УДК 530.1

РАЗМЕРНАЯ ПЕРЕНОРМИРОВКА БЕЗ НЕЦЕЛЫХ РАЗМЕРНОСТЕЙ

Д. А. Славнов

(кафедра квантовой теории и физики высоких энергий)

Построена схема перенормировки для производящего функционала функций Грина. Предложенная схема является некоторым вариантом размерной перенормировки, но в ней используются только конечные целые положительные размерности.

Известно, что наиболее популярная сейчас схема перенормировок, основанная на размерной регуляризации [1], столкнулась со значительными трудностями в киральных и суперсимметричных моделях. Это неудивительно, так как в этих моделях существенно используются размерные свойства координатного и импульсного пространств. Как последовательно сформулировать такие свойства в пространствах, которые формально обладают нецелыми размерностями, не очень понятно.

В данной статье будет предпринята попытка так переформулировать размерную перенормировку, чтобы, с одной стороны, сохранить ее положительные черты, в первую очередь сравнительно простой математический аппарат, а с другой — освободить ее от нецелых размерностей.

Все рассмотрение будет проведено в рамках перенормировочной схемы, названной автором «перенормировкой по линиям» [2]. Сущность этой схемы сводится к следующему. Амплитуду Фейнмана $\mathcal{G}_s((p)_s^{\text{out}})$, сопоставляемую диаграмме G_s, формально можно представить в виде

$$\mathcal{G}_s((p)_s^{\text{out}}) = \int dp\, D_l(p) * \mathcal{G}_{s/l}((p)_s^{\text{out}}, p, -p). \qquad (1)$$

Здесь $\mathcal{G}_{s/l}$ — амплитуда Фейнмана, сопоставляемая диаграмме $G_{s/l}$, которая получается из диаграммы G_s разрывом внутренней линии l. Пропагатор, соответствующий этой линии, обозначен через $D_l(p)$, свертка по индексам (здесь опущенным) этого пропагатора и амплитуды $\mathcal{G}_{s/l}$ — символом $(*)$. Совокупность всех внешних импульсов диаграммы G_s обозначена через $(p)_s^{\text{out}}$, то же для диаграммы $G_{s/l}$ — через $(p)_s^{\text{out}}, p, -p$.

К сожалению, формула (1) далеко не всегда имеет четкий математический смысл, так как из-за ультрафиолетовых расходимостей интеграл в правой части может расходиться.

В статье [2] умножение на пропагатор $D_l(p)$, свертка по его индексам и интегрирование по импульсу p рассматриваются как формальное определение единого линейного оператора

$$\int dp\, D_l(p) * \ldots, \qquad (2)$$

который действует на амплитуду $\mathcal{G}_{s/l}$. В том случае, когда интеграл в правой части равенства (1) расходится, оператор (2) предлагается заменить его линейным расширением, которое несколько условно обозначается

$$\int d\mu(p)\, D_l(p) \ldots. \qquad (3)$$

Условность связана с тем, что вводимое в (3) «перенормированное интегрирование» $\int d\mu(p)\ldots$ должно включать в себя некоторую вычитательную процедуру, поэтому от меры $\mu(p)$ нельзя требовать положительной определенности.

В статье [2] показано, что если такое расширение существует, то формула

$$\mathcal{G}_s((p)_s^{\text{out}}) = |L_s|^{-1} \int d\mu(p)\, D_l(p) \sum_{l \in G_s} \mathcal{G}_{s/l}((p)_s^{\text{out}}, p, -p) \qquad (4)$$

рекуррентным образом определяет амплитуду $\mathcal{G}_s((p)_s^{\text{out}})$, которая совпадает с перенормированной амплитудой Фейнмана, построенной с помощью R-операции Боголюбова–Парасюка [3] при определенной фиксации в последней конечной перенормировки.

Формула (4) написана в предположении, что все линии (пропагаторы), фигурирующие в модели, распределены по конечному числу упорядоченных типов: первый, второй, ..., N-й. Разбиение по типам может быть любым, но единым для всех диаграмм и поддиаграмм. Например, к первому типу можно отнести пропагаторы всех фермионных полей, ко второму — электромагнитного поля, к третьему — всех остальных полей. Суммирование по l в правой части (4) идет по всем внутренним для диаграммы G_s линиям определенного типа. При этом предполагается, что амплитуды $\mathcal{G}_{s/l}$ получены по тому же рецепту, причем суммирование проводится по линиям того же типа, если такие линии в диаграмме $G_{s/l}$ имеются, если их нет, то суммирование проводится по линиям предыдущего типа.

