

УДК 533

НЕЛИНЕЙНАЯ СТАБИЛИЗАЦИЯ ФРОНТА ПЛАМЕНИ В ПОЛЕ ТЯЖЕСТИ

К. А. Казаков

(кафедра теоретической физики)

E-mail: kirill@theor.phys.msu.ru

Получено интегродифференциальное уравнение, описывающее слабонелинейную динамику пламени с произвольным коэффициентом расширения газа в поле тяжести. Показано, что наличие гравитационного поля приводит к появлению специфических стационарных режимов распространения пламени, и найдены соответствующие аналитические решения полученного уравнения.

Процесс распространения медленных пламен нулевой толщины в газовых смесях является, как известно, абсолютно неустойчивым [1, 2]. Независимо от величины коэффициента расширения газа $\theta > 1$, определяемого как отношение плотностей горючей смеси и продуктов горения, любое (малое) возмущение фронта пламени растет экспоненциально по времени с инкрементом, пропорциональным U_f/λ , где U_f обозначает адиабатическую скорость плоского фронта пламени относительно горючей смеси, а λ — характерный масштаб возмущения. В действительности, неустойчивость по отношению к возмущениям с очень малыми λ обычно подавляется благодаря процессам теплопроводности внутри фронта пламени, так что учет конечной толщины пламени приводит к выражению для инкремента вида [3]:

$$\sigma \sim U_f \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{\text{const} \cdot L_f}{\lambda^2} \right),$$

где L_f — толщина пламени, а const зависит от соотношения коэффициентов теплопроводности и диффузии (числа Льюиса). Произведение $\text{const} \cdot L_f$, определяющее коротковолновую границу неустойчивости, задает характерный масштаб ячеистой структуры пламени.

По сравнению со свободными пламенами, развитие неустойчивости в поле тяжести отличается прежде всего появлением нового параметра с размерностью длины уже в случае пламен нулевой толщины, а именно $L_g = U_f^2/g$, где g — ускорение свободного падения. Для большинства реальных пламен выполняется условие $L_g \gg L_f^*$, т. е., поле

*) Условие $L_g \gg L_f$ можно выразить через нормальную скорость пламени. Толщина пламени по порядку величины равна χ/U_f , где χ есть температуропроводность горючей смеси, поэтому $L_g \gg L_f$ означает, что

$$U_f \gg (\chi g)^{1/3}.$$

Фактически оно нарушается лишь для очень медленных пламен, например, для смеси 6% метана с воздухом $U_f \approx 5$ см/с, $(\chi g)^{1/3} \approx 7$ см/с. В обратном случае быстро горящей стехиометрической смеси водорода с кислородом $U_f \approx 10^3$ см/с, так что $L_g \approx 10^3$ см, $L_f \approx 3 \cdot 10^{-4}$ см.

тяжести определяет «крупномасштабную» структуру фронта пламени, тогда как его влиянием на ячеистую структуру можно пренебречь. Это связано с тем, что процессы диффузии и теплопроводности, определяющие динамику внутри фронта пламени, являются эффектами более высокого дифференциального порядка, чем гравитационные, и их роль резко возрастает на малых масштабах. Наоборот, при рассмотрении длинноволновых возмущений фронта определяющую роль играет поле тяжести, а процессами переноса можно пренебречь. Предметом настоящей работы является исследование ведущих нелинейных эффектов в динамике фронта пламени, связанных с наличием поля тяжести, в частности, выяснение условий существования стационарных режимов его распространения.

Этот вопрос будет исследован ниже на основе интегродифференциального уравнения для положения фронта пламени, которое может быть получено путем непосредственного обобщения соответствующего слабонелинейного уравнения для свободных пламен, выведенного в работе [4]. А именно в выводе, данном в [4], следует учесть вклад силы тяжести в уравнении Бернулли, а также в условии для скачка давления на фронте (см. (14) и (42) в [4]), и опустить члены, пропорциональные толщине пламени, которыми, как указано выше, в рассматриваемом случае можно пренебречь. Таким образом, получим следующее уравнение:

