УДК 530.145

УРАВНЕНИЯ ШВИНГЕРА–ДАЙСОНА ДЛЯ $N=1$ СУПЕРСИММЕТРИЧНОЙ ТЕОРИИ ЯНГА–МИЛЛСА

А. А. Солошенко*), К. В. Степаньянц
(*кафедра теоретической физики*)
E-mail: stepan@phys.msu.su

Для $N=1$ суперсимметричной теории Янга–Миллса построены уравнения Швингера–Дайсона.

Введение

Исследование структуры квантовых поправок в суперсимметричных моделях квантовой теории поля является интересной и весьма нетривиальной задачей. Несмотря на то что многие вопросы уже давно детально исследованы [1], до сих пор остается ряд проблем, которые так и не нашли своего решения. К ним относится, например, строгий вывод точной во всех порядках β-функции. Ее вид был угадан в работе [2] на основе исследования структуры инстантонных вкладов.

Многочисленные петлевые вычисления (например, [3–5]), которые, как правило, проводились с использованием размерной редукции и схемы минимальных вычитаний, показали, что точная β-функция может быть получена, если специальным образом подобрать схему вычитаний. Проводились также двухпетлевые вычисления с помощью дифференциальной перенормировки [6]. При использовании регуляризации высшими ковариантными производными [7–9] оказалось возможным достаточно легко получить схемно независимую функцию Гелл-Манна–Лоу. (Вычисления были проведены вплоть до трехпетлевого приближения [10–12].) При этом была установлена интересная закономерность: все интегралы, которые определяют эту функцию, являются интегралами от полных производных. Впервые такая закономерность была замечена в работе [12]. Впоследствии в абелевом случае ее частично удалось объяснить, используя метод, основанный на подстановке решений тождеств Уорда в уравнения Швингера–Дайсона [13, 14]. При этом точная β-функция получается, если предположить справедливость некоторого нового тождества для функций Грина, которое не следует из калибровочной инвариантности или суперсимметрии. Это тождество является нетривиальным в трех и более петлях. Ряд проверок [15, 16] показал его справедливость как в абелевом, так и в неабелевом случае. Кроме того, вычисления в неабелевых калибровочных теориях [17] показали, что даже в чистой теории Янга–Миллса при использовании регуляризации высшими ковариантными производными все интегралы, определяющие функцию Гелл-Манна–Лоу, являются интегралами от полных производных. Тем не менее остается вопрос о том, как можно вычислять вклад калибровочного суперполя и духов точно во всех порядках теории возмущений? По аналогии со вкладом суперполей материи было бы разумно предположить, что это можно сделать с помощью уравнений Швингера–Дайсона и тождеств Славнова–Тейлора. При этом первым шагом должно стать построение уравнений Швингера–Дайсона для $N=1$ суперсимметричной теории Янга–Миллса. Этой цели посвящена настоящая работа.

1. $N=1$ суперсимметричная теория Янга–Миллса и ее квантование с помощью метода фонового поля

$N=1$ суперсимметричная теория Янга-Миллса в суперпространстве описывается следующим действием:

$$S=\frac{1}{2e^2}\,\mathrm{Re}\,\mathrm{tr}\int d^4x\,d^2\theta\,W_a C^{ab} W_b, \qquad (1)$$

где C — матрица зарядового сопряжения, суперполе

$$W_a=\frac{1}{8}\bar{D}^2\left(e^{-2V}D_a e^{2V}\right)$$

представляет собой суперсимметричный аналог тензора напряженности калибровочного поля, V — вещественное скалярное суперполе, а D — суперсимметричная ковариантная производная. В наших обозначениях калибровочное суперполе V раскладывается по генераторам калибровочной группы T^A как $V=e\,V^A T^A$, где e — константа связи.

Действие (1) инвариантно относительно калибровочных преобразований

$$e^{2V}\to e^{i\Lambda^+}e^{2V}e^{-i\Lambda},$$

где Λ — произвольное киральное суперполе.

*) Объединенный институт ядерных исследований, лаборатория теоретической физики им. Н. Н. Боголюбова. 141980, г. Дубна Московской обл., Россия.