Получим теперь аналог формулы (4) для функций Грина, точнее для производящего функционала $Z(j)$ функций Грина. Дальнейшие рассуждения удобнее проводить, используя в пространстве импульсов евклидову метрику.

Пусть динамика системы описывается евклидовым действием

$$S_E(\varphi) = \sum_{n=1}^{N} I_E^n(\varphi) + W_E(\varphi), \qquad (5)$$

которое включает в себя вклады как от физических полей, так и от духовых, а также, если необходимо, члены, фиксирующие калибровку. Множество полей φ разбито на N типов:

$$\varphi = \{\varphi_u^n\}, \qquad n = 1, \ldots, N.$$

Здесь индекс u различает поля внутри одного типа. Это могут быть как разные поля, так и поля, сопряженные друг другу. Каждое слагаемое $I_E^n(\varphi)$ в правой части (5) зависит только от полей типа n, квадратично по этим полям и при квантовании определяет соответствующий евклидов пропагатор

$$\langle \varphi_u^n(p)\varphi_v^n(p')\rangle_E = iD_{uv}^n(p)_E\delta(p+p').$$

Как известно, производящий функционал формально можно представить в виде

$$Z(j) = \mathcal{N}^{-1}\exp\left\{-W\left(\frac{\delta}{\delta j}\right)\right\}\times$$
$$\times\exp\left\{\frac{i}{2}\int dp_E\sum_{n=1}^{N}\sum_{u,v} j_u^n(p)D_{uv}^n(p)_E j_v^n(-p)\right\}, \tag{6}$$

где $\mathcal{N}$ — нормировочный множитель, $j_u^n(p)$ — токи, варьируя по которым функционал $Z(j)$, можно получить соответствующие функции Грина. После этого следует умножить правую часть формулы (6) на ${}_E(j,\varphi)|_{\varphi=0}$, где

$$_E(j,\varphi) = \exp\left\{\sum_{n=1}^{N}\int dp_E\sum_u j_u^n(p)\varphi_u^n(p)\right\},$$

выполнить варьирование по j, наконец, заменить j на варьирование по φ. В результате формула (6) приобретет вид

$$\begin{aligned} Z(j) = \mathcal{N}^{-1}\prod_{n=1}^{N}\exp\left\{\frac{1}{2}\int dp_E\sum_{u,v}\frac{\delta}{\delta\varphi_u^n(p)}\times\right.\\ \left.\times D_{uv}^n(p)_E\frac{\delta}{\delta\varphi_v^n(-p)}\right\}\times\\ \times\exp\{-W_E(\varphi)\}C_E(j,\varphi)|_{\varphi=0}. \end{aligned} \tag{7}$$

Конечно, для реального нахождения функций Грина формула (7) непригодна, так как фигурирующие в ней интегралы по p могут расходиться. Однако легко сообразить, как она должна быть исправлена. Линейный оператор

$$\int dp_E\sum_{u,v}\frac{\delta}{\delta\varphi_u^n(p)}D_{uv}^n(p)_E\frac{\delta}{\delta\varphi_v^n(-p)} \tag{8}$$

на формальном уровне добавляет к каждой функции Грина одну дополнительную внутреннюю линию типа n. Для амплитуд Фейнмана это осуществляется с помощью оператора (2) согласно формуле (1). Чтобы избавиться от расходимостей в формуле (1), оператор (2) надо заменить на его линейное расширение (3). Аналогично, чтобы избавиться от расходимостей в формуле (7), нужно заменить оператор (8) на его линейное расширение

$$\Delta_E^n = \int d\mu(p)\sum_{u,v}\frac{\delta}{\delta\varphi_u^n(p)}D_{uv}^n(p)_E\frac{\delta}{\delta\varphi_v^n(-p)}. \tag{9}$$

Тогда формула (7) трансформируется в следующую:

$$\begin{aligned} Z(j) = \mathcal{N}^{-1}\exp\{\Delta^N/2\}\ldots\exp\{\Delta^1/2\}\times\\ \times\exp\{-W_E(\varphi)\}C_E(j,\varphi)|_{\varphi=0}. \end{aligned} \tag{10}$$

Формула (10) — аналог формулы (4). Однако между ними есть два отличия. Во-первых, формула (10) не является рекуррентной, во-вторых, в ней нет принудительной симметризации по внутренним линиям, так как симметризация осуществляется автоматически.

