

Результаты данной работы позволяют решить [5] задачу интегрирования (авто)преобразований Беклунда для уравнения (3) в нелокальных переменных, а также построить нелокальные законы сохранения и симметрии уравнения Лиувилля.

Автор благодарен А.М. Вербовецкому, И.С. Красильщику, А.В. Овчинникову и В.В. Трушкову за полезные замечания и конструктивную критику. Работа выполнена при частичной финансовой поддержке INTAS, грант YS 2001/2-33.

Литература

1. Бочаров А.В., Вербовецкий А.М., Виноградов А.М. и др. Симметрии и законы сохранения уравнений математической

физики / Под ред. А.М. Виноградова, И.С. Красильщика. М.: Факториал, 1997.

2. Igonin S., Krasil'shchik I.S. // Adv. Studies in Pure Math., Math. Soc. of Japan, 2002 (в печати).
3. Krasil'shchik I.S., Kersten P.H.M. Symmetries and recursion operators for classical and supersymmetric differential equations. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht etc., 2000.
4. Dodd R.K., Bullough R.K. // Proc. Roy. Soc. London, 1976, **A351**. С. 499.
5. Киселев А.В. // Сб. «Ломоносов-2002». Сек. «Физика». 2002. М.: Изд-во Моск. ун-та. С. 35.

Поступила в редакцию
21.12.01

УДК 517.55

ОБОБЩЕНИЕ $1/N$ РАЗЛОЖЕНИЯ В ТЕОРИЯХ С МАТРИЧНЫМИ ПОЛЯМИ

Д. В. Малышев

(кафедра квантовой статистики и теории поля)

E-mail: malyshev@gate.itep.ru

Фейнмановские диаграммы в теориях с матричными полями $\Phi \in \text{Mat}(N, N)$ являются ленточными графами. Есть взаимнооднозначное соответствие между ленточными графами и поверхностями с границей и с клеточным разбиением. Степень N в фейнмановских интегралах зависит только от топологии соответствующей поверхности. В работе показано, что это верно и для обобщенных ленточных графов. Такие графы соответствуют поверхностям с разбиением на сферы с отверстиями.

Введение

Основной метод вычислений в квантовой теории поля — разложение в ряд по константе связи. В теориях с матричными полями $\Phi \in \text{Mat}(N, N)$ есть новый параметр $1/N$, по которому можно проводить разложение [1]. В последнее время интерес к $1/N$ разложению сильно возрос в связи с так называемым AdS/CFT соответствием [2–6], также $1/N$ разложение играет важную роль в некоммутативных и в матричных теориях [7, 8].

$1/N$ разложение было сформулировано т'Хофтом для теорий, в которых взаимодействие имеет вид следа от произведения матриц [1]. В частности, так устроены теории Янга–Миллса, описывающие электрослабые и сильные взаимодействия. Вследствие тождеств Славнова–Тейлора перенормировки в теориях Янга–Миллса не меняют вид взаимодействия [9]. Это неверно в случае произвольных теорий с матричными полями, где перенормировки приводят к появлению в лагранжиане взаимодействия произведений следов матриц [10]. Например, в теории с комплексным полем Φ и затравочным взаимодействием $L_{\text{int}} = g \text{Tr}[(\Phi\Phi^+)^2]$ перенормировки приводят к появлению взаимодействия $\tilde{L}_{\text{int}} = \tilde{g}(\text{Tr}[\Phi\Phi^+])^2$. С другой стороны, мультиследовые взаимодействия

можно вводить, чтобы нарушить суперсимметрию [11, 12], поэтому довольно широко обсуждается роль мультиследовых операторов в AdS/CFT соответствии [11–14].

В настоящей работе формулируется обобщение $1/N$ разложения для теорий с мультиследовыми взаимодействиями. Оно основано на соответствии между фейнмановскими диаграммами в таких теориях и поверхностями.

1. Ленточные графы и $1/N$ разложение

Фейнмановские диаграммы в теориях с матричными полями изображаются ленточными графами. Если взаимодействие имеет вид следа от произведения полей $L_{\text{int}} = g \text{Tr}(\Phi_1 \dots \Phi_n)$, то в соответствующей вершине графа разрешены только циклические перестановки ребер. Другие перестановки, вообще говоря, запрещены.

