УДК 551.555.9

ОБЩИЕ СВОЙСТВА МОДЕЛЕЙ ГЕОФИЗИЧЕСКОЙ ГИДРОДИНАМИКИ

К. В. Показеев, В. Г. Байдулов, М. П. Васильев

(*кафедра физики моря и вод суши*)

Изучено влияние упрощающих предположений, используемых в моделях геофизической гидродинамики, на общие свойства пространства и времени, а также на основные физические принципы, положенные в основу механических систем. Анализ общих свойств моделей дополнен разбором особенностей, которые вносит стратификация в решения нелинейных стационарных моделей. Исследованы возможности представления решений в виде конечного и бесконечного ряда Фурье в цилиндрических координатах.

В силу малости многих скалярных параметров, отвечающих за отдельные аспекты геофизических течений, в большинстве исследований анализ физических процессов проводится с использованием только небольшого числа динамических факторов (рассматриваются модели идеальной жидкости, учитываются эффекты плавучести и/или вращения, свойства геофизических течений анализируются с помощью установившихся волн и стационарных моделей). Однако в ряде случаев показано, что, несмотря на малость скалярных параметров, свойства течений, описываемых близкими моделями, могут существенно различаться или совпадать в зависимости от выбранного диапазона пространственно-временной области. Таким образом, оказывается актуальной задача изучения структурной устойчивости как общих свойств физических моделей, так и отдельных течений или некоторых их элементов по отношению к выбору определяющих факторов модели. Работа посвящена изучению роли упрощающих предположений, используемых в моделях геофизической гидродинамики, и их влиянию на основные физические принципы, положенные в основу механических систем, и особенности решений.

Симметрии общих уравнений геофизических течений. Для несжимаемой стратифицированной жидкости в приближении Буссинеска уравнения движения с учетом вращения Земли с угловой скоростью Ω, вязкости и диффузии имеют вид [1–3]

$$\begin{gathered} \boldsymbol{u}_t + (\boldsymbol{u}\nabla)\boldsymbol{u} = -\nabla P + \nu\Delta\boldsymbol{u} + S\boldsymbol{g} - 2\Omega\times\boldsymbol{u}, \\ S_t + (\boldsymbol{u}\nabla)S = \kappa\Delta S, \quad \operatorname{div}\boldsymbol{u} = 0. \end{gathered} \tag{1}$$

Здесь $\boldsymbol{u} = (u, v, w)$ — скорость, S — концентрация примеси, P — давление, отнесенное к единичной плотности, $\Omega = \Omega\boldsymbol{e}_z$ — угловая скорость вращения Земли, $\Omega\times\boldsymbol{u} = \Omega(-e_x v + e_y u)$, $\boldsymbol{g}$ — ускорение свободного падения, ν и κ — коэффициенты кинематической вязкости и диффузии соли соответственно.

Симметрии моделей сферической и плоской Земли. В геофизической гидродинамике используются две основные модели: глобальная, когда течения происходят на сферической геометрии в центрально симметричном поле силы тяжести $\boldsymbol{g} = -g\boldsymbol{e}_r$, и локальные в приближении плоской Земли и однородном поле тяжести $\boldsymbol{g} = -g\boldsymbol{e}_z$. Однако кроме естественных предположений о том, что выбор модели должен осуществляться с учетом масштаба течений, детального сопоставления свойств моделей до сих пор не проводилось. Вторым распространенным приближением гидродинамики неоднородных сред является приближение Буссинеска. Величина эффектов плавучести обычно характеризуется масштабом стратификации $\Lambda = (d\ln\rho/dz)^{-1}$ и частотой плавучести $N = \sqrt{g/\Lambda}$. При записи системы (1) учтено, что стратификация обычно является слабой и изменением плотности за счет концентрации примеси можно пренебречь всюду, кроме члена, содержащего ускорение свободного падения. При переходе к исходной системе уравнений движения несжимаемой жидкости первое уравнение системы (1) должно быть переписано в виде [1, 3]

$$\boldsymbol{u}_t + (\boldsymbol{u}\nabla)\boldsymbol{u} = -\frac{1}{\rho(S)}\nabla P + \nu\Delta\boldsymbol{u} + \boldsymbol{g} - 2\Omega\times\boldsymbol{u}. \tag{2}$$

Естественным средством анализа общих свойств физических моделей являются непрерывные группы. В сферически симметричном поле силы тяжести $\boldsymbol{g} = -g\boldsymbol{e}_r$ ($x = r\sin\theta\cos\varphi$, $y = r\sin\theta\sin\varphi$, $z = r\cos\theta$) с осью вращения Oz группа симметрии порождается генераторами, отражающими такие фундаментальные свойства физических систем, как однородность времени $X_1 = \partial_t$ (временные сдвиги); взаимосвязь между давлением и концентрацией примеси $X_2 = \partial_S - gr\partial_P$, свободу выбора давления с точностью до произвольной функции времени $X_\pi = \pi(t)\partial_P$. Эти свойства являются общими для всех вышеприведенных моделей. Кроме того, независимо от использования приближения Буссинеска глобальные модели геофизики обладают симметрией поворотов относительно вертикальной оси $Y_1 = \partial_\varphi$ (повороты вокруг оси Oz).