$$\begin{aligned} & (\theta + 1)\ddot{f} + 2\theta\hat{\Phi}\dot{f} + \theta(\theta - 1)f'' + (\theta - 1)G\hat{\Phi}f + \\ & + \hat{\Phi}(f')^2 \left(\theta - \frac{(\theta - 1)^2}{2} \right) + \frac{(\theta - 1)^2}{\theta}G(f')^2 + \\ & + \left(\theta + \frac{1}{\theta} \right) (f'f' + f'\hat{H}f) + \frac{\theta - 1}{2}\hat{\Phi} \left[f^2 + (\hat{H}f)^2 \right] + \\ & + (3\theta - 1)\hat{\Phi} (f'\hat{H}f) + \left(2\theta - 1 + \frac{1}{\theta} \right) f'\hat{H}\ddot{f} - \\ & - \frac{\theta - 1}{\theta} (\hat{H}\ddot{f} + Gf') \hat{H}f = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь введены следующие обозначения: $G = gL/U_f^2$;

\hat{H} есть линейный оператор (оператор Гильберта), определяемый как

$$\hat{H} \exp(ik\eta) = i \operatorname{sign}(k) \exp(ik\eta), \quad (2)$$

$$k \neq 0, \quad \operatorname{sign}(k) \equiv \frac{k}{|k|},$$

а $\hat{\Phi} = -\hat{H}\partial/\partial\eta$ — оператор Ландау–Даррье. Для простоты рассматривается двумерный случай и предполагается, что положение фронта описывается уравнением $\xi = f(\eta)$, причем ξ обозначает координату в направлении распространения первоначально плоского фронта, а η — поперечную координату; штрих обозначает дифференцирование по η , а точка — по времени τ ; ξ, η измеряются в единицах L , а τ — в единицах L/U_f , где L обозначает характерную газодинамическую шкалу рассматриваемой задачи (например, ширину трубы, по которой распространяется пламя).

В линейном приближении уравнение (1) сводится к известному уравнению

$$(\theta + 1)\ddot{f} + 2\theta\dot{\Phi}f + \theta(\theta - 1)f'' + (\theta - 1)G\hat{\Phi}f = 0,$$

из которого следует, что на линейной стадии развития неустойчивости наличие поля тяжести оказывает дестабилизирующее действие, если пламя распространяется против направления поля ($G < 0$), и стабилизирующее в обратном случае, не подавляя, однако, неустойчивости полностью (подробнее об этом см., например, [5]). Для выяснения вопроса о возможности полной нелинейной стабилизации пламени полем тяжести предположим, что существует стационарный режим его распространения. В этом случае уравнение (1) существенно упрощается, принимая следующий вид:

$$(\theta - 1)(\theta f'' + G\hat{\Phi}f) + \left(\theta - \frac{(\theta - 1)^2}{2}\right) \hat{\Phi}(f')^2 + \frac{(\theta - 1)^2}{\theta} G(f')^2 = 0. \quad (3)$$

Нетрудно видеть, что как и на линейной стадии, оба члена в этом уравнении, пропорциональные G , одновременно являются стабилизирующими при распространении пламени в направлении поля тяжести, и дестабилизирующими в обратном случае. Это непосредственно следует из нестационарного уравнения (1), если в него подставить $f(\eta, \tau)$ в виде

$$f(\eta, \tau) \sim e^{\sigma\tau} \sin(k\eta)$$

и рассматривать его как «дисперсионное соотношение» для инкремента возмущения σ . Видно, что оба рассматриваемых члена уменьшают или увеличивают σ при $G > 0$ и $G < 0$ соответственно. Следовательно, стационарное уравнение (3) может иметь решения лишь в случае $G > 0$, и вопрос о возможности нелинейной стабилизации пламени сводится к вопросу о разрешимости этого уравнения.

Уравнение (3) является нелинейным интегродифференциальным уравнением относительно f' . Замечательно, что оно может быть решено аналитически, для чего мы предварительно преобразуем его следующим образом. Перепишем нелинейный член с $\hat{\Phi}(f')^2$, итерируя уравнение (3) относительно f'' , т. е., подставляя

$$f'' = -\frac{G}{\theta}\hat{\Phi}f + O(f'^2).$$

В результате имеем

$$\hat{\Phi}(f')^2 \equiv -\hat{H}\frac{\partial(f')^2}{\partial\eta} = -2\hat{H}(f'f'') =$$