Для квантования этой модели удобно использовать метод фонового поля. Это связано с тем, что метод фонового поля позволяет проводить вычисления эффективного действия, явно не нарушая фоновую калибровочную инвариантность. В применении к суперсимметричному случаю он может быть сформулирован следующим образом [1, 18]: осуществим в действии (1) замену

$$e^{2V} \to e^{2V'} \equiv e^{\boldsymbol{\Omega}^+} e^{2V} e^{\boldsymbol{\Omega}}, \tag{2}$$

где $\boldsymbol{\Omega}$ — фоновое скалярное суперполе. Получившаяся теория будет инвариантна относительно фоновых калибровочных преобразований

$$\begin{gathered} V \to e^{iK} V e^{-iK}; \\ e^{\boldsymbol{\Omega}} \to e^{iK} e^{\boldsymbol{\Omega}} e^{-i\Lambda}; \quad e^{\boldsymbol{\Omega}^+} \to e^{i\Lambda^+} e^{\boldsymbol{\Omega}^+} e^{-iK}, \end{gathered} \tag{3}$$

где K — произвольное вещественное суперполе, а Λ — произвольное киральное суперполе.

Построим киральные ковариантные производные

$$\boldsymbol{D} \equiv e^{-\boldsymbol{\Omega}^+} D e^{\boldsymbol{\Omega}^+}; \quad \bar{\boldsymbol{D}} \equiv e^{\boldsymbol{\Omega}} \bar{D} e^{-\boldsymbol{\Omega}}.$$

При действии на некоторое поле X, которое преобразуется по закону $X \to e^{iK} X$, эти ковариантные производные будут меняться точно так же. Тогда несложно убедиться, что после замены (2) действие (1) перейдет в

$$\begin{aligned} S = \frac{1}{2e^2} \operatorname{tr} \operatorname{Re} \int d^4x\, d^2\theta\, \boldsymbol{W}^a \boldsymbol{W}_a - \\ - \frac{1}{64e^2} \operatorname{tr} \operatorname{Re} \int d^4x\, d^4\theta \Big[16 \big(e^{-2V} \boldsymbol{D}^a e^{2V} \big) \boldsymbol{W}_a + \\ + \big(e^{-2V} \boldsymbol{D}^a e^{2V} \big) \bar{\boldsymbol{D}}^2 \big(e^{-2V} \boldsymbol{D}_a e^{2V} \big) \Big], \end{aligned} \tag{4}$$

где

$$\boldsymbol{W}_a = \frac{1}{8} e^{\boldsymbol{\Omega}} \bar{D}^2 \big(e^{-\boldsymbol{\Omega}} e^{-\boldsymbol{\Omega}^+} D_a e^{\boldsymbol{\Omega}^+} e^{\boldsymbol{\Omega}} \big) e^{-\boldsymbol{\Omega}}.$$

При этом ковариантные производные поля V, лежащего в присоединенном представлении, определяются стандартным образом.

Мы будем фиксировать калибровку добавлением слагаемых

$$S_{gf} = -\frac{1}{32e^2} \operatorname{tr} \operatorname{Re} \int d^4x\, d^4\theta \left(V \boldsymbol{D}^2 \bar{\boldsymbol{D}}^2 V + V \bar{\boldsymbol{D}}^2 \boldsymbol{D}^2 V \right). \tag{5}$$

Соответствующее действие духов Фаддеева-Попова будет

$$S_{gh} = i \int d^4x\, d^4\theta \big(\bar{c} + \bar{c}^+ \big) V_{Ad} \left[(c + c^+) + \operatorname{cth} V_{Ad} (c - c^+) \right], \tag{6}$$

где индекс Ad означает, что суперполе V раскладывается по генераторам присоединенного представления калибровочной группы, а поля c и $\bar{c}$ являются фоновыми киральными полями. (Мы не раскладываем их по генераторам, а рассматриваем как столбцы, которые нумеруются индексом, соответствующим калибровочной группе.) Кроме того, процедура квантования также требует добавления действия для духов Нильсена–Каллош:

$$S_b = \frac{1}{4e^2} \int d^4x\, d^4\theta\, b_0^+ e^{\boldsymbol{\Omega}_{Ad}^+} e^{\boldsymbol{\Omega}_{Ad}}\, b_0, \tag{7}$$

где b_0 — антикоммутирующее киральное суперполе в присоединенном представлении калибровочной группы [1].

Построим производящий функционал следующим образом:

$$\begin{aligned} Z[J, \boldsymbol{\Omega}] = \int D\mu\, \times \\ \times \exp\left\{ i\boldsymbol{S} + i \int d^4x\, d^4\theta J \big(V'[V, \boldsymbol{\Omega}] - \boldsymbol{V} \big) + i\,\mathrm{Sources} \right\}, \end{aligned} \tag{8}$$

где

$$\boldsymbol{S} \equiv S + S_{gf} + S_{gh} + S_b;$$

$e^{2\boldsymbol{V}} \equiv e^{\boldsymbol{\Omega}^+} e^{\boldsymbol{\Omega}}$, а через Sources обозначены дополнительные источники, которые по тем или иным соображениям желательно ввести. С помощью функционала $Z[J, \boldsymbol{\Omega}]$ можно построить производящий функционал для связных функций Грина и эффективное действие. Вычисляя слагаемые, которые соответствуют двухточечной функции Грина фонового поля, можно получить выражение для функции Гелл-Манна–Лоу.

