На правах рукописи

Чжан Е

Методы решения линейных некорректных задач с априорной информацией и оценка погрешностей

01.01.03 — Математическая физика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2014

Работа выполнена на кафедре математики физического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

Научный руководитель	доктор физико-математических наук, профессор Ягола Анатолий Григорьевич
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор Леонов Александр Сергеевич, Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»
	доктор физико-математических наук, гл.н.с. Инна Эдуардовна Степанова, Институт физики Земли им. О.Ю. Шмидта Российской академии наук
Ведущая организация	Российский университет дружбы народов (РУДН)

Защита состоится 20 февраля 2014 г. в 16:30 часов на заседании диссертационного совета Д 501.002.10 при Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова по адресу: 119991, г. Москва, ГСП-1, Ленинские горы, МГУ, д. 1, стр. 2, физический факультет, СФА.

С диссертацией можно ознакомиться в фундаментальной библиотеке МГУ.

Автореферат разослан «   » января 2014 г.

Ученый секретарь диссертационного совета, профессор — Поляков П. А.

Общая характеристика работы

Диссертационная работа посвящена некоторым новым методам решения некорректно поставленных обратных задач математической физики с использованием априорной информации о решении и оценке погрешности приближённого решения, которое может быть получено с помощью этих методов.

В работе строится регуляризирующий алгоритм решения линейных некорректно поставленных обратных задач на множестве ограниченных кусочно-выпуклых функций — метод точек перегиба (МТП), и строится оценка погрешности приближённого решения.

В работе также исследуется теория оптимальной регуляризации на ограниченных выпуклых и уравновешенных множествах. Строится так называемый поточечный псевдооптимальный регуляризирующий алгоритм решения линейных некорректно поставленных обратных задач и получается псевдооптимальная (поточечная и общая) апостериорная оценка погрешности решения. С помощью этого алгоритма решается одномерное (а также двумерное) линейное операторное уравнение в общем виде с некоторой априорной информацией о решении.

Актуальность темы Многие современные задачи математической физики являются обратными задачами, которые могут быть представлены в виде операторного уравнения

$$Az = u, \quad z \in Z, \quad u \in U, \tag{1}$$

где Z – пространство решений, а U – пространство измерений. Физический смысл z, A и u следующий: z – искомая физическая характеристика исследуемого объекта, A – оператор, определяющий преобразование искомого решения z в результат измерений u. Большинство обратных задач заключается в том, что даны неточные правая часть и оператор, и нужно найти приближённое решение, хорошо аппроксимирующее точное.

Большинство обратных задач, к которым сводятся прикладные задачи математической физики, являются некорректно поставленными. По определению Адамара корректной (корректно поставленной) задачей называется любая задача, у которой решение: (а) существует, (б) единственно и (в) непрерывно зависит от входных данных. А все остальные задачи Адамар называл некорректными (некорректно поставленными). Другими словами, некорректной считалась задача, у которой нарушается хотя бы одно из трёх приведённых выше свойств.

Российским математиком А. Н. Тихоновым в 60-х годах прошлого века была заложены основы теории решения некорректных задач. Им же был предложен регуляризирующий алгоритм, основанный на вариационном подходе. Позже возник ряд других регуляризирующих алгоритмов, например: итерационные, спектральные и т.д.

В настоящее время двумя важными направлениями исследований в этой области являются:

1) поиск хотя бы одного регуляризирующего алгоритма, с помощью которого можно решить поставленную практическую задачу;

2) поиск так называемого оптимального (в некотором смысле) регуляризирующего алгоритма, который позволит получить наилучшее (в том же смысле) решение, а также, если это возможно, оценить его погрешность.

В диссертационной работе проведена работа по этим обоим направлениям.

1) Решена задача восстановления функции распределения размеров частиц аэрозоля в атмосфере.

   Известно, что характеристики частиц аэрозоля, которые могут быть описаны функцией распределения размеров частиц, играют очень важную роль в задачах моделирования климата. Был разработан новый регуляризирующий алгоритм, который использует априорную информацию о свойствах искомого решения и позволяет решить эту задачу, а также оценить погрешность решения.

2) Решена задача построения псевдооптимального (оптимального в некотором смысле) регуляризирующего алгоритма. Эта задача непосредственным образом связана с задачей оптимальной оценки погрешности решения, полученного с помощью этого регуляризирующего алгоритма. Как известно, для большинства обратных задач математической физики (которые являются некорректно поставленными) невозможно оценить погрешность решения, но в ряде случаев возможно введение такого множества априорных ограничений (накладываемых на решение, исходя из его физических свойств), что возможно выполнить конечную, так называемую апостериорную, оценку погрешности решения. В этом случае можно построить метод решения задачи, апостериорная погрешность решения которой с помощью этого метода является наименьшей для всех возможных решений, полученных различными методами. Т.е. решение линейной некорректно поставленной обратной задачи будет заключаться в построении и применении псевдооптимального регуляризирующего алгоритма.

Цель работы

1) Создание регуляризирующего алгоритма решения некорректно поставленных обратных задач математической физики на множестве ограниченных кусочно-выпуклых функций, а также оценка погрешности полученного приближённого решения.