Чтобы с помощью формулы (10) реально можно было бы получить производящий функционал для перенормированных функций Грина, нужно построить операцию «перенормированного интегрирования» $\int d\mu(p)$, которая фигурирует в формуле (9) (и (4)). Для этой цели воспользуемся в качестве отправной точки рецептом, сформулированным в так называемой «перенормировке по асимптотикам». Первоначальный вариант рецепта был предложен в статье [4]. В этом варианте импульсное пространство считалось четырехмерным. Однако в дальнейшем выяснилось, что такой рецепт теряет однозначность, когда он применяется к диаграммам с достаточно большим числом внешних импульсов. Этот недостаток был преодолен в статье [5], в которой был сформулирован усовершенствованный второй вариант рецепта. Усовершенствование потребовало достаточно большой жертвы — пришлось использовать на промежуточных стадиях импульсные пространства с размерностями, отличными от четырех. Здесь ясно просматривается аналогия с размерной регуляризацией. Однако в отличие от последней в перенормировке по асимптотикам удалось ограничиться целыми (можно четными) положительными размерностями. Для диаграмм конечного порядка по константе связи достаточны конечные размерности.

Рецепт построения операции перенормированного интегрирования основывается на теореме, доказанной в статье [5].

Пусть p, k_i, k_j $(i,j = 1,\ldots,r)$ — векторы в 2ζ-мерном $(\zeta \geqslant 2)$ пространстве; пусть в пространстве размерности d $(r \leqslant d < 2\zeta)$ все скаляры p^2, pk_i, k_ik_j независимы; пусть $F(p^2, pk_i, k_ik_j)$ — скалярная функция скалярных аргументов, абсолютно интегрируемая по компактной области и представимая в виде

$$F(p^2, pk_i, k_ik_j) = F_1(p^2, pk_i, k_ik_j) + F_2(p^2, pk_i, k_ik_j), \tag{11}$$

где F_1 — абсолютно интегрируема в компактной области, $(p^2)^2F_1$ при $|p| \to \infty$ убывает, а $(p^2)^2F_2$ является полиномом по p^2, pk_i, $\ln p^2$; тогда в формуле

$$\Phi(k_ik_j,\varepsilon)=(-1)^\zeta(\mu^2)^{-\varepsilon}\pi^{2-\zeta+\varepsilon}\Gamma^{-1}(\varepsilon)\times$$
$$\times\int d^{2\zeta}p\int_0^\infty d\omega^2(\omega^2)^{\varepsilon-1}\left(\frac{\partial}{\partial\omega^2}\right)^{\zeta-2}U(\omega)\,\mathcal{P}\,F(p^2,pk_i,k_ik_j) \tag{12}$$

все интегралы абсолютно сходятся, Φ не зависит от ζ при $2\zeta>d$, является скалярной функцией независимых скалярных аргументов k_ik_j и аналитической функцией ε в области $0\leqslant \mathrm{Re}\,\varepsilon<1$ с возможными полюсами в точке $\varepsilon=0$, Γ — гамма функция, μ — параметр размерности массы, операторы $\mathcal{P}$ и U определяются равенствами

$$\mathcal{P}\,F=F_1,\qquad U\,F_1(p^2,pk_i,k_ik_j)=F_1(p^2+\omega^2,pk_i,k_ik_j).$$

