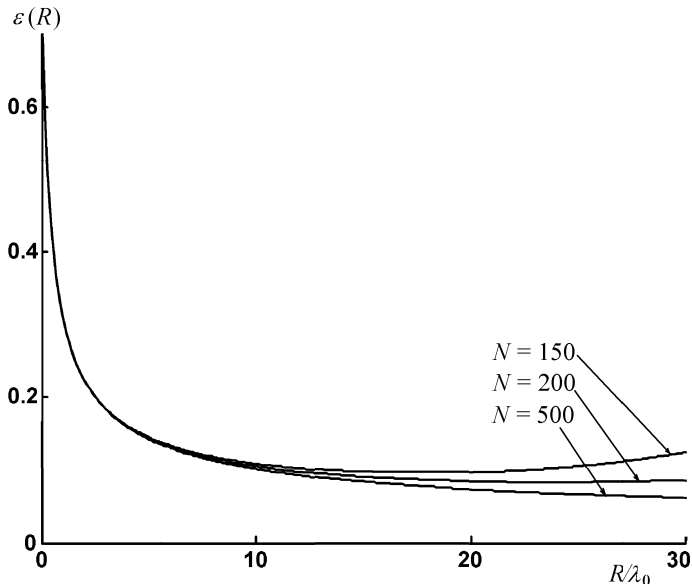


Рис. 2. Зависимость поведения ошибки приближения $\varepsilon(R, \beta, N)$ от расстояния при значении угла на точку приема $\beta = \pi/2$ для разного количества суммируемых плоских волн N

$\beta = \pi/2$ при $N \rightarrow \infty$ интегральное представление рассматриваемого приближения принимает вид

$$U(R) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} e^{-ik_0 R \sin \alpha} d\alpha. \quad (4)$$

С другой стороны, известно интегральное представление функции Ганкеля [3]

$$H_0^{(2)}(k_0 R) = \frac{1}{\pi} \int_G e^{-ik_0 R \sin \alpha} d\alpha, \quad (5)$$

где контур интегрирования G представлен на рис. 3. Если полагать, что в (5) величина α представляет собой угол, под которым распространяются суммируемые плоские волны, то, сравнивая выражение для рассматриваемого приближения (4) с выражением для полного поля (5), можно сделать вывод о величине остаточного члена. Рассматриваемое приближение заключается в пренебрежении членами, получаемыми при интегрировании вдоль лучей $[\pi; \pi + i\infty)$ и $(-i\infty; 0]$. Аналитическое выражение для отброшенного остатка имеет вид

$$\Delta U(R) = \frac{2i}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-k_0 R \operatorname{sh} \alpha} d\alpha.$$

Для проверки величина $\Delta U(R)$ складывалась с $U(R)$, что приводило к истинному значению функции Ганкеля. Так, на рис. 4 представлена зависимость погрешности от количества суммируемых волн при фиксированных значениях $\beta = \pi/2$, $R = 20\lambda_0$. Видно, что для заданного расстояния погрешность стремится к определенному значению, что и определяет точность предлагаемого метода. На этом же рисунке приведена зависимость погрешности от количества суммируемых волн при учете остаточ-

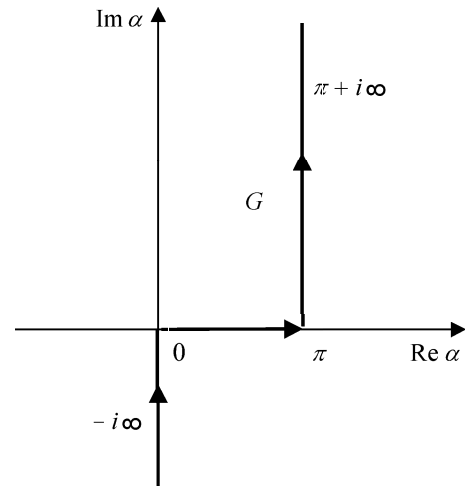


Рис. 3. Контур интегрирования, используемый при вычислении функции $H_0^{(2)}(k_0 R)$