2) Создание поточечного псевдооптимального регуляризирующего алгоритма решения линейных некорректно поставленных обратных задач математической физики на ограниченных выпуклых и уравновешенных множествах и алгоритма вычисления псевдооптимальной апостериорной оценки погрешности решения, полученного с помощью этого алгоритма и метода расширяющихся компактов.

Положения, выносимые на защиту

1) Метод точек перегиба для решения линейных некорректно поставленных обратных задач математической физики с априорной информацией о принадлежности решения к множеству ограниченных кусочно-выпуклых функций и способ оценки погрешности полученного приближённого решения.

2) Численный метод и соответствующий программный комплекс решения прикладной обратной задачи (восстановления функции распределения размеров частиц аэрозоля в атмосфере) с помощью метода точек перегиба.

3) Метод построения поточечного псевдооптимального регуляризирующего алгоритма и способ вычисления псевдооптимальной (поточечной и общей) апостериорной оценки погрешности приближённого решения, полученного с помощью этого метода.

4) Многошаговые алгоритмы и соответствующие программные комплексы решения обратной задачи для уравнения теплопроводности и задачи восстановления истинного изображения по дефокусированному.

Научная новизна

Автором впервые был создан метод точек перегиба и поточечный псевдооптимальный регуляризирующий алгоритм решения линейных некорректно поставленных обратных задач математической физики на некоторых специальных множествах и построены методы оценки погрешности полученных приближённых решений.

Теоретическая и практическая значимость

Результаты, полученные в диссертации, могут быть применены как для решения рассмотренных в диссертационной работе задач математической физики (задача восстановления функции распределения размеров частиц аэрозоля в атмосфере, обратная задача для уравнения теплопроводности, задача восстановления истинного изображения по дефокусированному), так и для решения многих других прикладных линейных некорректно поставленнных обратных задач. Среди задач математической физики отметим обратные задачи механики, задачи томографии, обратные задачи астрофизики, обратные задачи геофизики, задачи спектроскопии, обратные задачи линейной оптики, обратные задачи линейной акустики, обратные задачи радиофизики, задачи исследования материалов и дефектов в них, задачи обработки изображений. Описанные в работе методы решения применимы к линейным обратным некорректно поставленным задачам, встречающимся в перечисленных областях.

Личный вклад автора

Основные результаты, полученные в данной диссертационной работе, были впервые получены автором. Постановка математической задачи и анализ научных результатов проводились под руководством А. Г. Яголы и при совместном обсуждении с Д. В. Лукьяненко. Постановка задачи восстановления функции распределения размеров частиц аэрозоля в атмосфере проводилась совместно с Янфей Ваном из Института геологии и геофизики Китайской академии наук. Основное содержание диссертационной работы и её результатов полностью отражено в девяти научных публикациях автора. В материалах совместных публикаций личный вклад автора является определяющим.

Апробация работы

Основные результаты диссертационной работы были представлены: на международной конференции «The Second International Workshop on Computational Inverse Problems and Applications» (Китай, Пекин, 12–15 июля 2010 года, Институт геологии и геофизики Китайской Академии Наук); на научном семинаре «Обратные задачи математической физики» под руководством А. Б. Бакушинского, А. В. Тихонравова и А. Г. Яголы, проводящемся в НИВЦ МГУ (28 марта 2012 года и 11 декабря 2013 года); на международной конференции «4th International conference on «Function spaces. Differential operators. General topology. Problems of mathematical education» » (Москва, 25–29 марта 2013 года, РУДН); на международной конференции «4th International Symposium on «Inverse problems, Design and Optimization Symposium» » (Франция, Альби, 26–28 июня 2013 года); на международной конференции «The Third International Workshop on Computational Inverse Problems and Applications» (Китай, Нанчанг, 8–12 июля 2013 года, Восточно-китайский технологический институт); на международной конференции «Методы создания, исследования и идентификации математических моделей» (Новосибирск, Академгородок, 10–13 октября 2013 года); на международной конференции «Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач» (Новосибирск, Академгородок, 8–13 октября 2013 года); на научном семинаре кафедры математики физического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова под руководством профессора В. Ф. Бутузова (4 декабря 2013 года).

Публикации

По теме диссертации опубликовано 9 работ, из которых 3 статьи в рецензируемых печатных научных журналах [1–3] и 6 тезисов конференций [4–9]. В журналах из списка ВАК опубликовано 3 статьи [1–3].

Структура работы

Диссертация состоит из введения, двух глав, заключения и списка литературы (74 наименования). Общий объем работы составляет 122 страниц.

Краткое содержание работы

В ПЕРВОЙ ГЛАВЕ рассматривается теория регуляризации на множестве ограниченных кусочно-выпуклых функций и построен метод точек перегиба для задач, численное решение которых сводится к необходимости решать недоопределённые системы линейных алгебраических уравнений (в диссертационной работе в качестве примера применения разработанного метода приведено решение задачи восстановления функции распределения размеров частиц аэрозоля в атмосфере) и переопределённые системы линейных алгебраических уравнений (в диссертационной работе в качестве примера приведено решение интегрального уравнения с ядром функции Грина).