$$= \frac{2G}{\theta}\hat{H}(f'\hat{\Phi}f) + O(f'^3).$$

Используя известное тождество для оператора Гильберта

$$2\hat{H}\{f\hat{H}f\} = (\hat{H}f)^2 - f^2,$$

получаем

$$\hat{\Phi}(f')^2 = -\frac{G}{\theta}\{(\hat{H}f')^2 - (f')^2\} + O(f'^3).$$

Подставляя это выражение в уравнение (3), приводим его к виду

$$f'' + \alpha\hat{\Phi}f + \beta(f')^2 - \gamma(\hat{\Phi}f)^2 = 0, \quad (4)$$

где

$$\alpha = \frac{G}{\theta}, \quad \beta = \frac{G}{\theta^2(\theta - 1)} \left(\theta + \frac{(\theta - 1)^2}{2}\right),$$

$$\gamma = \frac{G}{\theta^2(\theta - 1)} \left(\theta - \frac{(\theta - 1)^2}{2}\right).$$

Покажем, прежде всего, что уравнение (4) не имеет периодических решений. Заметим для этого, что если $f(\eta)$ является периодической функцией, то таковой будет и $[\hat{H}(f - \bar{f})](\eta)$ с тем же самым периодом, где \bar{f} есть среднее по периоду значение $f(\eta)$. Это непосредственно следует из определения (2) оператора Гильберта (вычитание среднего необходимо ввиду того, что \hat{H} неопределен на константах). Проинтегрируем уравнение (4) по периоду. Интеграл от первых двух членов равен нулю:

$$\int d\eta f'' = f'| = 0,$$

$$\int d\eta \hat{\Phi}f = - \int d\eta \hat{H}f' = - \int d\eta \hat{H}(f - \bar{f})'$$

$$= - \int d\eta \left\{ \hat{H}(f - \bar{f}) \right\}' = \hat{H}(f - \bar{f}) \Big| = 0.$$

С другой стороны, используя унитарность оператора Гильберта, имеем для интеграла от последних двух членов уравнения (4)

$$\int d\eta \left\{ \beta(f')^2 - \gamma(\hat{H}f')^2 \right\} = \int d\eta (\beta - \gamma)(f')^2 > 0.$$

Вывод об отсутствии периодических решений можно было бы сделать, разумеется, из аналогичного рассмотрения исходной формы (3) стационарного уравнения. Видно, что такие решения запрещены из-за наличия знакоопределенного нелинейного члена, пропорционального G .

Рассмотрим теперь неперiodический случай. Будем искать решение для $\phi = f'$ в виде разложения по полюсам^{*}):

$$\phi = a \sum_{k=1}^{2P} \frac{1}{\eta - \eta_k},$$

где величина амплитуды a и положение P пар комплексно-сопряженных полюсов η_k должны быть определены подстановкой этого разложения в уравнение (4). Используя определение оператора \hat{H} , нетрудно показать, что

$$\hat{H}\phi = -i a \sum_{k=1}^{2P} \frac{\text{sign}(\text{Im } \eta_k)}{\eta - \eta_k}.$$

Подставляя это выражение в уравнение (4) и приводя подобные члены, находим, что оно удовлетворяется при

$$a = \frac{1}{\beta + \gamma}$$

и η_k , являющихся решениями следующей системы $2P$ уравнений:

$$i\alpha(\beta + \gamma) + 2 \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{2P} \frac{\beta \text{sign}(\text{Im } \eta_k) + \gamma \text{sign}(\text{Im } \eta_l)}{\eta_k - \eta_l} = 0, \quad (5)$$

$$k = 1, \dots, 2P,$$

среди которых лишь P независимы. Эта система, очевидно, совместна только в случае $G > 0$. Действительно, в простейшем случае одной пары комплексно-сопряженных полюсов $\eta_1, \eta_2 = \eta_1^*$ полагая, например, $\text{Im } \eta_1 > 0$, находим:

$$\text{Im } \eta_1 = \frac{\beta - \gamma}{\alpha(\beta + \gamma)} = \frac{(\theta - 1)^2}{2G},$$

что согласуется с предположением о положительности мнимой части η_1 лишь при $G > 0$. Нетрудно показать, что то же самое верно и в общем случае произвольного числа полюсов. Для этого надо вычислить мнимую часть уравнения (5) с номером k , соответствующим полюсу с наибольшей мнимой частью, и учесть, что $\beta > \gamma$. Полученный результат подтверждает качественные рассуждения, приведенные в начале этого параграфа. Он не означает, конечно, что нелинейная стабилизация неустойчивости невозможна в случае $G < 0$. Исследование такой возможности требует рассмотрения нелинейных поправок высших порядков.