Заметим, что при построении производящего функционала мы пока не вводили регуляризацию. Поэтому приводимые далее рассуждения имеют достаточно формальный характер. Для того чтобы вычислять точную функцию Гелл-Манна–Лоу с помощью метода, предложенного в работе [13], необходимо использовать регуляризацию высшими производными, которая позволяет осуществлять дифференцирование по параметру регуляризации Λ. Детально такая регуляризация описана в работе [17]. Ее влияние на дальнейшие результаты мы пока не исследуем.

2. Уравнения Швингера–Дайсона

Несложно убедиться [14], что уравнения Швингера–Дайсона в методе фонового поля записываются в виде

$$\frac{\delta \Gamma}{\delta \boldsymbol{V}_x} = \left\langle \frac{\delta}{\delta \boldsymbol{V}_x} S[\boldsymbol{V}, V, \phi] \right\rangle, \tag{9}$$

где угловые скобки означают обычное функциональное усреднение, а в окончательном результате необходимо положить поле V (аргумент эффективного действия) равным 0. Явное выполнение дифференцирования по полю $\boldsymbol{V}$ приводит к сложным и громоздким выражениям. Однако мы хотим только построить метод вычисления величины

$$\frac{d}{d\ln\Lambda} \frac{\delta \Gamma}{\delta \boldsymbol{V}_y^B \delta \boldsymbol{V}_x^A} \bigg|_{p=0}, \tag{10}$$

поэтому в уравнении (9) можно оставить только те слагаемые, которые дадут в нее вклад. В частности, поскольку функция Грина (10) очевидно пропорциональна δ^{AB}, то можно отбросить все слагаемые, в которые входят

$$\left[\hat{P}\boldsymbol{V}, \hat{Q}\boldsymbol{V}\right], \tag{11}$$

где $\hat{P}$ и $\hat{Q}$ — некоторые операторы, которые не содержат квантовое поле V. Поэтому ковариантные производные и фоновую напряженность калибровочного поля можно заменить следующими выражениями:

$$\boldsymbol{D}_a \to D_a + \left[D_a\boldsymbol{V},\ \right]; \quad \bar{\boldsymbol{D}}_a \to \bar{D}_a - \left[\bar{D}_a\boldsymbol{V},\ \right];$$
$$\boldsymbol{W}_a \to \frac{1}{4}\bar{D}^2 D_a \boldsymbol{V}.$$

После этого уже можно провести дифференцирование в формуле (9). При этом необходимо помнить, что зависимость действия духов от фонового поля связана с тем, что духи (а также антидухи и духи Нильсена–Каллош) являются фоново киральными полями и могут быть представлены в виде

$$c = e^{\boldsymbol{\Omega}_{Ad}} c_0; \quad c^+ = e^{-\boldsymbol{\Omega}^+_{Ad}} c_0^+,$$

где поля c_0 и c_0^+ уже являются обычными киральными или антикиральными полями. Пренебрегая слагаемыми вида (11), после несложных преобразований получаем, что

$$\frac{\delta\Gamma}{\delta\boldsymbol{V}} = \left\langle \frac{\delta S}{\delta\boldsymbol{V}} + \frac{\delta S_{gf}}{\delta\boldsymbol{V}} + \frac{\delta S_{gh}}{\delta\boldsymbol{V}} + \frac{\delta S_b}{\delta\boldsymbol{V}} \right\rangle, \tag{12}$$

где

$$\frac{\delta S}{\delta\boldsymbol{V}^A} = \frac{1}{2e}\operatorname{Re}\operatorname{tr} T^A D^a\left(e^{2V'} W'_a e^{-2V'}\right); \tag{13}$$

$$\frac{\delta S_{gf}}{\delta\boldsymbol{V}^A} = \frac{1}{16e}\operatorname{tr} T^A\Big([V, \bar{\boldsymbol{D}}^2\boldsymbol{D}^2 V] - [V, \boldsymbol{D}^2\bar{\boldsymbol{D}}^2 V] + 2[\boldsymbol{D}^2 V, \bar{\boldsymbol{D}}^2 V]\Big); \tag{14}$$