Остальные свойства сферической и плоской моделей существенно различаются. В силу центральной симметрии поля тяготения глобальные модели в приближении Буссинеска обладают в неинерциальной системе координат изотропией пространства относительно осей $O\tilde{x}$ и $O\tilde{y}$, вращающихся вместе с Землей с угловой скоростью Ω, генераторы групп преобразований имеют вид

$$\begin{aligned}
\text{ось } O\tilde{y}\colon\ Y_2 = &-2\cos\tilde{\varphi}\partial_\vartheta + 2\operatorname{ctg}\vartheta\sin\tilde{\varphi}\partial_\varphi + \\
&+ 2\sin\tilde{\varphi}\left(r\Omega + \frac{1}{\sin\vartheta}w\right)\partial_u + \\
&+ 2\left(r\Omega\cos\vartheta\cos\tilde{\varphi} - \frac{1}{\sin\vartheta}u\sin\tilde{\varphi}\right)\partial_w + \\
&+ (r\Omega)^2\sin 2\vartheta\cos\tilde{\varphi}\partial_P, \\
\text{ось } O\tilde{x}\colon\ Y_3 = &\ 2\sin\tilde{\varphi}\partial_\vartheta + 2\operatorname{ctg}\vartheta\cos\tilde{\varphi}\partial_\varphi + \\
&+ \cos\tilde{\varphi}\left(r\,\Omega + \frac{2}{\sin\vartheta}w\right)\partial_u - \\
&- \left(r\,\Omega\cos\vartheta\sin\tilde{\varphi} + \frac{2}{\sin\vartheta}u\cos\tilde{\varphi}\right)\partial_w - \\
&- (r\,\Omega)^2\sin 2\vartheta\sin\tilde{\varphi}\partial_P.
\end{aligned} \tag{3}$$

Здесь $\tilde{\varphi} = \varphi + \Omega t$, $r\sin\theta\sin\tilde{\varphi} = \tilde{y} = \mathrm{inv}$, $r\sin\theta\cos\tilde{\varphi} = \tilde{x} = \mathrm{inv}$.

Модели плоской Земли в силу действия двух однородных полей сил Кориолиса и тяжести в разных направлениях не допускают свойств изотропии пространства вообще, что физически не оправдано. Использование постоянного по направлению поля силы тяжести увеличивает число симметрий локальных моделей за счет другого основного физического принципа — принципа относительности Галилея, расширенного за счет всех поступательно движущихся систем координат.

$$\begin{aligned}
X_\chi &= \chi(t)\partial_x + \dot{\chi}(t)\partial_u - (\ddot{\chi}(t)x + \dot{\chi}(t)\Omega y)\partial_P, \\
X_\eta &= \eta(t)\partial_y + \dot{\eta}(t)\partial_v - (\ddot{\eta}(t)y - \dot{\eta}(t)\Omega x)\partial_P, \\
X_\zeta &= \zeta(t)\partial_z + \dot{\zeta}(t)\partial_w - \ddot{\zeta}(t)z\partial_P,
\end{aligned} \tag{4}$$

где $\chi(t)$, $\eta(t)$ и $\zeta(t)$ — произвольные функции времени, физическое содержание которых — закон движения системы координат относительно исходной в направлениях x, y и z соответственно.

При постоянных значениях функций χ, η и ζ генераторы (4) переходят в генераторы групп пространственных сдвигов. Преобразования Галилея стандартного вида следуют из (4) при линейной зависимости произвольных функций от времени. Несмотря на непотенциальный характер сил Кориолиса, силы инерции, возникшие при переходе в неинерциальную систему координат, не меняют вида уравнений движения, а приводят лишь к перенормировке давления. Этот эффект аналогичен переходу от полного давления и солености к динамическим переменным за счет взаимной компенсации гидростатических составляющих.

