ОПТИКА И СПЕКТРОСКОПИЯ

УДК 535.3

«ДУАЛЬНАЯ» ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ ДЛЯ ИЗУЧЕНИЯ ПРОЦЕССОВ В СВЕРХСИЛЬНЫХ СВЕТОВЫХ ПОЛЯХ

А. В. Андреев, А. В. Заякин

(*кафедра общей физики и волновых процессов*)

E-mail: andreev@sr1.phys.msu.su

Исходя из принципа дуальности, мы приходим к нетривиальной модификации гамильтониана N-уровневой системы, что приводит к таким эффектам, как генерация высоких оптических гармоник, появление суперконтинуума, стабилизация ионизации атома.

Введение. Понятие дуальности

В последнее время в различных областях математической физики появляются решения, основанные на идее дуальности в теории возмущений [1, 2]. Суть этой идеи сводится к тому, что теория возмущений хорошо работает не только при малых значениях параметра разложения, но и при больших. «Дуальным» называют такое разложение в ряд теории возмущений, в котором параметром разложения становится величина, обратная к исходной. Так, в гидродинамике дуальными по отношению друг к другу являются решения, возникающие при малых значениях числа Рейнольдса и при больших. В теории колебаний неоднородное уравнение для осциллятора Дюффинга проявляет дуальные свойства по параметру нелинейности. В квантовой механике осциллятор с гамильтонианом $H = \frac{p^2}{2} + \frac{q^2}{2} + \lambda\frac{q^4}{4}$ (см., напр., обзор [3]) обладает дуальностью по параметру λ.

1. Теория возмущений по гармоникам поля

Особенностью настоящей работы является применение разложения по гармоникам поля с использованием нестандартной формы записи взаимодействия атомной системы с полем, впервые построенной А. В. Андреевым в [4]:

$$H(\mathbf{p},\mathbf{r},t) = \exp\left\{i\frac{e\mathbf{A}(\mathbf{r},t)\cdot\mathbf{r}}{\hbar c}\right\} H_0(\mathbf{p},\mathbf{r})\times \times\exp\left\{-i\frac{e\mathbf{A}(\mathbf{r},t)\cdot\mathbf{r}}{\hbar c}\right\}, \tag{1}$$

где $\mathbf{A}(\mathbf{r},t) = \mathbf{A}_0(\mathbf{r},t)\sin(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r})$ — классический вектор-потенциал электромагнитного поля, $\mathbf{A_0}$ — огибающая вектор-потенциала; $H_0 = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + U(|\mathbf{r}|)$ — невозмущенный гамильтониан атомной системы. Введем обозначение для унитарного оператора, который приводит H_0 к такому виду: $V = \exp\left\{i\frac{e\mathbf{A}(\mathbf{r},t)\cdot\mathbf{r}}{\hbar c}\right\}$. В работе [4] доказано, что в рамках длинноволнового приближения гамильтониан (1) тождественно совпадает с гамильтонианом атома во внешнем поле в $\mathbf{A}$-представлении, что можно проверить, учитывая коммутационные соотношения между $\mathbf{p},\mathbf{r}$ и тождества векторной алгебры.

Далее всюду будем считать поле линейно-поляризованным и однородным, характерный размер атомной системы — много меньшим длины волны, так что для единичного атома можно положить: $\mathbf{A}(\mathbf{r},t) = \mathbf{e}_z A_0(t)\sin(\omega t)$, где $\mathbf{e}_z$ — единичный вектор, $A_0(t)$ — огибающая.

Используя тождество $e^{i\alpha\sin(\omega t)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(\alpha)\times \times e^{in\omega t}$, где $J_n(z)$ — функция Бесселя n-го порядка, разложим выражение для оператора V по гармоникам и получим: $V = \sum_n V^n(A_0(t))e^{in\omega t}$, где верхний индекс n означает номер соответствующей гармоники. Отсюда следует, что $H = \sum_{n,m} V^n H_0 \left(V^m\right)^+ e^{i(n-m)\omega t}$. Вводя ортогональный базис состояний $|k\rangle$, являющихся собственными состояниями невозмущенного гамильтониана H_0, получим выражение для матричного элемента гамильтониана H_{ij} соответственно через матричные элементы операторов V^n; для них введем обозначения $V_{ik}^n(A_0(t)) = \langle i|J_n\left(\frac{eA_0(t)\cdot\mathbf{e}_z\mathbf{r}}{\hbar c}\right)|k\rangle$, также обозначим $\hbar\omega_k$ — собственная энергия H_0: $H_{ij} = \sum_{n,m,k} V_{ik}^n (V_{jk}^m)^*\omega_k e^{i(n-m)\omega t}$. Тем самым разложение H_{ij} можно записать в виде