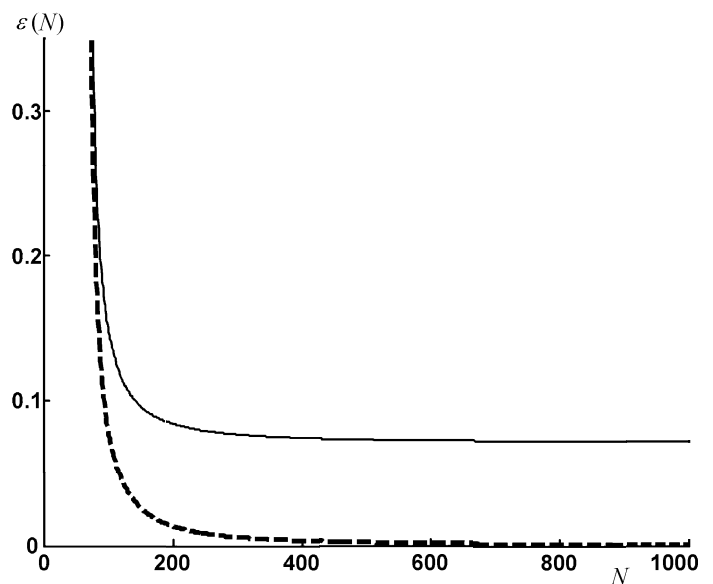


Рис. 4. Зависимость погрешности рассматриваемого приближения $\varepsilon(R, \beta, N)$ от количества суммируемых плоских волн при расстоянии между источником и приемником $R = 20\lambda_0$ и значении угла на точку приема $\beta = \pi/2$ (сплошная линия); то же при учете отброшенных членов (пунктирная линия)

ного члена. При этом, как и следовало ожидать, увеличение количества N суммируемых волн ведет к уменьшению погрешности до нуля. Тем самым устанавливается взаимно-однозначная зависимость между расстоянием от источника до приемника и количеством суммируемых волн, делающая представление поля предлагаемым методом наиболее близким к его истинному значению.

Следует также заметить, что при дальнейшем увеличении расстояния от источника до приемника для сохранения малости погрешности необходимо увеличивать количество суммируемых волн (рис. 2), так как с увеличением радиуса цилиндрической волны для описания кривизны ее фронта требуется большее количество плоских волн.

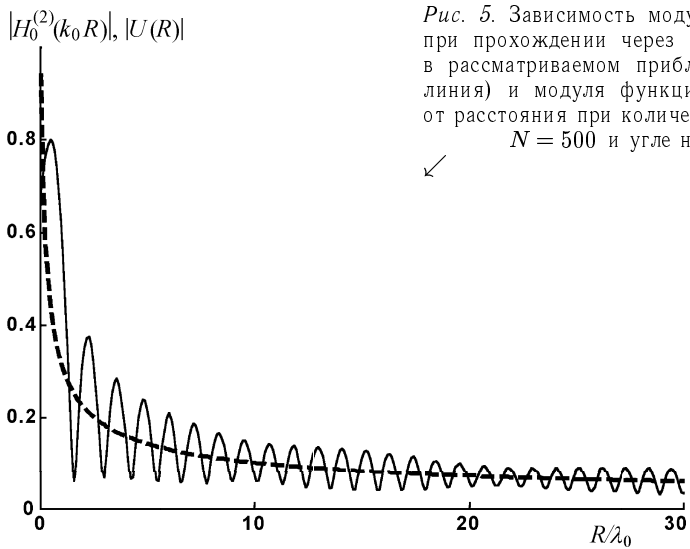


Рис. 5. Зависимость модуля поля цилиндрической волны при прохождении через неоднородность в виде полоски в рассматриваемом приближении $U(R, \beta, N)$ (сплошная линия) и модуля функции Ганкеля (пунктирная линия) от расстояния при количестве суммируемых плоских волн $N = 500$ и угле на точку приема $\beta = \pi/2$

В качестве примера конкретного применения полученных результатов рассчитывалось поле цилиндрической волны в присутствии слабой рефракционной неоднородности в виде полоски. Полоска представляет собой вертикальный слой в океане со значением скорости звука, отличным от значения c_0 в остальном океане. При численном моделировании предполагалось, что скорость звука в рассматриваемой неоднородности на 1% меньше фонового значения. Толщина полоски составляла $3\lambda_0$, и эта неоднородность располагалась перпендикулярно лучу,