Модели со сферически симметричным полем силы тяжести означают фиксацию положения начала отсчета, что приводит к потере симметрий, связанных с однородностью пространства. Дополнительной симметрией в этом случае является модифицированная за счет эффектов вращения симметрия автомодельных преобразований с генератором

$$\begin{aligned}
Z_1 = 2t\partial_t + r\partial_r - 2\Omega t\partial_\varphi - v\partial_v - u\partial_u - (2\Omega r\sin\vartheta + w)\partial_w - \\
- 3S\partial_S - 2(P + r^2\Omega^2\sin^2\vartheta)\partial_P.
\end{aligned} \tag{5}$$

Симметриями автомодельных преобразований обладают многие гидродинамические модели, и они широко используются для построения точных решений. В случае плоской геометрии присутствие вращения делает невозможным наличие у модели любых симметрий растяжения.

Полные уравнения движения и приближение Буссинеска. Особенности, вносимые приближением Буссинеска в геофизические модели, изучались на примере уравнений стратифицированной жидкости, записанных в отсутствие сил Кориолиса для однородного поля силы тяжести (уравнения (1) и (2) при $\Omega = 0$). Поскольку полный список симметрий уравнений стратифицированных течений приведен в работе [4], отметим здесь только наиболее существенные изменения, вносимые приближением Буссинеска.

Отличительной чертой общих уравнений несжимаемой стратифицированной жидкости (2) является точное следование принципу относительности Галилея без возможности его расширительного толкования (4). В этом случае генераторы групп преобразований совпадают с генераторами уравнений газовой динамики и имеют вид

$$X_{3,4,5} = t\partial_{x_i} + \partial_{u_i}, \quad i = 1, 2, 3. \tag{6}$$

Анализ показывает, что расширение симметрии (6) для уравнений (1) происходит из-за пренебрежения зависимостью плотности от солености в члене, содержащем давление, и, таким образом, из-за придания стратифицированной жидкости свойства баротропности, которым обладают далеко не все течения.

Второй отличительной чертой приближения Буссинеска является установление различия между гравитационной и инерционной массами. Следствие этого факта — появление анизотропии при переходе в свободно падающую систему координат. Если исходная модель инвариантна относительно трех групп вращения в горизонтальной и вертикальных (с модификацией) плоскостях соответственно:

$$Y_4 = y\partial_x - x\partial_y + v\partial_u - u\partial_v, \tag{7}$$
$$Y_{5,6} = \left(\tfrac{1}{2}gt^2 + z\right)\partial_{x_i} - x_i\partial_z + (gt + w)\partial_{u_i} - u_i\partial_w,$$

то уравнения (1) инвариантны только по отношению к поворотам в горизонтальной плоскости.

Таким образом, и приближение однородного поля силы тяжести, и приближение Буссинеска вносят существенные изменения в базисные свойства моделей геофизических течений. Хотя сам по себе этот факт не является основой для отказа от использования упрощенных моделей к экстраполяции результатов, полученных на их основе, к природным системам должны предъявляться повышенные требования. Приведенный в следующей части анализ является другим примером сингулярной зависимости свойств решений от слабых эффектов, не влияющих на порядок уравнений движения.

Влияние стратификации на разделение переменных и свойства решений двумерных стационарных уравнений несжимаемой жидкости. Несмотря на то что задача построения стационарных решений для течений с отличной от нуля завихренностью в однородной жидкости является классической задачей гидродинамики [5], некоторые аспекты автомодельных решений в теории вихревых течений остаются предметом исследований до настоящего времени [6]. В настоящей работе на примере стационарных двумерных уравнений идеальной несжимаемой жидкости рассматривается задача построения решений вихревых течений методом разделения переменных в цилиндрической системе координат (r, φ), изучается равномерность предельного перехода от стратифицированной среды к однородной.

Пользуясь инвариантностью относительно поворотов уравнений идеальной однородной жидкости, будем искать стационарные решения и в виде разложений в ряд Фурье по угловой переменной

$$\psi = \sum_{n=0} \psi_n \exp(in\varphi). \tag{8}$$

Для интерпретации результатов используются два вида уравнения движения, записанных в переменных «функция тока – соленость». При этом уравнение для переноса примеси

$$\{\psi_\varphi \partial_r - \psi_r \partial_\varphi\} S = 0 \tag{9}$$

сразу будет предполагаться проинтегрированным исходя из широко распространенного предположения о линейной связи функции тока и стратифицирующей компоненты $S = S_0\psi$. Уравнение для завихренности $\omega = -\Delta\psi$ в одном случае будет однократно проинтегрировано, а во втором оставлено неизменным. С учетом последних замечаний выпишем два вида уравнений движения:

$$\{\psi_\varphi \partial_r - \psi_r \partial_\varphi\}\Delta\psi + \frac{S_0}{\mathrm{Fr}}[r\cos\varphi\partial_r - \sin\varphi\partial_\varphi]\,\psi = 0, \tag{10}$$

$$\Delta\psi = F(\psi) + \frac{S_0}{\mathrm{Fr}} r \sin\varphi, \tag{11}$$

где F — произвольная функция, Fr — число Фруда, $\Delta = \partial_r^2 + r^{-1}\partial_r + r^{-2}\partial_\varphi^2$ — оператор Лапласа в цилиндрической системе координат.