$$H_{ij} = \sum_q H_{ij}^q e^{iq\omega t}, \tag{2}$$

где

$$H_{ij}^q = \hbar\sum_{m,k} V_{ik}^m (V_{jk}^{m+q})^*\omega_k. \tag{3}$$

Выражение (2) далее нами будет называться разложением гамильтониана в ряд по гармоникам. Его нельзя назвать разложением в ряд Фурье, так как коэффициенты H_{ij}^q не являются постоянными, они зависят от огибающей поля. Будем говорить, что ряд (2) порождает так называемую теорию возмущений по гармоникам поля.

2. Построение «дуального» ряда

Оператор эволюции для системы, которой соответствует гамильтониан $\hat{H} = \hat{H}_0 + \mathbf{E}\hat{\mathbf{d}}$, где $\hat{H}_0$ — невозмущенный гамильтониан атома, $\mathbf{E}$ — поле, $\hat{\mathbf{d}}$ — дипольный момент, имеет следующий вид в представлении взаимодействия:

$$\begin{aligned}\hat{U}(t'',t') = \hat{1} - i\int\limits_{t'}^{t''}\mathbf{E}(t)\hat{\mathbf{d}}(t)dt - \\ -\int\limits_{t'}^{t''}\mathbf{E}(t)\hat{\mathbf{d}}(t)dt'\int\limits_{t'}^{t}\mathbf{E}(t_1)\hat{\mathbf{d}}(t_1)dt_1 + \cdots .\end{aligned} \tag{4}$$

Показателем малости в этом случае является отношение частоты Раби к частоте атомного перехода $\frac{Ed}{\hbar\omega_0} = \frac{\Omega_{Rabi}}{\omega_0}$. Поскольку в этом ряду при n-м члене разложения теории возмущений стоит коэффициент порядка E^n, неограниченно возрастающий с ростом n при $E \gg E_{\text{at}}$ (E_{at} — внутриатомное поле), то эта теория применима только при напряженностях поля заметно ниже внутриатомных.

Система, гамильтониан которой представим в виде (3), далее будет рассматриваться в рамках теории возмущений. Оператор эволюции системы имеет вид

$$\hat{U} = \mathcal{T}\exp\left\{-i\int\limits_{t_0}^{t}\hat{V}(t')\hat{H}_0\hat{V}^{+}(t')dt'\right\}, \tag{5}$$

что следует также понимать как ряд теории возмущений.

Для того чтобы конкретизировать ситуацию, в качестве $\hat{H}_0$ был избран гамильтониан водородоподобного атома, в качестве базисных векторов — дискретные термы $1s$, $2p$ и состояние $\langle\mathbf{k}|$ непрерывного спектра. Тогда коэффициенты H^n_{ij} (3) можно вычислить аналитически, произведя до конца все суммирования по m и k. Например, в двухуровневом приближении H^n_{00} имеет вид

$$\begin{aligned}H^n_{00} = \omega_0\frac{E^n\left(2+\sqrt{4+E^2}\right)^{-n}}{64\,(4+E^2)^{7/2}\,\pi^2}\times \\ \times\Big(\left(8+E^2\right)\left(5E^4+64(2+n)+16E^2(2+n)\right)+ \\ +2\sqrt{4+E^2}\left(128(2+n)+32E^2(2+n)+E^4(4+3n)\right)\Big)+ \\ +\omega_1\frac{2^{10+n}E^{2+n}\left(3+\sqrt{9+4E^2}\right)^{-n}}{2187\,(9+4E^2)^{11/2}}\times \\ \times\Big(16E^2\left(1458+486E^2+90E^4+7E^6\right)+ \\ +12E^2\sqrt{9+4E^2}\left(405+81E^2+7E^4\right)n+ \\ +9\left(9+4E^2\right)\left(81+2E^2\left(9+E^2\right)\right)n^2+ \\ +13122\left(4+\sqrt{9+4E^2}n\right)\Big).\end{aligned}$$