Пусть $\Phi \in \text{Mat}(N, N)$ — комплексное поле. В качестве примера рассмотрим ленточные графы в теории с лагранжианом

$$L = L_0 + g \text{Tr}[(\Phi^+ \Phi)^2],$$

где свободный лагранжиан выберем в виде

$$L_0 = \text{Tr}(\partial_\mu \Phi^+ \partial^\mu \Phi + m^2 \Phi^+ \Phi).$$

Пропагатор $\langle \Phi_j^i \Phi_l^k \rangle \sim \delta_j^i \delta_l^k$, поэтому каждое ребро несет только два матричных индекса. Ребра мы будем изображать двумя нитками, с каждой ниткой связан один матричный индекс. В вершине мы имеем $g \text{Tr}[(\Phi^+ \Phi)^2] = g \Phi_j^+ \Phi_k^j \Phi_l^+ \Phi_i^k$, поэтому индекс с одного ребра переходит на другое, т.е. нитка одного ребра переходит в нитку другого.

На рис. 1 показана индексная структура пропагаторов и вершин в теории. Знак «+» соответствует полю Φ^+ , знак «-» соответствует полю Φ . Входящая стрелка соответствует верхнему индексу, выходящая — нижнему.

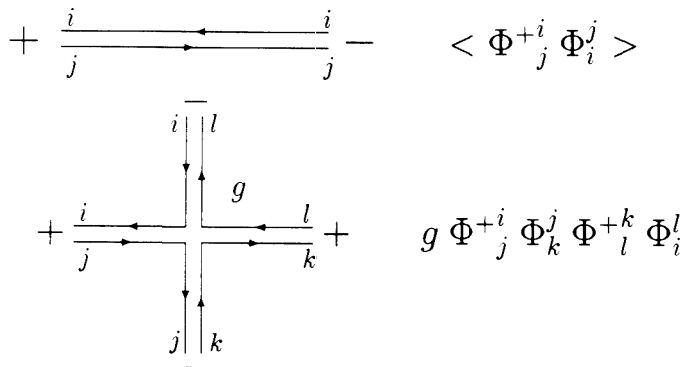


Рис. 1. Пропагатор и вершина взаимодействия

Основная идея $1/N$ разложения заключается в следующем. Каждая замкнутая нитка ленточного графа дает суммирование по соответствующему индексу в фейнмановском интеграле. Поскольку от индекса ничего не зависит, то суммирование приводит к умножению на N . Также предполагается, что константы взаимодействия $g \sim N^{-k}$, где k зависит от количества ребер в вершинах. Можно построить некоторое соответствие между ленточными графами и поверхностями с границей, при этом степень N в разложении будет связана с топологией соответствующих поверхностей, а именно, фейнмановский интеграл зависит от N

$$X_G \sim N^{\chi - \frac{R}{2}},$$

где χ — это эйлерова характеристика поверхности, а R — число внешних линий диаграммы.

Определим поверхности, соответствующие ленточным графам. Пусть G — ленточный граф. Рассмотрим поверхности с границей, на которых G может быть нарисован без самопересечений, при этом внешние ребра присоединены к границе поверхности. Существует единственная такая поверхность с максимальной эйлеровой характеристикой, ее будем называть соответствующей графу G и обозначать S_G .

Построим S_G . Пусть C — вершина графа с r ребрами, ей ставим в соответствие многоугольник также с r ребрами. С каждым ребром в вершине мы ассоциируем ребро в многоугольнике с учетом порядка следования ребер. Например, простая вершина с четырьмя ребрами соответствует квадрату (рис. 2).