Если предположить, что частицы аэрозоля в атмосфере можно описать шаровыми частицами, показатели преломления вещества которых известны, то соотношение между оптической толщиной рассеяния аэрозолем излучения с определённой длиной волны и функцией распределения размеров частиц можно описать в интегральном виде:

$$\tau_{aero}(\lambda) = \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty \pi r^2 Q_{ext}(r, \lambda, \eta)\, n(r, z)\, dz dr. \tag{2}$$

Здесь $n(r, z)\, dz$ – функция плотности частиц аэрозоля с радиусами частиц, лежащими в интервале между r и $r+dr$, на высоте z, $Q_{ext}(r, \lambda, \eta)$ – эффективный фактор поглощения излучения с определенной длиной волны частицами аэрозоля по теории Ми, η – комплексный показатель преломления, λ – длина волны излучения, τ_{aero} – измеряемая с помощью фотометра величина оптической толщины рассеяния аэрозоля. Пусть $n(r) = \int_0^\infty n(r, z)\, dz$, уравнение (2) можно переписать в виде:

$$\tau_{aero}(\lambda) = \int\limits_0^\infty \pi r^2 Q_{ext}(r, \lambda, \eta)\, n(r)\, dr. \tag{3}$$

В этом случае $n(r)$ играет роль функции плотности частиц аэрозоля радиуса r в вертикальном сечении атмосферы. Она показывает, что в единичном объёме атмосферы находится $n(r)\, dr$ частиц аэрозоля с радиусами, распределёнными в интервале между r и $r + dr$. Кроме того, практический интерес представляют частицы с радиусом, заключенным в интервале $[0.1, 2.0]$ мкм.

Функцию распределения размеров частиц аэрозоля $n(r)$ обычно определяют как произведение функций $h(r)$ и $f(r)$, где $h(r)$ – быстро убывающая функция, $f(r)$ – медленно меняющаяся функция. Исходя из того, что большинство измерений функции распределения размеров частиц аэрозоля над континентами показывают, что эти функции могут быть описаны юнговским распределением $h(r) = r^{-(v^*+1)}$ (v^* – константа формы частицы, которые обычно имеют характерный размер $[0.1, 4.0]$ мкм), имеет смысл использовать $h(r)$ в виде указанного юнговского распределения с весовым коэффициентом $f(r)$.

На практике в качестве входных данных обычно используют результаты измерения оптической толщины рассеяния аэрозоля только для небольшого числа длин волн ($\{\lambda_j\}_{j=1}^4$), что связано с техническими ограничениями используемых измерительных приборов.

Т.е. на практике получается система из четырёх уравнений

$$\int_{0.1}^2 \pi r^2 Q_{ext}(r, \lambda_j, \eta)\, h(r)\, f(r)\, dr = \tau_{aero}(\lambda_j), \quad j = 1, 2, 3, 4, \tag{4}$$

в результате решения которой необходимо найти непрерывную функцию $f(r)$. Очевидно, что такая задача является некорректно поставленной. Для её решения необходимо построить регуляризирующий алгоритм. Существуют различные регуляризирующие алгоритмы, но в данной работе предлагается новый эффективный регуляризирующий алгоритм (метод точек перегиба) решения поставленной задачи, основанный на минимизации функционала невязки методом сопряжённых градиентов с проекцией на множество ограниченных кусочно-выпуклых функций (исходя из априорной физической информации о поведении решения). Заметим, что в этом методе параметром регуляризации является число и положение точек перегиба.

В диссертации рассматриваются два случая.

Первый случай заключается в том, что априорно известно, что точное решение имеет только одну точку перегиба. Тогда с помощью полного перебора всех возможных точек и метода сопряжённых градиентов с проекцией на множество ограничений определяется положение точки перегиба и находится соответвующее приближённое решение. На основе полученного решения, используя априорную информацию о выпуклости (вверх и вниз), строится так называемые верхнее и нижнее решения, которые задают гарантированный коридор погрешности: $f^l(r)$ и $f^u(r)$.

Второй случай заключается в том, что априорно известно, что точное решение имеет больше одной точки перегиба. В этом случае рассматриваются различные варианты, используя теорию сложности вычислений. В результате, построив метод локального полного перебора, с помощью метода сопряжённых градиентов с проекцией на множество ограничений можно найти приближённое решение исходной задачи (3).

Для проверки разработанных методов была рассмотрена модельная задача. Дана функция распределения размеров частиц аэрозоля (Рис. 1). Положим $v^* = 0.15$, $\eta = 1.45$, уровень погрешности задания оператора и правой части задачи (2) составляет 45% относительно величины точных данных. Количество узлов и уравнений составляет 100 и 4 соответственно. С помощью предложенного метода было получено значение параметра регуляризации метода точек перегиба: $\alpha = (P, \vec{k}) = (3, (25, 49, 74))$ (где P – число точек перегиба, $\vec{k}$ – вектор координат расположения точек перегиба). Если умножить медленно меняющуюся функцию $f(r)$ на быстро убывающую функцию $h(r)$, то получится функция распределения размеров частиц аэрозоля $n(r)$ (Рис. 1, в двойном логарифмическом масштабе).

В случае применения разработанного метода к реальной задаче получается результат, показанный на рисунке 2.