Приведем асимптотики H^n_{ij} при $A_0 \to 0$ и $A_0 \to \infty$, так как полные аналитические выражения для них слишком громоздки. Все величины далее будем выражать через безразмерную величину $E = \frac{\omega_{\text{at}}}{\omega}\frac{\mathcal{E}}{\mathcal{E}_{\text{at}}}$, где ω_{at} — атомная единица частоты, ω — частота лазерного излучения, $\mathcal{E}_{\text{at}}$ — атомная напряженность, $\mathcal{E} = \frac{\omega A_0}{c}$ — огибающая напряженности. При $E \to 0$ имеет место предел

$$H_{ij} \to \sum_n E^n e^{in\omega t} M^{(n)}_{ij}(E), \tag{6}$$

$M^{(n)}_{ij}$ — матрица. E входит в $M^{(n)}_{ij}$ в нулевой или первой степени. Индексы i, j нумеруют уровни: 1, 2 — дискретные, 3 — континуум.

При $E \to \infty$ асимптотика для H имеет вид

$$H^n_{ij} \to \sum_n \frac{1}{E^{n+1}} e^{in\omega t} K^{(n)}_{ij}. \tag{7}$$

Здесь $K^{(n)}_{ij}$ — матрица, не зависящая от E. Разложение по гармоникам при $E \gg 1$ приобретает дополнительный смысл: оно становится разложением по обратному параметру $\frac{1}{E}$, тем самым удовлетворяя введенному выше понятию дуальности.

Далее ряд (7) будем называть дуальным рядом, а теорию возмущений по $\frac{1}{E}$ — дуальной теорией возмущений. Уже на этом этапе для ряда (7) можно получить результаты, известные из теории двухуровневого атома, заменяя частоту Раби Ω на $\tilde{\Omega} = M_{12}/E^2$.

Построение дуального ряда уже позволяет вести расчеты в области $E \gg 1$, недоступной для общепринятой теории возмущений. Однако мы хотим изучить взаимодействие атома с импульсом поля, а для этого следует как-то объединить две теории.

Асимптотики (6) и (7) можно «сшить» так, чтобы сохранилась и форма асимптотической зависимости, и значения коэффициентов при $E \to 0, \infty$. Для «сшивания» зависимость типа $\frac{E^a}{(B^2+E^2)^b}$, которая подсказывается нам полученными выражениями для H^n_{ij}. Приведем результаты такого «сшивания» для членов, содержащих нулевые и первые гармоники; при этом запишем их сразу в виде некоторого «эффективного гамильтониана»:

$$H^{\text{eff}}_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{N_{11}}{\sqrt{E^2+D^2_{11}}} & \frac{iN_{12}E\sin\omega t}{(E^2+D^2_{12})^{3/2}} & \frac{N_{13}E}{E^2+D^2_{13}} \\ \frac{-iN_{12}E\sin\omega t}{(E^2+D^2_{12})^{3/2}} & \frac{N_{22}}{\sqrt{E^2+D^2_{22}}} & \frac{iN_{23}E\sin\omega t}{(E^2+D^2_{23})^2} \\ \frac{N_{13}E}{E^2+D^2_{13}} & \frac{-iN_{23}E\sin\omega t}{(E^2+D^2_{23})^2} & \frac{N_{33}}{\sqrt{E^2+D^2_{33}}} \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Будем называть полученное выражение первым приближением теории возмущений по гармоникам. Величины N_{ij} и D_{ij} вычисляются по асимптотикам

(6), (7). N_{ij} — безразмерные величины, D_{ij} имеют размерность энергии*).

Отметим, что нелинейность с выражениями типа $E^2 + A^2$ в знаменателе известна как нелинейность насыщения.