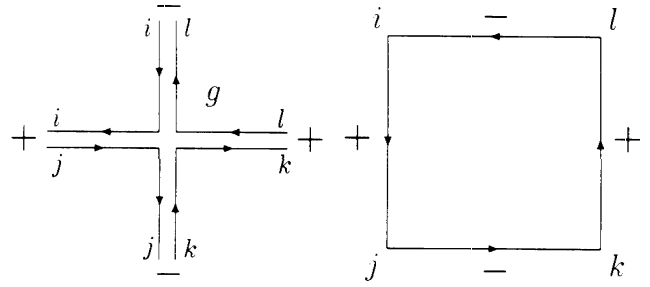


Рис. 2. Соответствие между вершинами и многоугольниками

Индексы, знаки и стрелки ребра в вершине ставим на соответствующее ребро многоугольника. Ребро между двумя вершинами соответствует общему ребру между многоугольниками (рис. 3).

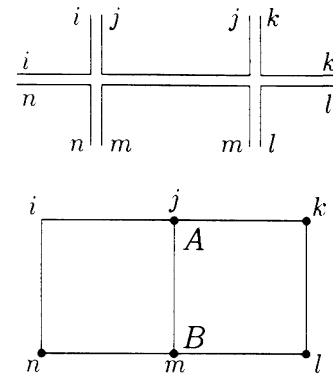


Рис. 3. Соединение вершин многоугольников

Соединяя по этому правилу многоугольники, соответствующие вершинам графа G , получим поверхность S_G . Нетрудно показать, что G может быть нарисован на S_G без самопересечений, а также то, что эйлерова характеристика S_G максимальна.

Отметим, что индексы ставятся около концов ребер многоугольников. Около любой такой точки есть только один индекс. Это свойство остается после соединения многоугольников. Например, около вершины A стоит индекс j , а около вершины B стоит индекс m (см. рис. 3). В ленточных графах индексы ассоциируются с нитками, поэтому точки на концах ребер многоугольников соответствуют ниткам в ленточных графах.

Введем следующие обозначения для графа G (в скобках указываются объекты на поверхности S_G):

I — число замкнутых ниток (точек на концах ребер внутри поверхности), замкнутые нитки также называются индексными петлями;

I_R — число незамкнутых ниток (точек на концах ребер на границе поверхности);

V — число вершин (многоугольников);

P — число внутренних ребер (ребер внутри поверхности);

R — число внешних ребер (ребер на границе поверхности);

χ — эйлерова характеристика поверхности S_G .

Каждая внешняя индексная нить оканчивается в двух внешних ребрах, каждое внешнее ребро соответствует двум внешним индексным нитям, поэтому $I_R = R$.

Многоугольники дают клеточное разбиение S_G , поэтому

$$I_R + I - R - P + V = \chi,$$

или

$$I - P + V = \chi. \quad (1)$$

Теорема. Пусть константы взаимодействия для вершин с r ребрами имеют следующую зависимость от N : $g_r \sim N^{1-r/2}$. Тогда фейнмановский интеграл зависит от N

$$X_G \sim N^{\chi - \frac{R}{2}}.$$

Докажем сначала, что

$$\sum_{v \in G} \frac{r_v}{2} = P + \frac{R}{2}, \quad (2)$$

где r_v — число ребер в вершине v (в дальнейшем индекс v мы будем опускать), символ $v \in G$ означает, что сумма идет по всем вершинам графа G .

Если для каждой вершины графа поставить точку у каждого ребра, входящего в эту вершину, то общее количество точек будет

$$\sum_{v \in G} r = 2P + R.$$

Таким образом,

$$\sum_{v \in G} \left(1 - \frac{r}{2}\right) = V - P - \frac{R}{2} = \chi - I - \frac{R}{2},$$

где используется $\chi = I - P + V$. Окончательно

$$X_G \sim N^I \prod_{v \in G} g_r \sim N^{I + \sum_{v \in G} (1 - \frac{r}{2})} = N^{\chi - \frac{R}{2}}.$$

Видно, что при фиксированном количестве внешних ребер степень N зависит только от $\chi = 2 - 2g - h$, где g — род поверхности (число ручек), а h — число отмеченных точек (число отверстий для поверхностей с границей).