^{*} К исследованию динамики пламен этот метод был привлечен в работе [6].

В рассмотренном выше случае одной пары полюсов имеем далее:

$$f' = \frac{1}{\beta + \gamma} \left(\frac{1}{\eta - \eta_1} + \frac{1}{\eta - \eta_1^*} \right) = \frac{2}{\beta + \gamma} \frac{(\eta - \text{Re } \eta_1)}{(\eta - \text{Re } \eta_1)^2 + (\text{Im } \eta_1)^2},$$

откуда

$$f = \frac{\theta(\theta - 1)}{2G} \ln \left\{ (\eta - \eta_0)^2 + \frac{(\theta - 1)^4}{4G^2} \right\}, \quad \eta_0 \equiv \text{Re } \eta_1.$$

Очевидно, что решения, отвечающие различным значениям G , являются подобными. На рис. 1 изображены двухполюсные решения, отвечающие различным θ при $G = 10$ и $\eta_0 = 0$.

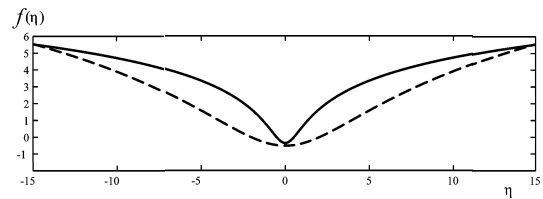


Рис. 1. Двухполюсные решения уравнения (4) при $\theta = 5$ (сплошная линия) и $\theta = 10$ (штриховая линия)

В качестве еще одного примера рассмотрим четырехполюсное решение ($P = 2$), имеющее вид

$$f = \frac{\theta(\theta - 1)}{2G} \ln \left\{ \left[(\eta - \text{Re } \eta_1)^2 + (\text{Im } \eta_1)^2 \right] \times \left[(\eta - \text{Re } \eta_2)^2 + (\text{Im } \eta_2)^2 \right] \right\}.$$

В предположении $\text{Im } \eta_{1,2} > 0$ система (5) дает два уравнения для положения полюсов $\eta_1, \eta_2, \eta_3 = \eta_1^*, \eta_4 = \eta_2^*$:

$$i\alpha(\beta + \gamma) + 2 \left\{ \frac{\beta + \gamma}{\eta_1 - \eta_2} + (\beta - \gamma) \left(\frac{1}{2i \text{Im } \eta_1} + \frac{1}{\eta_1 - \eta_2^*} \right) \right\} = 0,$$

$$i\alpha(\beta + \gamma) + 2 \left\{ \frac{\beta + \gamma}{\eta_2 - \eta_1} + (\beta - \gamma) \left(\frac{1}{2i \text{Im } \eta_2} + \frac{1}{\eta_2 - \eta_1^*} \right) \right\} = 0.$$

Отделяя вещественную и мнимую части этих уравнений и комбинируя их друг с другом, получим три независимых уравнения для четырех неизвестных $\text{Re } \eta_{1,2}, \text{Im } \eta_{1,2}$:

$$2\alpha \frac{\beta + \gamma}{\beta - \gamma} - \left\{ \frac{1}{\text{Im } \eta_1} + \frac{1}{\text{Im } \eta_2} + 4 \frac{\text{Im}(\eta_1 + \eta_2)}{|\eta_1 - \eta_2^*|^2} \right\} = 0, \quad (6)$$

$$4 \frac{\beta + \gamma}{\beta - \gamma} \frac{\text{Im}(\eta_2 - \eta_1)}{|\eta_1 - \eta_2|^2} + \frac{1}{\text{Im } \eta_2} - \frac{1}{\text{Im } \eta_1} = 0, \quad (7)$$

$$\text{Re}(\eta_1 - \eta_2) \left(\frac{\beta + \gamma}{|\eta_1 - \eta_2|^2} + \frac{\beta - \gamma}{|\eta_1 - \eta_2^*|^2} \right) = 0. \quad (8)$$