Применение метода точек перегиба к задаче, сводящейся к необходимости решать переопределённую систему линейных алгебраических уравнений, в диссертации рассматривается на примере решения

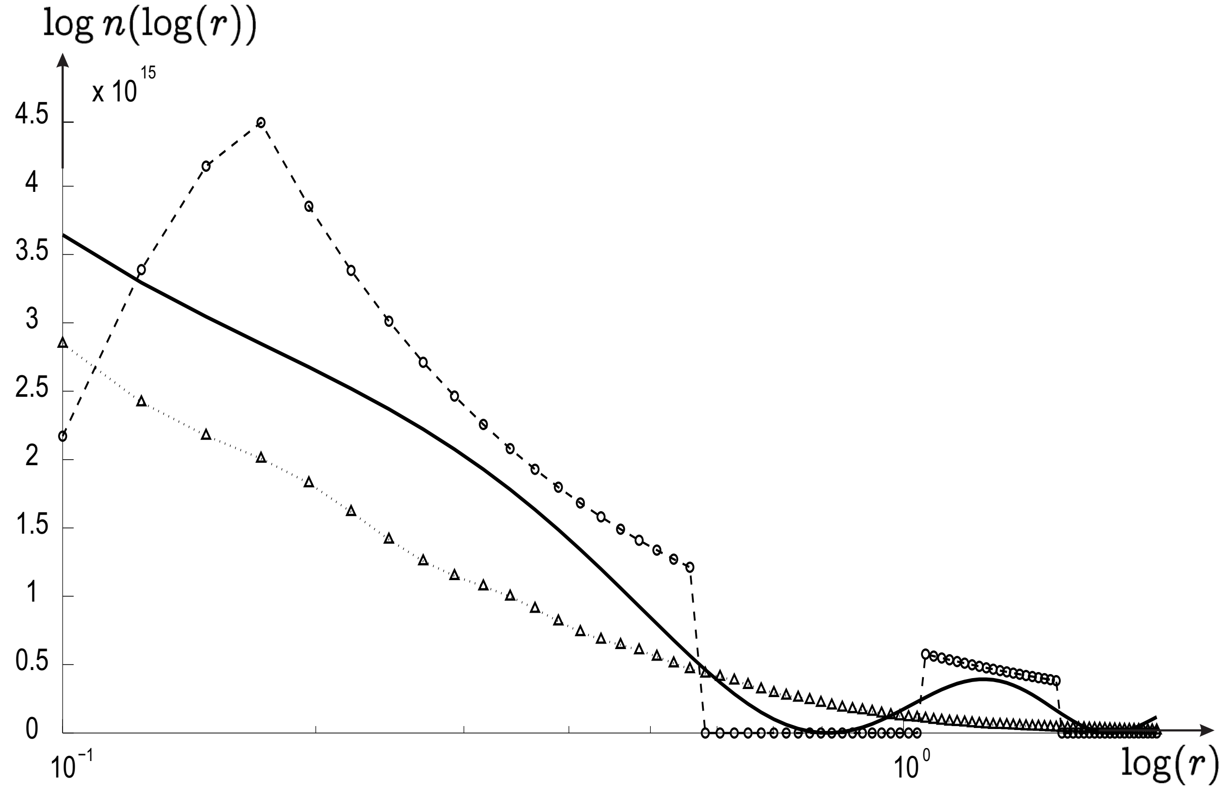

Рис. 1. Зависимость логарифмической функции распределения размеров частиц аэрозоля $\log n(\log(r))$ (единица измерения: $\text{м}^{-2} \cdot \text{мкм}^{-1}$) от логарифмического радиуса частиц аэрозоля $\log(r)$ (единица измерения: мкм) при уровнях погрешностей $h = \delta = 45\%$. Точное решение (—). Приближённое решение по методу А.Н. Тихонова с выбором параметра регуляризации по обобщённому принципу невязки ($\cdot\triangle\cdot$) и методу точек перегиба ($- \circ -$).

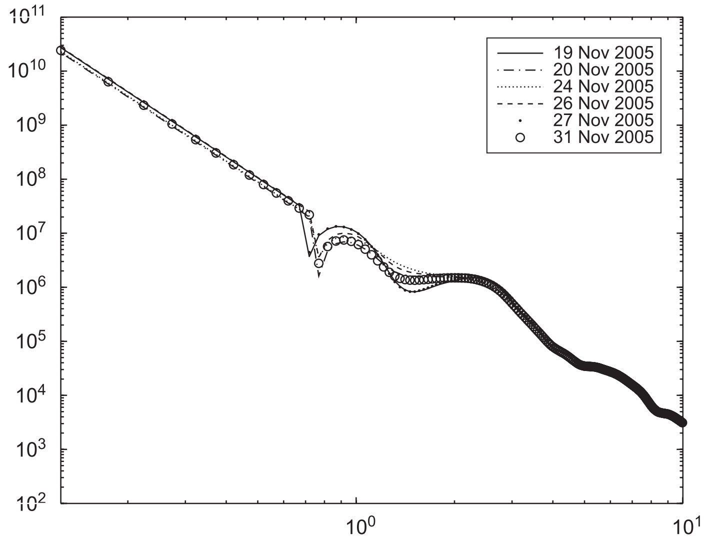

Рис. 2. Применение метода точек перегиба для решения реальной задачи. Результаты: восстановленная логарифмическая функция распределения размеров частиц аэрозоля $\log n(\log(r))$.

