УДК 517.958;621.372.8

О СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ВОЛНОВОДА С ИМПЕДАНСНЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

А. Н. Боголюбов, М. Д. Малых, Ю. В. Мухартова

(*кафедра математики*)

Рассмотрены нормальные волны в полом цилиндрическом волноводе Ω, поперечное сечение S которого имеет гладкую границу. На границе волновода заданы условия Щукина–Леонтовича. Показано, что в данной системе постоянная распространения волн не может быть чисто вещественной.

Одним из способов учета поглощения энергии электромагнитного поля в хорошо проводящих средах (металлах) является использование эквивалентных граничных условий Щукина–Леонтовича [1, 2]

$$[\mathbf{n}, \mathbf{E}] = \varsigma[\mathbf{n}, [\mathbf{n}, \mathbf{H}]], \quad \varsigma = \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma_0}}(i-1), \tag{1}$$

где σ_0 – удельная проводимость металла при постоянном токе. Соотношение (1) записано для монохроматических полей либо для Фурье-амплитуд в случае произвольного поля.

Рассмотрим задачу для нормальных волн в регулярном полом цилиндрическом волноводе

$$\Omega = \{(x, y) \in S;\ z \in R\} \tag{2}$$

при условии, что граница области S достаточно гладкая и на $\partial\Omega$ выполняются граничные условия Щукина–Леонтовича

$$\begin{cases} \operatorname{rot}\mathbf{H} = -i\omega\mathbf{E}, \\ \operatorname{rot}\mathbf{E} = i\omega\mathbf{H}, \\ [\mathbf{n}, \mathbf{E}]|_{\partial\Omega} = \varsigma[\mathbf{n}, [\mathbf{n}, \mathbf{H}]]. \end{cases} \tag{3}$$

При $\varsigma = 0$ задача (3) хорошо исследована и система ее собственных волн является полной, но при $\varsigma \neq 0$ это условие в общем случае не выполняется. Далее будет рассматриваться только случай $\varsigma \neq 0$. Так как уравнения для полей $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ однородные, то решение (3) можно искать в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \operatorname{grad}(\operatorname{div}\mathbf{\Pi}^e) + \omega^2\mathbf{\Pi}^e - i\omega\operatorname{rot}\mathbf{\Pi}^m, \\ \mathbf{H} &= i\omega\operatorname{rot}\mathbf{\Pi}^e + \operatorname{grad}(\operatorname{div}\mathbf{\Pi}^m) + \omega^2\mathbf{\Pi}^m, \end{aligned} \tag{4}$$

где электрический и магнитный векторы Герца направлены по оси волновода:

$$\mathbf{\Pi}^e = \varphi(x, y)e^{i\gamma z}\cdot\mathbf{e}_z, \quad \mathbf{\Pi}^m = \psi(x, y)e^{i\gamma z}\cdot\mathbf{e}_z. \tag{5}$$

Пусть вектор $\mathbf{n}$ — нормаль к границе волновода и $\boldsymbol{\tau} = [\mathbf{e}_z, \mathbf{n}] = (-n_y, n_x, 0)$ — вектор, касательный к границе. При этом задача (3) сведется к системе [2]

$$\Delta_2\varphi + \left(\omega^2 - \gamma^2\right)\varphi = 0, \tag{6}$$

$$\Delta_2\psi + \left(\omega^2 - \gamma^2\right)\psi = 0, \tag{7}$$

$$i\gamma\frac{\partial\varphi}{\partial\boldsymbol{\tau}} + i\omega\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{n}} + \varsigma\left(\omega^2 - \gamma^2\right)\psi\big|_{\partial\Omega} = 0, \tag{8}$$

$$-\left(\omega^2 - \gamma^2\right)\varphi + \varsigma\left(i\gamma\frac{\partial\psi}{\partial\boldsymbol{\tau}} - i\omega\frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{n}}\right)\bigg|_{\partial\Omega} = 0. \tag{9}$$

Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} u &= \begin{pmatrix}\varphi\\ \psi\end{pmatrix}, \quad I_1 = \begin{pmatrix}-\varsigma & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \\ I_2 &= \begin{pmatrix}0 & \varsigma\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \quad I_3 = \begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & \varsigma\end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{10}$$

Функция u удовлетворяет задаче

$$\Delta_2 u + \left(\omega^2 - \gamma^2\right)u = 0, \tag{11}$$

$$i\omega I_1\frac{\partial}{\partial\mathbf{n}}u + i\gamma I_2\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\tau}}u + I_3\left(\omega^2 - \gamma^2\right)u\big|_{\partial\Omega} = 0. \tag{12}$$

Особенность этой задачи состоит в том, что постоянная распространения γ — чисто мнимая величина. Покажем, что это действительно так.