В ходе решения для однородной жидкости завихренность будет предполагаться отличной от нуля, что в случае стратифицированной жидкости выполняется автоматически из-за наличия дополнительного слагаемого в уравнении (11). Постоянная интегрирования S_0 входит в уравнения (10) и (11) регулярным образом так, что уравнения однородной жидкости при отсутствии диссипации получаются из уравнений стратифицированной жидкости простым обращением S_0 в нуль.

Решения уравнений однородной жидкости. Одночленные решения. Уравнение (10) для однородной жидкости явно не содержит угловую переменную и, следовательно, инвариантно относительно сдвигов по φ, тогда можно искать решение в виде разделяющихся переменных вида

$$\psi = \psi_n(r)\exp(in\varphi). \tag{12}$$

Подстановка представления (12) в (10) для радиальной части решения приводит к уравнению Бесселя

$$\frac{(L_n\psi_n)_r}{L_n\psi_n} = \frac{\psi_{n,r}}{\psi_n} \quad \text{или} \quad L + n\psi_n = \pm\lambda^2\psi_n, \tag{13}$$

где $L_n = \partial_r^2 + r^{-1}\partial_r - (n/r)^2$, λ — произвольная постоянная.

В зависимости от значений параметра λ решениями уравнения (13) будут функции Бесселя целого порядка действительного $\{J_n(\lambda r), Y_n(\lambda r)\}$, мнимого $\{K_n(\lambda r), I_n(\lambda r)\}$ и, вообще говоря, комплексного аргумента $\{H_n^{(1,2)}(\lambda r)\}$. В отличие от линейных уравнений аргумент собственных функций решений нелинейного уравнения (10) оказывается зависимым от постоянной интегрирования λ. В силу нелинейности принцип суперпозиции решений теряет общность, и должны быть определены условия совместности уравнения (10) с линейными комбинациями решений (13), взятыми для разных значений параметра n.

Двучленные разложения. Пусть решение уравнения (10) является линейной комбинацией функций

$$\psi = \psi_n(r)\exp(in\varphi) + \psi_m(r)\exp(im\varphi). \tag{14}$$

Тогда условие разделения переменных, как и ранее, ограничивает вид радиальных составляющих решений (14) функциями Бесселя

$$L_n\psi_n = \pm\lambda^2\psi_n \quad \text{и} \quad L_m\psi_m = \pm\mu^2\psi_m, \tag{15}$$

а принципу суперпозиции будут удовлетворять решения, у которых $\mu = \lambda$.

Аналогично могут быть построены решения, состоящие из любого конечного числа членов. Воспользовавшись условием (13), можно показать, что решения, состоящие из конечного числа мод, отвечают линейной связи между завихренностью и функцией тока ($F(\psi) = \pm\lambda^2\psi$ в уравнении (11). Связям нелинейного типа (собственно нелинейным особенностям гидродинамических уравнений) отвечает бесконечное число членов ряда Фурье (8). После подстановки (8) в уравнение (10) коэффициенты ряда определяются рекуррентно, причем для нулевого члена разложения рекуррентные уравнения удовлетворяются тождественно (следствие условия несжимаемости для двумерной задачи):

$$n[\psi_n(L_0\psi_0)_r - \psi_{0,r}L_n\psi_n] = \\ = \sum_{m=1}^{n-1}[(n-m)\psi_{m,r}L_{n-m}\psi_{n-m} - m\psi_m(L_{n-m}\psi_{n-m})_r], \\ n = 1, 2, 3, \ldots . \quad (16)$$

Здесь $\psi_0(r)$ — произвольная функция r.

Рекуррентные уравнения (16) (уравнения второго порядка) показывают, что решение вида (8) определено с точностью до одной произвольной функции, остальные члены ряда существенно зависят от выбора функции ψ_0. Поэтому можно говорить, что решение вида (8) представлено функцией ψ_0. Если ψ_0 является функцией Бесселя, то тогда снова справедлива линейная связь между завихренностью и функцией тока.