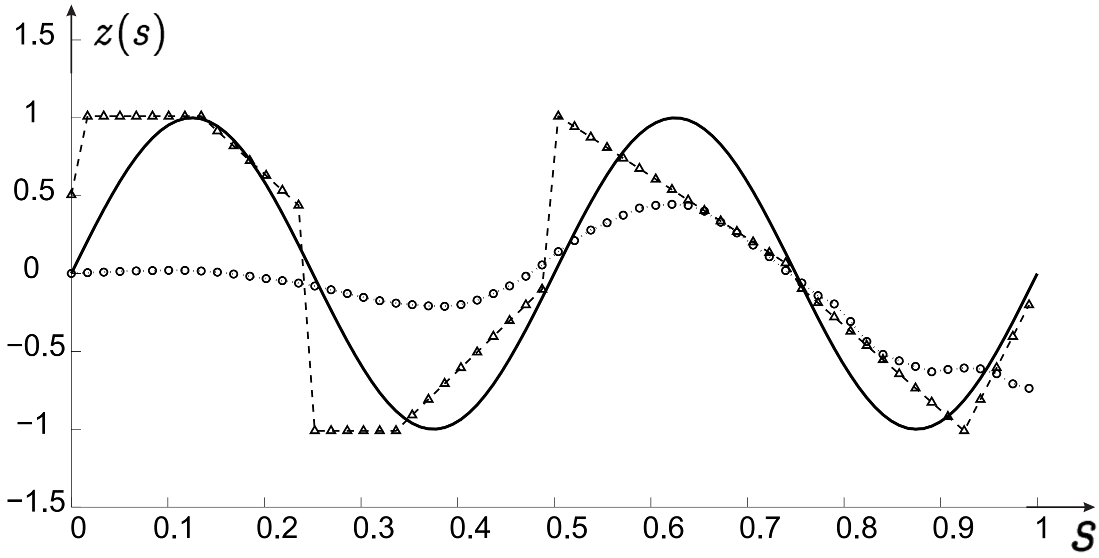

Рис. 3. Сравнение результатов, полученных с помощью различных методов при одинаковом уровне погрешностей входных данных ($\delta = h = 20\%$). Точное решение (—); приближённое решение по методу ОПН ($\cdot\circ\cdot$); приближённое решение по методу МТП ($-\triangle-$).

следующей задачи:

$$\int_0^1 K(x,s)z(s)ds = u(x), \quad z(s) \in L_2[0,1], u(x) \in L_2[0,1],$$

где ядро имеет вид

$$K(x,s) = \begin{cases} x(1-s) & \text{при } x \leqslant s, \\ s(1-x) & \text{при } s \leqslant x. \end{cases}$$

Вместе с методом МТП рассмотрен также и регуляризирующий алгоритм выбора параметра регуляризации по обобщённому принципу невязки (ОПН). На Рис. 3 представлены результаты применения обоих методов для решения поставленной задачи при одинаковых уровнях погрешности.

Во **ВТОРОЙ ГЛАВЕ** описываются методы построения поточечного псевдооптимального регуляризирующего алгоритма решения линейных некорректно поставленных обратных задач математической физики и оценки апостериорной погрешности решения, полученного с помощью этого алгоритма, на основе использования априорной информации о решении.

Пусть $X = [L_x, R_x]$, $Y = [L_y, R_y]$ и $Z := C(X)$, $U := L_2(Y)$, а оператор A: $Z \to U$ – линейный непрерывный инъективный оператор.

Предполагается, что априорная информация о решении $\widetilde{Z}$ является некоторым замкнутым ограниченным выпуклым и уравновешенным множеством в пространстве Z. Рассматривается следующее операторное уравнение:

$$Az = \bar{u}, \quad z \in \widetilde{Z}, \quad \bar{u} \in U. \tag{5}$$

Пусть вместо точно заданных оператора A и правой части $\bar{u}$ известны лишь такие их приближения $\{A_{h_A}, u_\delta\}$, что $\|A - A_{h_A}\|_{Z\to U} \leqslant h_A$ и $\|\bar{u} - u_\delta\|_U \leqslant \delta$. Для многих конкретных операторов A аналитическое решение z операторного уравнения (5) найти невозможно. Поэтому при решении прикладных задач математической физики соответствующее операторное уравнение (5) решается с использованием численных методов, т.е. в качестве решения задачи (5) ищется не сама функция $z(x)$, а её конечномерная аппроксимация $\{z(x_k)\}_{k=1}^K$ (где K – число узлов сетки, на которой ищется неизвестная функция). Далее, с помощью полученной конечномерной аппроксимации строится приближённое непрерывное решение задачи (5), и доказывается сходимость этого приближенного непрерывного решения в пространстве $Z(\equiv C(X))$.

Сначала рассматривается задача восстановления значения функции $z(x)$ в конкретной точке x_k (узле k).