Производная функции u по нормали на границе области S имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial\mathbf{n}} = -\frac{\gamma}{\omega}\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\frac{\partial u}{\partial\boldsymbol{\tau}} + \frac{i}{\omega}\left(\omega^2 - \gamma^2\right)\begin{pmatrix}1/\varsigma & 0\\ 0 & \varsigma\end{pmatrix}u. \tag{13}$$

Формально умножим уравнение (11) на вектор-функцию $v(M) = (v_1(M), v_2(M))^{\mathrm{T}}$, где $v_1(M)$ и $v_2(M)$ принадлежат пространству $W_2^1(S)$, проинтегрируем по сечению S волновода и с учетом граничных условий получим следующее тождество:

$$\begin{aligned} -\int_S\left\{\nabla v^{\mathrm{T}}\nabla u + v^{\mathrm{T}}u\right\}ds + \left(\omega^2 - \gamma^2 + 1\right)\int_S v^{\mathrm{T}}u\,ds + \\ + \frac{i}{\omega}\left(\omega^2 - \gamma^2\right)\oint_{\partial S}\left\{\frac{1}{\varsigma}\bar{v}_1u_1 + \varsigma\bar{v}_2u_2\right\}d\tau - \\ - \frac{\gamma}{\omega}\oint_{\partial S}\left\{-\bar{v}_1\frac{\partial u_2}{\partial\boldsymbol{\tau}} + \bar{v}_2\frac{\partial u_1}{\partial\boldsymbol{\tau}}\right\}d\tau = 0. \end{aligned} \tag{14}$$

Будем называть обобщенным решением задачи (11), (12) функцию $u(\gamma, M)$, компоненты которой принадлежат пространству Соболева $W_2^1(S)$ и которая удовлетворяет тождеству (14) при любой функции $v(M)$, такой, что $v_1(M) \in W_2^1(S)$

и $v_2(M) \in W_2^1(S)$ [3]. Пусть некоторая, в общем случае комплексная, $\gamma = \gamma_1 + i\gamma_2$ и функция $w(\gamma, M) = (w_1(\gamma, M),\ w_2(\gamma, M))^{\mathrm{T}}$ удовлетворяют задаче (11), (12). При этом γ должна быть корнем квадратного уравнения

$$\frac{1}{\gamma^2}\|w\|^2_{W_2^1(S)} + \int\limits_S |w|^2\,ds - \frac{1+\omega^2}{\gamma^2}\int\limits_S |w|^2\,ds - \\ - \frac{i}{\omega\gamma^2}\left(\omega^2-\gamma^2\right)\oint\limits_{\partial S}\left\{\frac{1}{\varsigma}|w_1|^2 + \varsigma|w_2|^2\right\}d\tau + \\ + \frac{1}{\omega\gamma}\oint\limits_{\partial S}\left\{-\bar{w}_1\frac{\partial w_2}{\partial \boldsymbol{\tau}} + \bar{w}_2\frac{\partial w_1}{\partial \boldsymbol{\tau}}\right\}d\tau = 0. \quad (15)$$

Преобразуем выражение под последним интегралом в уравнении (15):

$$-\bar{w}_1\frac{\partial w_2}{\partial \boldsymbol{\tau}} + \bar{w}_2\frac{\partial w_1}{\partial \boldsymbol{\tau}} = -\operatorname{Re} w_1\cdot\operatorname{Re}\frac{\partial w_2}{\partial \boldsymbol{\tau}} - \\ - \operatorname{Im} w_1\cdot\operatorname{Im}\frac{\partial w_2}{\partial \boldsymbol{\tau}} + \operatorname{Re} w_2\cdot\operatorname{Re}\frac{\partial w_1}{\partial \boldsymbol{\tau}} + \operatorname{Im} w_2\cdot\operatorname{Im}\frac{\partial w_1}{\partial \boldsymbol{\tau}} + \\ + i\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\tau}}\{\operatorname{Re} w_2\cdot\operatorname{Im} w_1 - \operatorname{Re} w_1\cdot\operatorname{Im} w_2\}. \quad (16)$$