Решения уравнений стратифицированной жидкости. Рассмотрим особенности, вносимые в вихревые течения идеальной жидкости силами плавучести, в случае, когда концентрация примеси связана с функцией тока линейным соотношением. В силу выделенного положения вертикальной оси возможно одномодовое представление решения вида

$$\psi = \psi_1(r)\sin\varphi,$$

подстановка которого в уравнение (10) дает

$$\{\psi_1\partial_r - \psi_{1,r}\}\,L_1\psi_1 + \frac{S_0}{\mathrm{Fr}}(r\partial_r - 1)\,\psi_1 = 0. \quad (17)$$

Сравнение уравнения (17) с аналогичным уравнением для однородной жидкости (15) показывает, что решение (17) не ограничивается только функциями Бесселя. Однако учитывая особое значение, которое имеет линейная функция r для оператора уравнения (17), решение опять можно быстро построить, используя представление

$$\psi_1 = Ar + f_1, \quad (18)$$

где функция $f_1(\lambda r)$ удовлетворяет уравнению (15) при $n = 1$ с постоянной интегрирования λ, A — постоянная величина, подлежащая определению. Подстановка выражения (18) в уравнение (17) с учетом связи $L_1\psi_1 = \pm\lambda^2 f_1$ дает

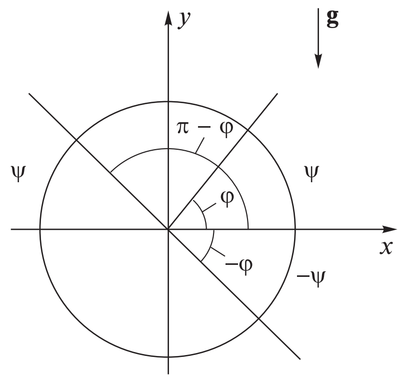
$$A = \mp S_0/\,\mathrm{Fr}\,\Lambda^2.$$

Решение (18) отвечает линейной связи между завихренностью, функцией тока и концентрацией примеси, выделенная линейная часть в функции тока имеет ясный физический смысл исходной стратификации, тогда f_1 приобретает смысл возмущения, которое в приближение Буссинеска предполагается малым. Построение многочленных решений может быть выполнено на основе однократно проинтегрированного уравнения движения (11), когда в качестве F выбрана линейная функция

$$\Delta\psi = \pm\lambda^2\psi + \frac{S_0}{\mathrm{Fr}}r\sin\varphi.$$

Как и в случае однородной жидкости, нелинейные свойства уравнений стратифицированной жидкости можно изучать только на основе бесконечного числа гармоник, т. е. с использованием всего ряда Фурье. Перед построением решения изучим свойства симметрии уравнения (10). Замена $\varphi \to -\varphi$ и требование неизменности определяющего уравнения выражают физически обусловленную симметрию «верх–низ» стратифицированной жидкости (утонуть так же тяжело, как и всплыть) как условие нечетности функции тока $\psi(-\varphi) = -\psi(\varphi)$. Другая симметрия — симметрия отражения относительно оси Oy не меняет вертикального положения частиц жидкости, следствием это факта является «четность» функции тока относительно замены $\varphi \to \pi - \varphi$, $\psi(\pi - \varphi) = \psi(\varphi)$ (рис. 1). Использование свойств симметрии позволяет, не решая задачу, определить, что разложение в ряд Фурье должно производиться только по синусам (симметрия относительно оси Ox), более того, отличными от нуля будут только нечетные члены ряда (симметрия относительно оси Oy):

$$\psi = \sum_{n=0}^{\infty}\psi_n\sin((2n+1)\varphi). \quad (19)$$



Дискретные симметрии стационарных уравнений стратифицированной жидкости

Таким образом, на примере стационарных двумерных стратифицированных течений показано, что нелинейные особенности уравнений приводят к появлению бесконечного числа гармоник в решении. В широко распространенном случае линейной связи между завихренностью и функцией тока решения уравнений стратифицированной жидкости опять, как и в случае однородной жидкости, описываются функциями Бесселя.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 05-01-00154).

Литература

1. *Каменкович В.М.* Основы динамики океана. Л., 1973.
2. Физика океана. Т. 2. Гидродинамика океана / Под ред. А.С. Монина. М., 1978.
3. *Миропольский Ю.З.* Динамика внутренних гравитационных волн в океане. Л., 1981.
4. *Байдулов В.Г., Чашечкин Ю.Д.* // ДАН. 2002. **387**, № 6. С. 760.
5. *Бэтчелор Дж.* Введение в динамику жидкости. М., 1973.
6. *Черный Г.Г.* // Изв. РАН. Сер. Механика жидкости и газа. 1997. № 4. С. 39.

Поступила в редакцию
13.09.06