Определение 1 *Методом восстановления значения функции $z(x)$ в точке x_k (по информации $\widetilde{Z}$) называется любой функционал $u^*\colon U \to \mathbb{R}^1$, а погрешностью восстановления с помощью метода u^* называется величина*

$$\Delta_0(x_k, \widetilde{Z}, \varepsilon, u^*) := \sup_{\substack{z\in\widetilde{Z},\\ \forall\, u\in U:\, \|A_{h_A}z-u\|\leqslant\varepsilon}} \big|z(x_k) - u^*(u)\big|, \tag{6}$$

где $\varepsilon := \delta + h_A \cdot \sup_{z\in\widetilde{Z}} \|z\|_Z$. Оптимальной погрешностью восстановления значения функции $z(x)$ в точке x_k называется величина

$$\Delta_1(x_k, \widetilde{Z}, \varepsilon) := \inf_{u^*} \Delta_0(x_k, \widetilde{Z}, \varepsilon, u^*), \tag{7}$$

где точная нижняя грань берётся по всем функционалам $u^*\colon U \to \mathbb{R}^1$. Функционал $\hat{u}^*$, на котором эта точная нижняя грань достигается, называется оптимальным методом восстановления значения функции $z(x)$ в точке x_k.

По теореме Рисса об общем виде линейного непрерывного функционала и теореме Смоляка предыдущую постановку (6)–(7) экстремальной задачи можно переписать в следующем виде:

$$\Delta_1(x_k, \widetilde{Z}, \varepsilon) = \inf_{\lambda\in U} \sup_{\substack{z\in\widetilde{Z},\\ \forall u\in U:\|u-A_{h_A}z\|\leqslant\varepsilon}} \big|z(x_k) - \langle\lambda, u\rangle\big|, \tag{8}$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – скалярное произведение в $L_2(Y)$. Ассоциированная задача к задаче (8) будет ставится как

$$\sup_{z \in Z_0} z(x_k), \text{ где } Z_0 := \widetilde{Z} \cap \{z : \|A_{h_A} z\| \leqslant \varepsilon\}. \tag{9}$$

Если определить функцию Лагранжа $\mathfrak{L} : (Z \times U) \times U \to \mathbb{R}^1$ в виде $\mathfrak{L}\big((z,u),\lambda\big) := -z(x_k) + \langle \lambda, u \rangle$, то справедлива следующая теорема, которая описывает связь между исходной задачей (8) и ее ассоциированной задачей (9).

Теорема 1 *(**Принцип Лагранжа**) Если элемент $\hat{z}$ является допустимой точкой в задаче* (9) *(т.е. $\hat{z} \in Z_0$), то*

1) следующие два условия эквивалентны:

а) $\hat{z}$ является решением задачи (9)*;*

б) $\exists\, \hat{\lambda} \in U^* :\ \mathfrak{L}\big((\hat{z},0),\hat{\lambda}\big) = \inf\limits_{\substack{z \in \widetilde{Z}, \\ \forall u \in U : \|u - A_{h_A} z\| \leqslant \varepsilon}} \mathfrak{L}\big((z,u),\hat{\lambda}\big)$;

2) при выполнении этих двух эквивалентных условий линейный функционал $\lambda = \hat{\lambda}$ является методом оптимального восстановления в задаче (8)*, и его погрешность равна*

$$\Delta_1(x_k, \widetilde{Z}, \varepsilon) = \hat{z}(x_k) = -\mathfrak{L}\big((\hat{z},0),\hat{\lambda}\big).$$

Таким образом, принцип Лагранжа позволяет свести задачу оптимального восстановления к поиску решения ассоциированной задачи и поиску множителя Лагранжа $\hat{\lambda}$.

В диссертационной работе с целью построения конкретного выпуклого и уравновешенного множества априорной информации об искомом решении Z_{n_0} рассматриваются некоторые предположения о свойствах задачи (5). В том числе, предполагается истокопредставимость решения, т.е. $z = Bv$, где $v \in L_2$ и B — интегральный оператор.

Введём множество всей априорной информации задачи (8) $\Omega := \{(z,u) \in Z_{n_0} \times U : \|u - A_{h_A} z\|_U \leqslant \bar{\varepsilon}\}$, где $\bar{\varepsilon} := \delta + h_A \cdot (\|B_{h_B}\|_{V \to Z} + h_B) \cdot n_0$, число n_0 находится с помощью метода расширяющихся компактов, и B_{h_B} – приближённый оператор к B такой, что $\|B - B_{h_B}\|_{V \to Z} \leqslant h_B$.

Далее в диссертации рассматривается конечномерный аналог задачи (8) для всех узлов $k = \overline{1, K}$

$$\inf_{\lambda_k^M \in U_M} \sup_{(\mathbf{z},\mathbf{u}) \in \Omega_K^M} \left| z_k - \langle \lambda_k^M, \mathbf{u} \rangle \right|, \quad k = \overline{1, K}, \tag{10}$$

и формулируется конечномерный принцип Лагранжа, определяющий связь между конечномерной задачей и её ассоциированной задачей.

Здесь Ω_K^M — конечномерный аналог для множества Ω и z_k — k-ая компонента вектора $\mathbf{z}$. Связь между конечномерной задачей (10) и исходной задачей (8) также рассматривается в диссертации.