Из уравнения (8) следует, что решением является конфигурация с $\text{Re } \eta_1 = \text{Re } \eta_2 \equiv \eta_0$, описывающая «слияние» полюсов. С учетом этого имеем из уравнений (6), (7):

$$\begin{aligned} \text{Im } \eta_{1,2} &= \frac{1}{\alpha} \left(1 + 2 \frac{\beta - \gamma}{\beta + \gamma} \right) \left(1 \pm \sqrt{\frac{\beta + \gamma}{2\beta}} \right) = \\ &= \frac{\theta^2 - \theta + 1}{G} \left(1 \pm \sqrt{\frac{2\theta}{\theta^2 + 1}} \right). \end{aligned}$$

Нетрудно показать, что и в общем случае произвольного числа полюсов допустимыми являются лишь решения описанного типа, в которых все полюса расположены на одной вертикальной прямой в комплексной плоскости η . Для этого надо взять вещественную часть уравнения (5) с номером k , соответствующим крайнему правому полюсу в верхней полуплоскости. При этом мы получим равенство нулю суммы неотрицательных членов, пропорциональных разностям $\text{Re}(\eta_k - \eta_l)$.

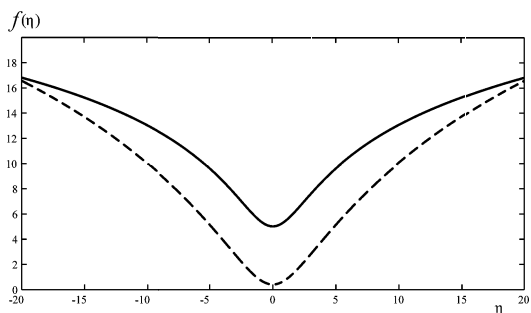


Рис. 2. Двухполюсное (сплошная линия) и четырехполюсное (штриховая линия) решения уравнения (4) для $\theta = 8$

На рис. 2 показаны двух- и четырехполюсные решения для случая $\theta = 8$ (полагая по-прежнему $G = 10, \eta_0 = 0$).

Таким образом, в смысле своего влияния на развитие неустойчивости ведущие нелинейные эффекты, связанные с наличием поля тяжести, имеют качественно тот же характер, что и линейные. В отличие от последних, однако, эти эффекты обеспечивают полную стабилизацию фронта при распространении пламени в направлении действия поля. Существенно, что возникающая при этом конфигурация фронта является непериодической и представляет собой «горб» в направлении распространения пламени, на который накладывается мелкомасштабная «рябь», соответствующая ячеистой структуре фронта.

Вопрос о том, какое полюсное решение для профиля фронта пламени выбирается в действительности, требует исследования устойчивости различных полюсных конфигураций и может быть решен, разумеется, лишь численно на основе общего нестационарного уравнения (1).

Литература

1. Ландау Л.Д. // ЖЭТФ. 1944. **14**. С. 240.
2. Darrieus G. Доклады на «La Technique Moderne» и «Le Congrès de Mécanique Appliquée». 1938, 1945 (не опубликовано).
3. Pelce P., Clavin P. // J. Fluid Mech. 1982. **124**. P. 219.
4. Kazakov K.A., Liberman M.A. // Com. Sci. Tech. 2002. **174**. P. 129.
5. Зельдович Я.Б., Баренблатт Г.И., Либрович В.Б., Махвиладзе Г.М. Математическая теория горения и взрыва. М., 1980.
6. Thual O., Frish U., Henon M. // J. Phys. (France). 1985. **46**. P. 1485.

Поступила в редакцию
19.02.03

УДК 530.145

АНОМАЛИЯ КОНИШИ ДЛЯ $N = 1$ СУПЕРСИММЕТРИЧНОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ, РЕГУЛЯРИЗОВАННОЙ ВЫСШИМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

П. И. Пронин, Б. А. Розентул, К. В. Степаньянц

(кафедра теоретической физики)

E-mail: petr@theor.phys.msu.su, stepan@phys.msu.su

В терминах компонентных полей для $N = 1$ суперсимметричной электродинамики, регуляризованной методом высших производных, вычислена аномалия Кониши. Установлено, что полученный результат согласуется с вычислениями, проведенными в формализме суперграфов.

Введение

Хорошо известно [1–4], что в суперсимметричных теориях аксиальная аномалия и аномалия следа тензора энергии-импульса принадлежат одному супер-

мультиплету. В силу теоремы Адлера–Бардина [5] аксиальная аномалия является чисто однопетлевой, тогда как аномалия следа пропорциональна β -функции [6]. Поэтому суперсимметричная инвариант-