3. Расчет генерации высших гармоник отклика

Не переходя к приближению (8), а используя лишь точную формулу (2), можно получить оператор эволюции системы с точностью до второго порядка:

$$U_{ij} = \delta_{ij} - i \int\limits_{t_0}^{t} V_{im}(t')\omega_m V^*_{jm}(t')dt' - \\ - \int\limits_{t_0}^{t} V_{im}(t')\omega_m V^*_{km}(t')dt' \int\limits_{t_0}^{t'} V_{kl}(t'')\omega_l V^*_{jl}(t'')dt''. \tag{9}$$

δ_{ij} здесь — матричный элемент оператора эволюции системы, V и ω_k имеют такой же смысл, что и выше, по k, m, l подразумевается суммирование. Члены этого разложения были вычислены в явном виде. Выражение для оператора эволюции принимает вид

$$U_{ik}(t,0) = \left(\delta_{ij} - i \sum_{q \neq 0} H^q_{ik} \frac{e^{iq\omega t} - 1}{iq\omega} + \ldots \right) U^{(R)}_{jk}.$$

Оператор $U^{(R)}$ имеет вид $U^{(R)}_{jk} = \exp\{-iH^0_{jk}t\}$ и дает нам характеристические показатели экспонент Флоке, а следовательно, квазиэнергии данной системы. Формула для него получена путем ренормгруппового анализа, следуя [5].

Исходя из найденного оператора эволюции аналитически определен спектр отклика, т. е. рассчитаны высшие гармоники. Приведем зависимость нескольких гармоник от напряженности (рис. 1), а также зависимость Фурье-составляющих вероятности ионизации от напряженности и номера компоненты (рис. 2).

Отметим, что такой способ исследования отклика на высших гармониках обладает тем недостатком, что позволяет рассчитывать взаимодействие только с импульсом прямоугольной формы. Но его преимущество в том, что в (9) не отбрасываются высшие гармоники разложения гамильтониана (2).

Значение приводимых на этих рисунках результатов состоит в том, что они подтверждают данные о стабилизации атомов [6]. Кроме того, сравнение зависимости вероятности ионизации и интенсивности дипольного отклика указывает на то, что связь генерации гармоник с ионизацией [7] имеет место и в представленном случае.

*) Численные значения (соответственно безразмерные или в атомных единицах энергии): $N_{11} = 0.319$; $D_{11} = 0.639$; $N_{12} = 0.0316$; $D_{12} = 0.512$; $N_{13} = 0.127$; $D_{13} = 0.792$; $N_{22} = -0.047$; $D_{22} = 0.377$; $N_{33} = -0.125$; $D_{33} = 0.838$.

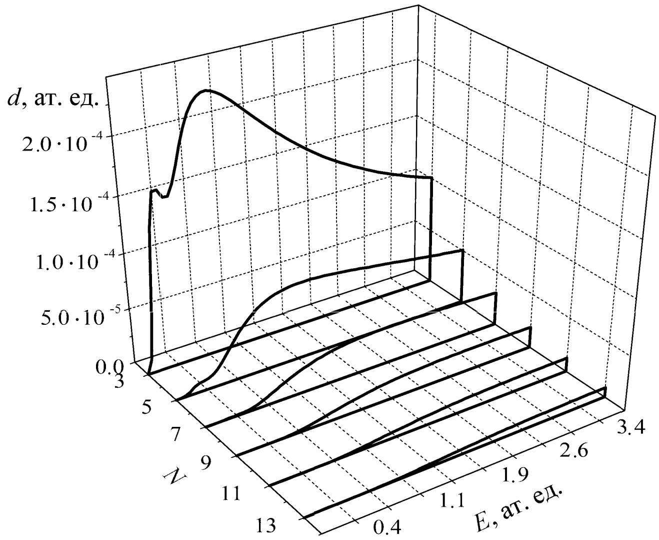

Рис. 1. Зависимость дипольного отклика атома d от напряженности поля E и номера гармоники N

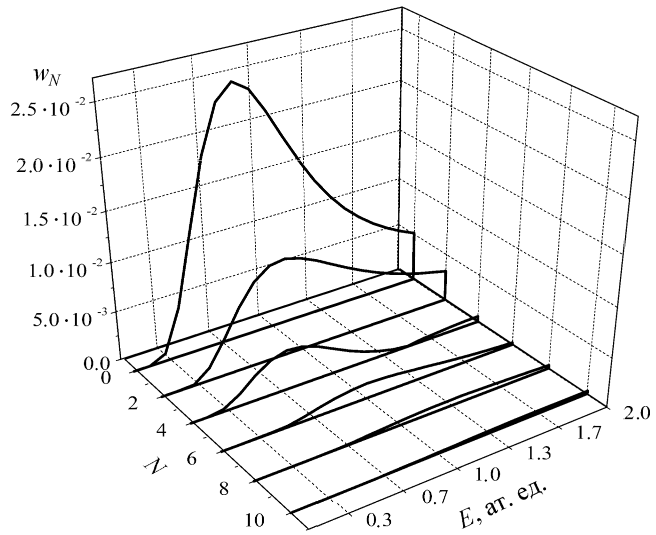

Рис. 2. w_N — компоненты временного Фурье-разложения вероятности ионизации атома $w(t) = \sum w_n e^{in\omega t}$ в зависимости от напряженности поля E и номера N