Исходя из принципа Лагранжа, вместо задачи (10) нам нужно решить неравенство

$$(\hat{z}_k - z_k) + \langle \lambda_k^M, \mathbf{u} \rangle \geqslant 0, \quad \forall (\mathbf{z}, \mathbf{u}) \in \Omega_K^M, \quad k = \overline{1, K}, \tag{11}$$

или в векторном виде:

$$(\hat{\mathbf{z}} - \mathbf{z}) + \Lambda \mathbf{u} \succ 0, \quad \forall (\mathbf{z}, \mathbf{u}) \in \Omega_K^M, \tag{12}$$

где символ $\mathbf{z} \succ 0$ означает, что все элементы вектора $\mathbf{z}$ неотрицательны. $\Lambda := (\lambda_1^M, ..., \lambda_K^M)^T$ называется матрицей множителей Лагранжа.

Множество решений неравенства (12) (или (11)) обозначим как $\boldsymbol{\Lambda}$. Далее в диссертации подробно рассматриваются некоторые методы нахождения одной (оптимальной в некотором смысле) матрицы множителей Лагранжа Λ. Сформулируем один из них.

Среди всех решений (12) из множества $\boldsymbol{\Lambda}$ выбираем такой элемент Λ, что

$$\Lambda = \left(\hat{A}^T \hat{A} + \alpha I_K\right)^{-1} \hat{A}^T, \tag{13}$$

где I_K – единичная матрица в $\mathbb{R}^K \times \mathbb{R}^K$ и $\alpha \geqslant 0$ – параметр регуляризации.

Для любой матрицы $\hat{A}$ верно сингулярное разложение $\hat{A} = E\Sigma F^T$, где E, F – -ортогональные матрицы размеров $M \times M$ и $K \times K$ соответственно, $\Sigma = \operatorname{diag}(\sigma_1, ..., \sigma_r, 0, ..., 0)$ — диагональная матрица порядка $M \times K$, причём $\sigma_1 > \sigma_2 > ... > \sigma_r > 0$, число r — ранг матрицы $\hat{A}$. Тогда с помощью разложения в ряд Тейлора можно показать, что неравенство (11) эквивалентно неравенству

$$\mathcal{O}(\alpha^2) + \underline{d}_k \alpha + \frac{\overline{d}_k}{\alpha} \leqslant d_k, \quad k = \overline{1, K}, \quad \forall (\mathbf{z}, \mathbf{u}) \in \Omega_K^M, \tag{14}$$

где $\underline{d}_k$, $\overline{d}_k$ и d_k — некоторые функции, зависящие от точки $(\mathbf{z}, \mathbf{u})$.

Очевидно, что для любого положительного числа ε_0 существует $\alpha_0 > 0$ такое, что $\forall \alpha \in (0, \alpha_0]$ и $\forall k$: $1 \leqslant k \leqslant K$ верно $|\mathcal{O}(\alpha^2)| \leqslant \varepsilon_0 \alpha$.

В диссертации рассматривается метод выбора числа α_0 при заданном числе ε_0. Кроме того, в диссертации сформулировано достаточное условие, при котором система неравенств (14) при условии $\alpha \in (0, \alpha_0]$ имеет решение $\{\alpha : 0 < \alpha \leqslant \tilde{\kappa}\}$.

Кроме этого метода в диссертации рассматривается два других метода, которые учитывают специальную структуру матрицы $\hat{A}$.

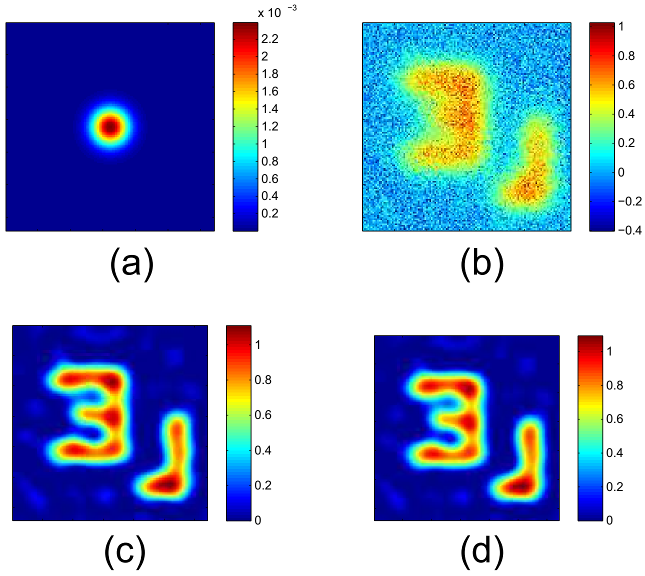

Рис. 4. Изображения, реконструированные для уровня ошибки $h = \delta = 10\%$. (a) неточная функция рассеяния точки $K_h(x, y, s, t)$, (b) размытое изображение u_δ, (c) изображение, реконструированное с априорным выбором параметра регуляризации $\alpha = \alpha_1$, (d) изображение, реконструированное с апостериорным выбором параметра регуляризации $\alpha = \alpha_2$.

Определяется число регуляризации κ либо по формуле $\kappa = \tilde{\kappa}$, либо на основе других методов, описанных в диссертации. В диссертации доказывается неотрицательность числа регуляризации κ.

Далее в диссертации рассматриваются два способа выбора параметра регуляризации α — априорный и апостериорный.