2. Обобщенные ленточные графы

Дадим определение обобщенного ленточного графа. Пусть C — вершина такого графа. Обозначим через $\Lambda_C = \{l_1, \dots, l_n\}$ множество ребер, входящих в C . Допустим, что некоторое ребро l_i может начинаться и заканчиваться в C , в этом случае оно входит в множество Λ_C дважды: $\Lambda_C = \{l_1, \dots, l'_i, \dots, l''_i, \dots, l_n\}$. Число элементов в Λ_C называется степенью вершины C и обозначается $\deg(C)$. Порядок элементов в Λ_C — это порядок, в котором ребра входят в C . В случае обычных ленточных графов разрешены только циклические перестановки ребер, например $\{l_1, l_2, \dots, l_n\} \sim \{l_n, l_1, \dots, l_{n-1}\}$. Вершины в таких

графах будем называть простыми. Для обобщенных ленточных графов допускаем, что множество Λ_C можно разбить на непересекающиеся подмножества Λ_C^i , $\Lambda_C = \{\Lambda_C^1, \Lambda_C^2, \dots, \Lambda_C^m\}$. При этом разрешены циклические перестановки элементов внутри каждого из Λ_C^i , а также любые перестановки подмножеств $\{\dots, \Lambda_C^i, \dots, \Lambda_C^j, \dots\} \sim \{\dots, \Lambda_C^j, \dots, \Lambda_C^i, \dots\}$. В этом случае вершина C будет называться составной.

Пусть имеется составная вершина C с разбиением множества ребер, входящих в C , на подмножества: $\Lambda_C = \{\Lambda_C^1, \Lambda_C^2, \dots, \Lambda_C^m\}$. Обозначим через $\deg^i(C)$ число элементов в Λ_C^i . Тогда соответствующее взаимодействие имеет вид произведения следов, и i -й след берется от произведения $r_i = \deg^i(C)$ матриц:

$$L_{int} = \prod_{i=1}^m \text{Tr}(\Phi_1^{(i)} \dots \Phi_{n_i}^{(i)}).$$

Построим поверхности, соответствующие обобщенным ленточным графам. Пусть C — составная вершина графа G , и пусть Λ_C разбито на m подмножеств Λ_C^i , $i = 1, \dots, m$. В этом случае вершине C мы ставим в соответствие сферу с m отверстиями, под сферой с отверстиями понимаем любое многообразие, топологически эквивалентное сфере с отверстиями. Заметим, что сфера с одним отверстием — это многоугольник. Подмножество Λ_C^i соответствует i -му отверстию. Граница этого отверстия состоит из $\deg^i(C)$ ребер, т. е. число ребер на границе i -го отверстия равно числу ребер в соответствующем подмножестве $\Lambda_C^i \subset \Lambda_C$. Линия между двумя вершинами — это общее ребро двух сфер с отверстиями. Видно, что поверхность, соответствующая графу G , имеет разбиение на сферы с отверстиями. Это разбиение напоминает клеточное разбиение, но сферы с отверстиями не диффеоморфны дискам. Поэтому разбиение на сферы с отверстиями будем называть квазиклеточным разбиением.

Найдем аналог формулы (1) для обобщенных ленточных графов. Пусть S_G — поверхность с квазиклеточным разбиением, соответствующая обобщенному ленточному графу G . Как и раньше, обозначим через V, P, I числа вершин, ребер и индексных петель G соответственно. Тогда в S_G имеем V сфер с отверстиями, P внутренних ребер, I внутренних точек на концах ребер. Пусть m_k — число отверстий в k -й сфере, $k = 1, \dots, V$. Предположим, что $m_k \geq 1$. Дорисуем $(m_k - 1)$ ребро на k -й сфере, чтобы получить клеточное разбиение этой сферы. Такое разбиение всех сфер даст клеточное разбиение S_G . Если χ — эйлерова характеристика S_G , то формула Эйлера

$$I - P - \sum_{k=1}^V (m_k - 1) + V = \chi,$$

или

$$I - P + \sum_{k=1}^V (2 - m_k) = \chi.$$

Как и в случае обычных ленточных графов, числа точек и ребер на границе поверхности сокращают друг друга, поэтому их в формулах не пишем.