Далее в данной статье ограничимся моделями, в которых фигурируют только скалярные поля. Случай векторных и спинорных полей будет рассмотрен в следующей публикации. Как следует из теоремы Вайнберга [6] и ее обобщения [7], в скалярных моделях перенормированные функции Грина и амплитуды Фейнмана, умноженные на пропагатор $D_l(p)$, являются либо функциями типа (11), либо функциями (11), дополнительно умноженными на δ-функции от некоторой линейной комбинации импульсов p и k_i. Вариант, когда в аргументе δ-функции фигурирует импульс интегрирования p, является тривиальным, так как в этом случае интеграл по p сходится и операторы (2) и (8) не требуют расширения. В остальных случаях перенормированное интегрирование можно определить формулой

$$\int d\mu(p)\ldots=\mathcal{L}(\varepsilon\downarrow 0)(-1)^\zeta(\mu^2)^{-\varepsilon}\pi^{2-\zeta+\varepsilon}\Gamma^{-1}(\varepsilon)\times$$
$$\times\int d^{2\zeta}p\int_0^\infty d\omega^2\,(\omega^2)^{\varepsilon-1}\left(\frac{\partial}{\partial\omega^2}\right)^{\zeta-2}U(\omega)\,\mathcal{P}\ldots \tag{13}$$

Здесь $\mathcal{L}(\varepsilon\downarrow 0)$ — операция разложения в ряд Лорана по ε с сохранением единственного члена порядка ε^0.

Формула (13) очень напоминает операцию интегрирования в пространстве нецелой размерности $2\zeta+2\varepsilon$. Однако имеются два приятных отличия. Во-первых, пространство импульсов p имеет целую размерность 2ζ, это значительно облегчает анализ симметрийных свойств функций Грина, в которых существенна размерность пространства. Во-вторых, окончательный результат интегрирования оказывается не зависящим от ζ при достаточно больших ζ. В формуле (13) это достигается за счет частичной взаимной компенсации 2ζ-мерного интегрирования по p и $(\zeta-2)$-кратного дифференцирования по ω^2.

Вместе с тем в формуле (13) имеется одно досадное отличие от аналогичной формулы интегрирования в пространстве с нецелой размерностью, оно заключается в наличии оператора $\mathcal{P}$. При рассмотрении простых диаграмм не составляет большого труда разложить подынтегральное выражение согласно формуле (11) и явно построить оператор $\mathcal{P}$, но для сложных диаграмм это весьма затруднительно.

В связи с этим формуле (13) удобно придать несколько иной вид:

$$\int d\mu(p)\,F(p^2,pk_i)=\mathcal{L}(\varepsilon\downarrow 0)(-1)^{\zeta-2}(\mu^2)^{-\varepsilon}\pi^{2-\zeta+\varepsilon}\Gamma^{-1}(\varepsilon)\times$$
$$\times\lim_{\beta\to 0}\int d^{2\zeta}p\,(p^2+\mu^2)^{-\beta}\times$$
$$\times\int_0^\infty d\omega^2\,(\omega^2)^{\varepsilon-1}\left(\frac{\partial}{\partial\omega^2}\right)^{\zeta-2}F(p^2+\omega^2,pk_i). \tag{14}$$

Здесь предел по β играет роль аналитического продолжения в нуль от тех значений β, при которых интегралы по ω и p сходятся. В формуле (14) предполагается, что функция $F(p^2,pk_i)$ допускает разложение (11), аргументы k_ik_j у этой функции опущены, так как для дальнейшего они несущественны.

Заметим, что операторы $U(\omega)$ и $\mathcal{P}$ в формуле (14) отсутствуют. Впрочем, операция $U(\omega)$ выполнена явно. Операция $\mathcal{P}$ в (14) также присутствует, но неявно. Убедимся в этом. Будем рассматривать F как функцию векторов p, k_i $(i=1,\ldots,r)$ пространства $S_{2\zeta}$ размерности 2ζ. Пусть векторы k_i лежат в его подпространстве S_d. Обозначим через $p_1,\ldots,p_d$ проекции вектора p на орты пространства S_d и рассмотрим интеграл (14) от функций F вида

$$C(k_i)(p_1)^{2\alpha_1}\ldots(p_d)^{2\alpha_d}(p^2)^\alpha(\ln p^2)^{\alpha_0},$$