а) Априорный метод: $\alpha_1 := \frac{\bar{\varepsilon}^\sigma}{1+\bar{\varepsilon}^\sigma}\kappa$, где $0 < \sigma < 2$.

б) Апостериорный метод: $\alpha_2 := \min(\kappa, \alpha^*)$, где α^* — параметр регуляризации, выбирающийся по обобщённому принципу невязки.

Достаточные условия существования матрицы множителей Лагранжа, имеющей вид (13), формулируются во второй главе диссертации. Для такой матрицы множителей Лагранжа определяется метод R_α задачи (5) по формуле: $R_\alpha \mathbf{u} := \Lambda \mathbf{u}$. В диссертации доказывается псевдооптимальность и регуляризирующие свойства этого оператора.

В конце второй главы предлагаются многошаговые алгоритмы и соответствующие численные методы, применение которых рассмотрено на примерах решения обратной задачи уравнения теплопроводности и задачи восстановления истинного изображения по дефокусированному с помощью аппаратной функции и зашумлённому изображению (Рис. 4).

В **ЗАКЛЮЧЕНИИ** диссертационной работы сформулированы основные результаты.

1) Создан метод точек перегиба решения линейных некорректно поставленных обратных задач математической физики на множестве ограниченных кусочно-выпуклых функций и вычисления оценки погрешности полученного приближённого решения.

2) С помощью метода точек перегиба решена реальная задача восстановления функции распределения размеров частиц аэрозоля в атмосфере.

3) Создан поточечный псевдооптимальный регуляризирующий алгоритм для решения линейных некорректно поставленных обратных задач математической физики. Построен алгоритм вычисления псевдооптимальной (поточечной и общей) апостериорной погрешности приближённого решения.

4) Разработан алгоритм выбора параметра регуляризации для матрицы множителей Лагранжа, получены достаточные условия существования оптимального регуляризирующего алгоритма.

5) С помощью поточечного псевдооптимального регуляризирующего алгоритма решены обратная задача для уравнения теплопроводности и задача устранения размытия изображения.

Основные результаты диссертации опубликованы в следующих изданиях

Публикации в изданиях из Перечня ВАК:

[1] Ван Я., Чжан Е, Лукьяненко Д.В., Ягола А.Г. *Метод решения обратной задачи восстановления функции распределения размеров частиц аэрозоля в атмосфере на множестве кусочно-выпуклых функций* // Вычислительные методы и программирование. — 2012. — т. 13. — с. 49–66.

[2] Wang Y. F. , Zhang Y., Lukyanenkов D. V. and Yagola A. G. *Recovering aerosol particle size distribution function on the set of bounded piecewise-convex functions* // Inverse Problems in Science and Engineering. — 2013. — V. 21. — P. 339–354.

[3] Чжан Е, Лукьяненко Д.В., Ягола А.Г. *Применение принципа Лагранжа для решения линейных некорректно поставленных обратных задач с использованием априорной информации о решении* // Вычислительные методы и программирование. — 2013. — т. 14. — с. 468–482.

Публикации в других научных изданиях:

[4] Zhang Y. *A kind of numerical methods for recovering aerosol partical size distribution function in compact set* // The Second International Workshop on Computational Inverse Problems and Applications, A workshop at the Institute of Geology and Geophysics, The Chinese Academy of Sciences, Beijing, China, July 12 – July 15, 2010. — P. 49.

[5] Zhang Y. *Recovering aerosol particle size distribution function on the set of bounded piecewise-convex functions* // The fourth International conference on “Function spaces. Differential operators. General topology. Problems of mathematical education”, Peoples’ Friendship University of Russia, Moscow, Russia, March 25 – March 29, 2013. — P. 372–373.

[6] Yagola A.G., Zhang Y., Lukyanenko D.V. *Regularizing algorithm for recovering solutions of ill-posed problems on the set of bounded piecewise-convex functions* // The fourth International Symposium on “Inverse problems, Design and Optimization Symposium”, Albi, France, June 26 – July 28, 2013. — P. 77–79.

[7] Zhang Y. *Using Lagrange Principle for solving linear inverse and ill-posed problems* // The Third International Workshop on Computational Inverse Problems and Applications, East China Institute of Technology, Nanchang, China, July 8 – July 12, 2013. — P. 18–20.

[8] Yagola A.G., Zhang Y., Lukyanenko D.V. *A method for solving one dimensional Fredholm integral equation of the first kind on the set of bounded piecewise-convex functions* // Международная научная конференция "Методы создания, исследования и идентификации математических моделей", Novosibirsk, Akademgorodok, 10 – 13 October 2013 — P. 103.

[9] Yagola A.G., Zhang Y., Lukyanenko D.V. *A method for solving one dimensional Fredholm integral equation of the first kind on the set of bounded piecewise-convex functions* // The Fifth International Scientific Conference and Young Scientists School "Theory and Computational Methods for Inverse and Ill-posed Problems", Novosibirsk, Akademgorodok, 8 – 13 October 2013 — P. 108.

Подписано в печать: 13.12.2014
Объем: 1,0 п. л.
Тираж: 100 экз. Заказ № 812
Отпечатано в типографии «Реглет»
119526, г. Москва, пр-т Вернадского, д. 39
(495) 363-78-90; www.reglet.ru