Рассмотрим мнимую часть уравнения (15), учитывая, что

$$\varsigma = \frac{|\varsigma|}{\sqrt{2}}(i-1) \quad \text{и} \quad \frac{1}{\varsigma} = -\frac{1}{|\varsigma|\sqrt{2}}(i+1).$$

Получим следующее равенство:

$$-\frac{2\gamma_1\gamma_2}{|\gamma^2|^2}\|w\|^2_{W_2^1(S)} + \frac{2\gamma_1\gamma_2(1+\omega^2)}{|\gamma^2|^2}\int\limits_S |w|^2\,ds + \\ + \frac{\left(\gamma_1^2-\gamma_2^2\right)\omega}{|\gamma^2|^2}\oint\limits_{\partial S}\left\{\frac{1}{|\varsigma|\sqrt{2}}|w_1|^2 + \frac{|\varsigma|}{\sqrt{2}}|w_2|^2\right\}d\tau + \\ + \frac{2\gamma_1\gamma_2\omega}{|\gamma^2|^2}\oint\limits_{\partial S}\left\{\frac{1}{|\varsigma|\sqrt{2}}|w_1|^2 - \frac{|\varsigma|}{\sqrt{2}}|w_2|^2\right\}d\tau - \\ - \frac{1}{\omega}\oint\limits_{\partial S}\left\{\frac{1}{|\varsigma|\sqrt{2}}|w_1|^2 + \frac{|\varsigma|}{\sqrt{2}}|w_2|^2\right\}d\tau + \\ + \frac{\gamma_1}{\omega|\gamma|^2}\oint\limits_{\partial S}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\tau}}\{\operatorname{Re} w_2\cdot\operatorname{Im} w_1 - \operatorname{Re} w_1\cdot\operatorname{Im} w_2\}\,d\tau - \\ - \frac{\gamma_2}{\omega|\gamma|^2}\oint\limits_{\partial S}\operatorname{Re}\left\{-\bar{w}_1\frac{\partial w_2}{\partial \boldsymbol{\tau}} + \bar{w}_2\frac{\partial w_1}{\partial \boldsymbol{\tau}}\right\}d\tau = 0. \quad (17)$$

Предположим, что γ действительна, т. е. положим $\gamma_2 = 0$. При этом из равенства (17) следует, что должно выполняться условие

$$\frac{\omega}{\gamma_1^2}\oint\limits_{\partial S}\left\{\frac{1}{|\varsigma|\sqrt{2}}|w_1|^2 + \frac{|\varsigma|}{\sqrt{2}}|w_2|^2\right\}d\tau - \\ - \frac{1}{\omega}\oint\limits_{\partial S}\left\{\frac{1}{|\varsigma|\sqrt{2}}|w_1|^2 + \frac{|\varsigma|}{\sqrt{2}}|w_2|^2\right\}d\tau = 0, \quad (18)$$

так как

$$\oint\limits_{\partial S}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\tau}}\{\operatorname{Re} w_2\cdot\operatorname{Im} w_1 - \operatorname{Re} w_1\cdot\operatorname{Im} w_2\}\,d\tau = 0. \quad (19)$$

Следовательно, либо $\gamma_1^2 = \omega^2$, либо

$$\oint\limits_{\partial S}\left\{\frac{1}{|\varsigma|\sqrt{2}}|w_1|^2 + \frac{|\varsigma|}{\sqrt{2}}|w_2|^2\right\}dl = 0.$$

Так как под интегралом стоят неотрицательные выражения, то равенство интеграла нулю выполняется только при $w_1|_{\partial S} = w_2|_{\partial S} = 0$ при любых по модулю ς. При этом из условия (13) следует, что и $\left.\frac{\partial w}{\partial n}\right|_{\partial S} = 0$. Поэтому если γ — действительная величина, то соответствующая функция w должна удовлетворять задаче

$$\Delta_2 w + \left(\omega^2-\gamma^2\right)w = 0, \quad (20)$$

$$w|_{\partial S} = 0, \quad (21)$$

$$\left.\frac{\partial w}{\partial n}\right|_{\partial S} = 0, \quad (22)$$

которая имеет только тривиальные решения.

Литература

1. *Ильинский А.С., Слепян Г.Я.* Колебания и волны в электромагнитных системах с потерями. М., 1983.
2. *Ильинский А.С., Кравцов В.В., Свешников А.Г.* Математические модели электродинамики. М., 1991.
3. *Ладыженская О.А.* Краевые задачи математической физики. М., 1973.

Поступила в редакцию
14.09.05