$$\frac{\delta S_{gh}}{\delta\boldsymbol{V}^A} = -e\operatorname{Im}\bigg((\bar{c} + \bar{c}^+)\left(\frac{2V}{1 - e^{-2V}}\right)_{Ad} T^A_{Ad} c - (\bar{c} - \bar{c}^+) T^A_{Ad}\left(\frac{2V}{1 - e^{-2V}}\right)_{Ad} c\bigg); \tag{15}$$

$$\frac{\delta S_b}{\delta\boldsymbol{V}^A} = \frac{e}{4} b_0^+\left(T^A_{Ad} e^{2\boldsymbol{V}_{Ad}} + e^{2\boldsymbol{V}_{Ad}} T^A_{Ad}\right) b_0, \tag{16}$$

где $(T^A)_{BC} = -if^{ABC}$ — генераторы присоединенного представления калибровочной группы, а W'_a — тензор напряженности, построенный по полю V', который удовлетворяет тождеству Бьянки [1]:

$$D^a W'_a - \left\{W'^a,\ e^{-2V'} D_a e^{2V'}\right\} = \bar{D}^a\left(e^{-2V'}\bar{W}'_a e^{2V'}\right),$$

где $\bar{W}'_a = -D^2\left(e^{2V'}\bar{D}_a e^{-2V'}\right)/8$.

В уравнении (12) содержатся корреляторы, которые достаточно сложно вычислить точно во всех порядках теории возмущений. При этом наибольшую сложность представляет нелинейный оператор, который стоит в правой части формулы (13). Однако при калибровочных преобразованиях он меняется по закону

$$\operatorname{tr} T^A D^a\left(e^{2V'} W'_a e^{-2V'}\right) \to \left(e^{-i\Lambda^+_{Ad}}\right)^{AB}\operatorname{tr} T^B D^a\left(e^{2V'} W'_a e^{-2V'}\right), \tag{17}$$

что при переходе к квантовой теории существенно ограничивает структуру его вакуумного среднего. Возможно, что для вычисления этого вакуумного среднего необходимо, как и при исследовании вклада суперполей материи, ввести некоторые дополнительные источники, которые позволили бы записать рассматриваемый оператор в несколько более простом виде. В настоящее время эта работа находится в стадии исследования.

Заключение

Построенные в этой работе уравнения Швингера–Дайсона для $N = 1$ суперсимметричной теории Янга–Миллса можно рассматривать в качестве исходной точки для исследования вклада калибровочных полей и духов в функцию Гелл-Манна–Лоу точно во всех порядках теории возмущений. Такое исследование должно также использовать тождества Славнова–Тейлора. Однако для его проведения необходимо преодолеть сложности, связанные с бесконечным числом эффективных диаграмм Фейнмана, которое следует из неполиномиальности действия.

Литература

1. *Уэст П.* Введение в суперсимметрию и супергравитацию, М., 1989.
2. *Novikov V., Shifman M., Vainstein A., Zakharov V.* // Phys. Lett. 1985. **166B**. P. 329.
3. *Avdeev L., Tarasov O.* // Phys. Lett. 1982. **112B**. P. 356.
4. *Jack I., Jones D., North C.* // Nucl. Phys. 1996. **B473**. P. 308.
5. *Jack I., Jones D., North C.* // Phys. Lett. 1996. **386B**. P. 138.
6. *Mas J., Perez-Victoria M., Seijas C.* // JHEP. (2002). **0203**. P. 049.
7. *Славнов А.* // ТМФ. 1975. **23**. С. 3.
8. *Bakeyev T., Slavnov A.* // Mod. Phys. Lett. 1996. **A11**. P. 1539.
9. *West P.* // Nucl. Phys. 1986. **B268**. P. 113.
10. *Soloshenko A., Stepanyantz K.* // E-print: hep-th/0203118.
11. *Солошенко А., Степаньянц К.* // ТМФ. 2003. **134**. С. 429.
12. *Солошенко А., Степаньянц К.* // ТМФ. 2004. **140**. С. 437.
13. *Степаньянц К.* // ТМФ. 2005. **142**. С. 37.
14. *Степаньянц К.* // ТМФ. 2007. **150**. С. 442.
15. *Пименов А., Степаньянц К.* // ТМФ. 2006. **147**. С. 290.
16. *Степаньянц К.* // ТМФ. 2006. **146**. С. 385.
17. *Pimenov A., Stepanyantz K.* // E-print: hep-th/0707.4006.
18. *Gates J., Grisaru M., Rocek M., Siegel W.* // Front. Phys. 1983. **58**. P. 1.

Поступила в редакцию
07.09.2007