где α_0, α_1, …, α_d — целые неотрицательные числа, а $\alpha\geqslant-\tilde\alpha$, $\tilde\alpha=2+\alpha_1\ldots+\alpha_d$. При $\alpha_0=0$ интеграл (14) вычисляется явным образом и приводит к выражению вида

$$\mathcal{L}(\varepsilon\downarrow 0)\lim_{\beta\to 0}(\mu^2)^{-\beta}\Gamma^{-1}(\beta)\Gamma(\beta-\alpha-\tilde\alpha-\varepsilon)\mathcal{M}, \tag{15}$$

где в $\mathcal{M}$ собраны все несущественные множители, которые конечны и не зависят от β. Благодаря предельному переходу по β выражение (15) обращается в нуль. При $\alpha_0\neq 0$ интеграл (14) вычисляется с помощью α_0-кратного дифференцирования выражения (15) по α. В результате опять-таки получается нуль.

Отсюда следует, что для функций F вида (11) правая часть формулы (14) не меняется при замене F на $\mathcal{P}\,F$, поэтому можно считать, что оператор $\mathcal{P}$ в правой части (14) эффективно присутствует.

Оказывается, что результат, получаемый с помощью формулы (14), совпадает с тем, который можно получить в формализме размерной регуляризации в варианте, предложенном Вильсоном [8] (см. также [9]). Убедиться в этом можно следующим образом. Так как функция F в правой части (14) стоит под знаком дифференцирования, то, не меняя результата, из нее можно вычесть несколько первых членов разложения в ряд Маклорена и взять интеграл по частям. После этого выражение, стоящее в правой части (14) после оператора $\mathcal{L}(\varepsilon\downarrow 0)$, перепишется в виде

$$(\mu^2)^{-\varepsilon}I(\varepsilon)\equiv(\mu^2)^{-\varepsilon}\lim_{\beta\to 0}\int d^{2\zeta}p\,(p^2+\mu^2)^{-\beta}I_\perp(p;\varepsilon-\zeta+2), \tag{16}$$

где

$$I_\perp = \pi^{2-\zeta+\varepsilon}\Gamma^{-1}(\varepsilon-\zeta+2)\int\limits_0^\infty d\omega^2\,(\omega^2)^{\varepsilon-\zeta+1}\times \\ \times\left[F(p^2+\omega^2,pk_i)-\sum_{l=0}^{\zeta-3}\frac{(\omega^2)^l}{l!}F^{(l)}(p^2,pk_i)\right]. \tag{17}$$

По терминологии Вильсона, формула (17) представляет собой не что иное, как определение интеграла от функции $F(p^2+\omega^2,pk_i)$ по «поперечному пространству» нецелой размерности $2(\varepsilon-\zeta+2)$. В свою очередь формула (16) определяет $I(\varepsilon)$ как интеграл по «продольному пространству» целой положительной размерности 2ζ от $I_\perp(p)$. Совместно формулы (16) и (17) задают $I(\varepsilon)$ как интеграл нецелой размерности $4+2\varepsilon$ от функции $F(p,k_i)$. Поэтому при желании можно воспользоваться хорошо разработанной техникой интегрирования по пространствам нецелой размерности. Надо только иметь в виду, что каждое такое интегрирование будет проводиться со своим значением ε (ε_1, ε_2 и т.д.). Для перехода к физической размерности нужно к полученному результату последовательно применять операции $\mathcal{L}(\varepsilon_2\downarrow 0)$, $\mathcal{L}(\varepsilon_1\downarrow 0)$ и т.д.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 96-01-00726).

Литература

1. *'tHooft G., Veltman M.* // Nucl. Phys. 1972. **B44**. P.189
2. *Славнов Д.А.* // ТМФ. 1997. **110**. С.399.
3. *Боголюбов Н.Н., Парасюк О.С.* // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1956. **20**. С.585.
4. *Ильин В.А., Имашев М.С., Славнов Д.А.* // ТМФ. 1982. **52**. С.177.
5. *Славнов Д.А.* // ТМФ. 1985. **62**. С.335.
6. *Weinberg S.* // Phys. Rev. 1960. **118**. P.838.
7. *Славнов Д.А.* // ТМФ. 1973. **17**. С.169.
8. *Wilson K.G.* // Phys. Rev. 1973. **D7**. P.2911.
9. *Коллинз Дж.* Перенормировка. М., 1988.

Поступила в редакцию
06.06.97