4. Генерация суперконтинуума и ионизация атома

Используя приближение (8), можем изучить поведение системы в поле сильного лазерного импульса произвольной формы. Волновая функция системы представима в виде разложения по базису: $|\psi(t)\rangle = \sum_n a_n(t)|\psi_n\rangle$. Будем решать численно уравнения для амплитуд населенностей уровней $i\frac{da_i}{dt} = H^{\text{eff}}_{in} a_n$, огибающую поля выберем в форме гиперболического секанса: $E(t) = \frac{E_0}{\text{ch}(t/\tau)}$, E_0 — максимальное значение напряженности поля. Получаем следующую картину спектра отклика (рис. 3): по мере возрастания напряженности поля сначала видны два пика, соответствующие колебаниям на частоте Раби, а затем спектр становится все ближе к сплошному. В наших расчетах спектр уширяется в сторону низких частот, в то время как в экспериментальной

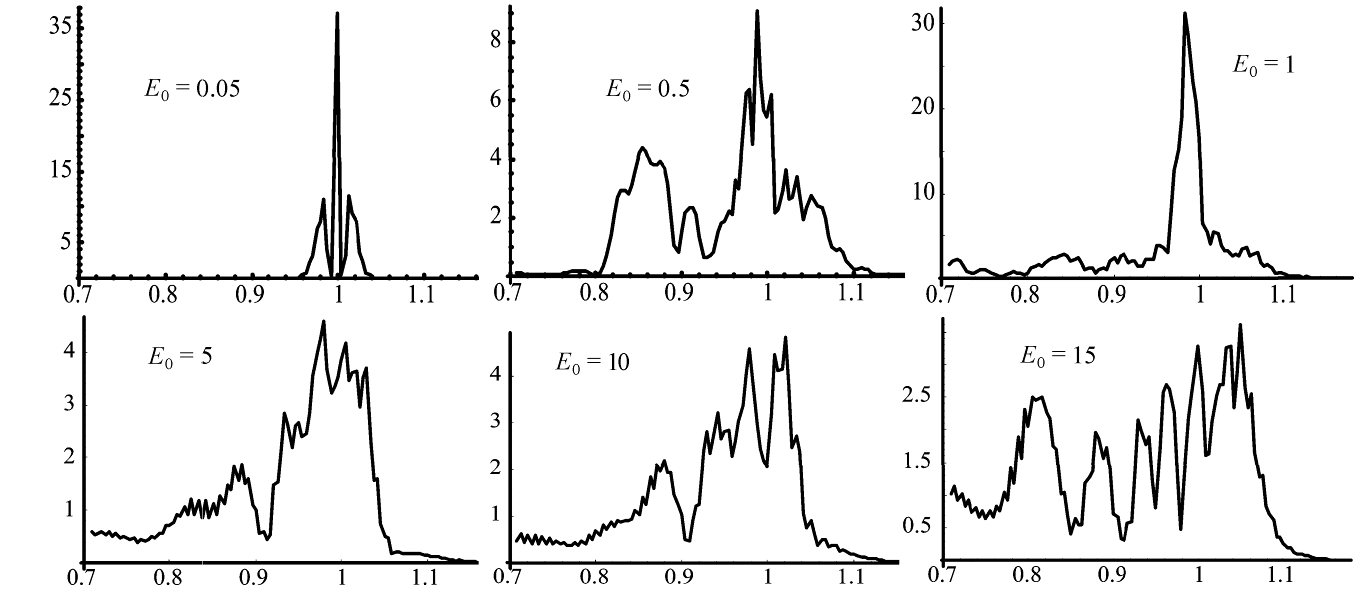

Рис. 3. Генерация суперконтинуума. (Численное интегрирование уравнений для амплитуд населенностей в первом приближении «дуальной» теории возмущений.) По вертикальной оси отложена величина $|d(\omega)|^2$, по горизонтальной — ω/ω_0, ω_0 — резонансная частота