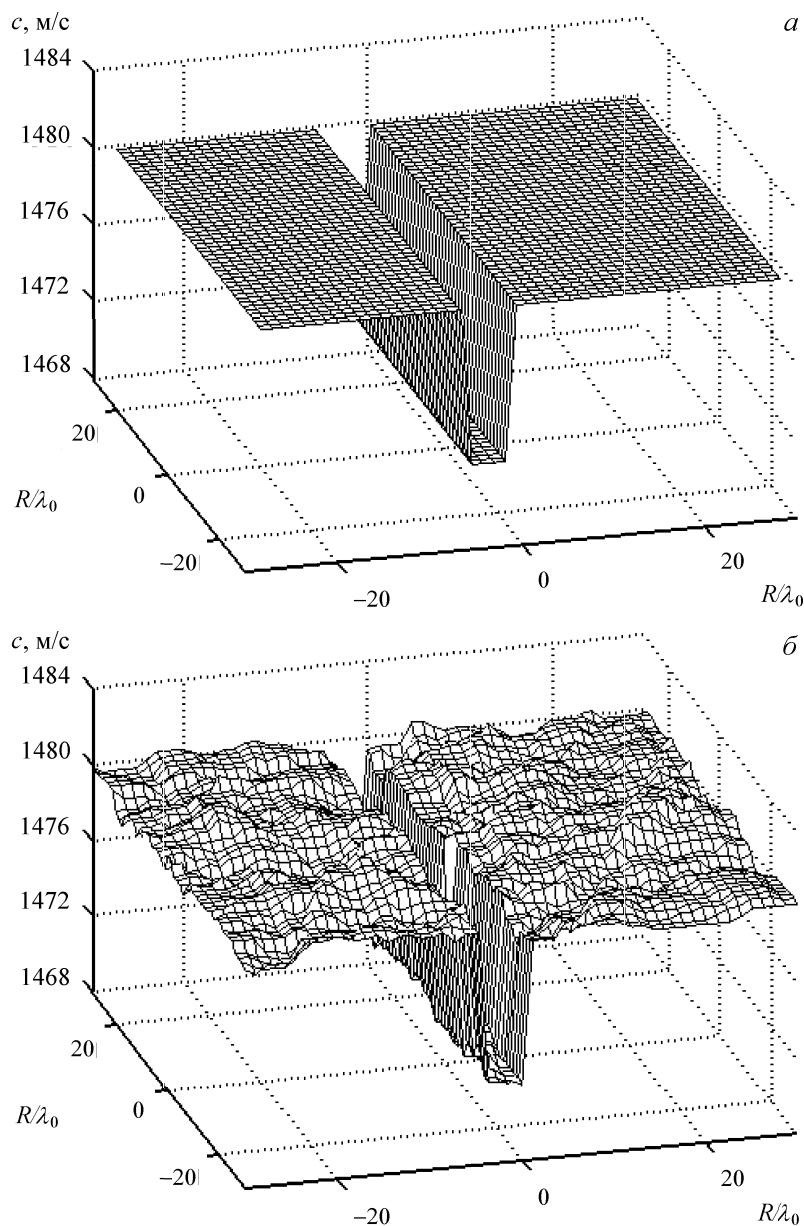


Рис. 6. Модельное распределение по акватории неоднородности скорости звука в виде слоя (а) и результаты ее восстановления (б)

соединяющему источник с приемником. Зависимость поведения модуля полученного решения от расстояния между источником и приемником при количестве суммируемых волн $N = 500$ показана на рис. 5. На указанном рисунке приведена также зависимость от расстояния модуля функции $H_0^{(2)}(k_0 R)$. Найденное возмущение поля, внесенное подобными полосками, может быть использовано для решения методами теории возмущений как прямых задач рассеяния, так и задач восстановления параметров рефракционной неоднородности в акустической томографии океана.

Так, например, полученные результаты использовались авторами для восстановления рефракционной неоднородности с использованием томографической схемы, описанной в [4]. В качестве численной модели рассматривалась акватория диаметром $\sim 60\lambda_0$, равномерно окруженная по периметру набором из 22 приемо-передающих систем. Рассматривалось восстановление рефракционной неоднородности в форме слоя толщиной $\sim 5\lambda_0$, расположенного вдоль оси абсцисс. Значение скорости в возмущенной области полагалось на $\sim 0.5\%$ меньше фонового значения, равного 1480 м/с. Важно, что ориентация этого слоя отличалась от ориентации базисных по-

лосок. Модельное распределение скорости звука по акватории и результаты восстановления рассматриваемой неоднородности представлены на рис. 6, а и б соответственно.

Авторы выражают глубокую благодарность профессору кафедры акустики физического факультета МГУ Валентину Андреевичу Бурову за ценные советы при многократных обсуждениях результатов работы.

Настоящая работа выполнена при поддержке гранта Президента РФ № НШ-1575.003.2 и РФФИ (грант 04-02-16043).

Литература

1. Скучик Е. Основы акустики. М., 1976.
2. Бреховских Л.М. Волны в слоистых средах. М., 1973. С. 155.
3. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М., 1966. С. 648.
4. Буров В.А., Сергеев С.Н., Шуруп А.С. // Докл. X школы-семинара акад. Л. М. Бреховских «Акустика океана», совмещенной с XIV сессией Российского акустического общества. 25–28 мая 2004. Москва. С. 193.

Поступила в редакцию
18.02.04