Обозначим через χ_{m_k} эйлерову характеристику сферы с m_k отверстиями. Поскольку $\chi_{m_k} = 2 - m_k$, имеем

$$I - P + \sum_{k=1}^V \chi_{m_k} = \chi. \quad (3)$$

Найдем $1/N$ разложение для обобщенных ленточных графов. Рассмотрим обобщенный ленточный граф G . Обозначим через $g_r^{(m)}$ константу взаимодействия, соответствующую вершине с r ребрами, разбитыми на m групп.

Теорема 2. Пусть $g_r^{(m)} \sim N^{\chi m - r/2}$. Тогда фейнмановский интеграл зависит от N

$$X_G \sim N^{\chi - \frac{R}{2}}.$$

Используя (2) и (3), запишем систему

$$\begin{cases} \sum_{v \in G} \frac{r}{2} = P + \frac{R}{2}, \\ I - P + \sum_{v \in G} \chi_m = \chi. \end{cases}$$

Здесь суммы идут по всем вершинам G . Выражая P , находим

$$I + \sum_{v \in G} (\chi_m - \frac{r}{2}) = \chi - \frac{R}{2}.$$

Если $g_r^{(m)} \sim N^{\chi m - r/2}$, то

$$X_G = N^I \cdot \prod_{v \in G} g_r^{(m)} \sim N^{\chi - R/2}.$$

Автор благодарен В.В. Белокурову за ценные замечания и внимание к работе. Работа выполнена при частичной поддержке гранта INTAS 00-334, гранта РФФИ № 01-02-17488 и гранта Президента РФ № 00-15-99296.

Литература

1. 'tHooft G. // Nucl. Phys. B. 1974. **72**. P. 461.
2. Maldacena J.M. // Adv. Theor. Math. Phys. 1998. **2**. P. 231.
3. Gubser S.S., Klebanov I.R., Polyakov A.M. // Phys. Lett. B. 1998. **428**. P. 105.
4. Witten E. // Adv. Theor. Math. Phys. 1998. **2**. P. 253.
5. Berenstein D., Maldacena J., Nastase H. // JHEP. 2002. 04. 013.
6. Aharony O., Gubser S.S., Maldacena J., Ooguri H., Oz Y. // Phys. Reports. 2000. **323**. P. 183.
7. Aref'eva I.Ya., Belov D.M., Koshelev A.S. // Phys. Lett. B. 2000. **476**. P. 431.
8. Aref'eva I.Ya., Zubarev A.P. // Phys. Lett. B. 1996. **386**. P. 258.
9. Славнов А.А., Фаддеев Л.Д. Введение в квантовую теорию калибровочных полей. М.: Наука, 1988.
10. Malyshev D.V. // JHEP. 2002. 05. 013.
11. Witten E. // hep-th/0112258.
12. Klebanov I.R., Witten E. // Nucl. Phys. B. 1999. **556**. P. 89.
13. Aharony O., Berkooz M., Silverstein E. // JHEP. 2001. 08. 006.
14. Berkooz M., Sever A., Shomer A. // JHEP. 2002. 05. 034.

Поступила в редакцию
29.05.02

УДК 517.958; 621.372.8

ЗАМЕЧАНИЕ О НЕУСТОЙЧИВОСТИ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА

М. Д. Малых

(кафедра математики)

E-mail: malykham@mtu-net.ru

Рассмотрены погруженные в непрерывный спектр собственные значения спектральных задач для волновода с заполнением. Найден пример возмущения заполнения волновода, при котором исчезают погруженные в непрерывный спектр собственные значения спектральной задачи для волновода с заполнением.

В работах [1–2] показано, что вложенные в непрерывный спектр собственные значения спектральной задачи неустойчивы к малым возмущениям заполнения волновода.

Пусть необходимо решить задачу на собственные значения в плоском волноводе $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^1, y \in [0, +\pi]\}$: найти число ϵ и функцию $u \neq 0$, которые удовлетворяют системе

$$\begin{cases} \Delta u + \epsilon q(x, y)u = 0, & (x, y) \in \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = 0, \\ u \in \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega), \end{cases} \quad (1)$$

где $q(x, y)$ — заданная кусочно-непрерывная функция, характеризующая заполнение волновода, а $\overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$ — соответствующее пространство Соболева.