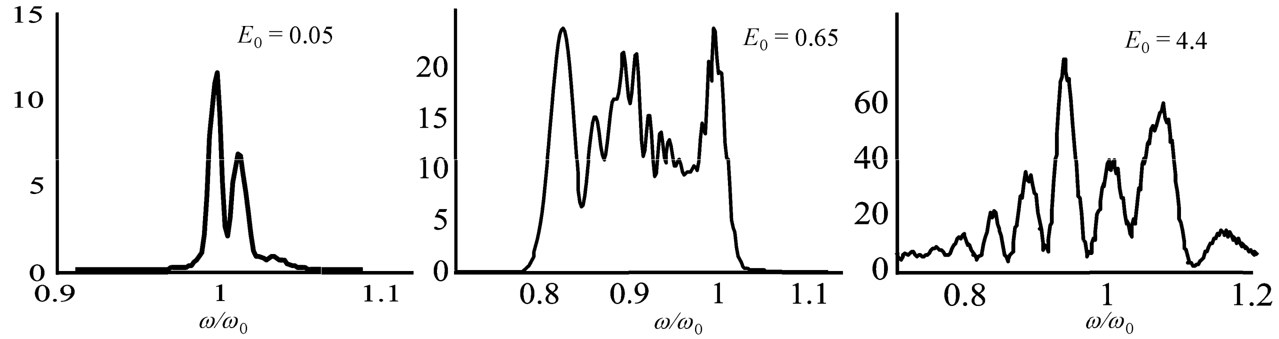

Рис. 4. Появление суперконтинуума. (Численное интегрирование уравнений для амплитуд населенностей при сохранении всех гармонических слагаемых.) По вертикальной оси отложена величина $|d(\omega)|^2$, по горизонтальной — ω/ω_0, ω_0 — резонансная частота

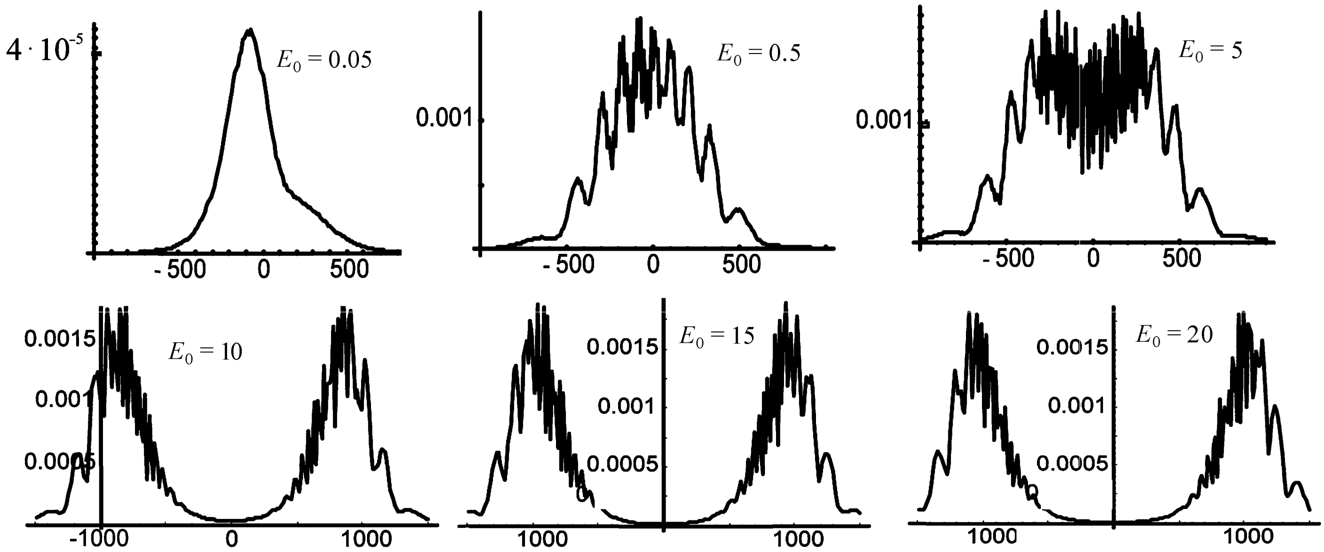

Рис. 5. Ионизация атома импульсом поля, временное представление. По горизонтальной оси отложено время в атомных единицах, по вертикальной — населенность континуума

работе [8] спектр уширялся в обе стороны от линии перехода, а в другом эксперименте [9] уширение происходило в коротковолновую сторону.

Этим спектрам можно дать объяснение. Обычно [10] суперконтинуум объясняют на основе фазовой самомодуляции («чирпирование»). В настоящей работе, напротив, за счет динамического Штарк-эффекта происходит «модуляция» самой системы.

Для сравнения взаимодействие двухуровневого атома с импульсом электромагнитного поля было изучено численно без перехода к одной или нескольким гармоникам в гамильтониане для нескольких величин напряженностей. Результаты приведены на рис. 4. Анализируя их, можно утверждать, что прямой численный расчет приводит к аналогичному результату.

В рамках предложенной выше модели можно рассчитать ионизацию атома при взаимодействии с импульсом поля. Сравнивая полученные результаты для вероятности ионизации (рис. 5), мы можем с осторожностью утверждать, что данная модель приводит к стабилизации ионизации, так как максимальная населенность континуума не возрастает при $E_0 \gg 1$.

Обсуждая представленные на рис. 4 результаты, укажем, что они близки к [11], а именно, в сверхсильных полях ионизация интенсивнее всего на фронте импульса.

5. Трактовка в терминах нелинейной оптики

Полученные выражения ряда теории возмущений по гармоникам можно интерпретировать в нелинейно-оптических терминах. В общепринятой теории линейная поляризуемость имеет вид $P^L(\omega) \sim E\frac{1}{\omega_{10}-\omega+i\Gamma}$. Если учесть нелинейность, то отклик на частоте ω будет зависеть от всех нечетных степеней поля. В нашем случае отклик на частоте ω зависит от высших степеней поля; расчет по теории возмущений дает $P^{L+NL}(\omega) = \dfrac{N}{V}\dfrac{1}{\hbar}\dfrac{N_{12}E}{(D_{12}^2+E^2)^{3/2}}\dfrac{1}{\omega_{10}-\omega+i\Gamma}$. Индекс $L+NL$ означает учет и линейной и нелинейной частей отклика. Здесь E — (безразмерная) огибающая поля, N_{12}, D_{12} имеют тот же смысл, что в (8), ω_{10} — частота перехода, d_{10} — дипольный момент, Γ — ширина линии.

Последняя формула эффективно суммирует все многофотонные процессы, приводящие к отклику на частоте ω. Следующие члены ряда (7) дают отклик на частотах $(2n+1)\omega$.

Заключение

Значение построенной теории возмущений по гармоникам состоит в том, что она приводит к «дуальной» теории возмущений, т. е. к ряду разложения по степеням величины, обратной к безразмерной величине E. «Сшивание» асимптотик теории возмущений по гармоникам дает возможность рассчитывать взаимодействие атома с импульсом произвольной интенсивности. Работоспособность теории мы объясняем тем, что она суммирует все многофотонные процессы, приводящие к отклику на частоте $n\omega$.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 02-02-17138) и фонда «Династия».

Литература

1. *Mostafazadeh A.* // Phys. Rev. A. 1997. **55**, N 3. P. 1653.
2. *Frasca M.* // hep-th/9801069. 2003. P. 1.
3. *Zinn-Justin J.* // Phys. Rep. 1981. **70**, N 2. P. 109.
4. *Андреев А.В.* // ЖЭТФ. 1999. **116**, № 3(9). С. 793.
5. *Frasca M.* // cond-mat/0303655. 2003. P. 1.
6. *Gavrila M., Kaminski J.Z.*// Phys. Rev. Lett. 1984. **52**, N 8. P. 613.
7. *Стрелков В.В., Платоненко В.Т.* // Квантовая электроника. 1998. **25**, № 7. С. 582.
8. *Francois V., Ilkov F.A., Chin S.L.* // J. Phys. B. 1992. **25**, P. 2709.
9. *Sandhu A., Banerjee S., Goswarni D.* // Opt. Comm. 2000. **181**, N 1–3. P. 101.
10. *Alfano R.* The Supercontinuum Laser Source. N. Y., 1989.
11. *Fedorov M.V., Tikhonova O.V.* // Phys. Rev. A. 1998. **58**, N 2. P. 1322.

Поступила в редакцию
11.02.04