УДК 517.958;621.372.8

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДИКИ ОБОБЩЕННОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ВОЛНОВОДОВ

Ю. В. Мухартова

(*кафедра математики*)

E-mail: muhartova@yandex.ru

Предложено использовать в качестве условия излучения при исследовании задач возбуждения волноводов существование решения в виде обобщенного преобразования Фурье. Методика применения обобщенного преобразования Фурье (Fr-преобразования) проиллюстрирована на примере цилиндрического волновода кругового сечения с импедансной границей.

При исследовании многих задачах математической теории волноводов может быть получена их обобщенная постановка следующего вида:

$$u + A_1 u + A_2 u_z + A_3 u_{zz} = f, \quad z \in \mathrm{R}_1, \qquad (1)$$

где A_1, A_2 и A_3 — компактные операторы, действующие в некотором гильбертовом пространстве H, а $f(z)$ — функция действительного аргумента z со значениями в H, т. е. правило, ставящее в соответствие каждой точке z действительной оси некоторый элемент из H.

Для того чтобы выделить единственное решение (1), необходимо поставить некоторое дополнительное условие на бесконечности. Исходя из физических соображений можно утверждать, что это условие должно соответствовать либо расходящимся, либо затухающим волнам в дальней зоне. На практике часто применяются так называемые парциальные условия [1, 2], в которых используется разложение решения по системе $\{u_n\}$ собственных функций однородной задачи

$$u_n + A_1 u_n + i\gamma_n A_2 u_n - \gamma_n^2 A_3 u_n = 0, \qquad (2)$$

отвечающих собственным значениям γ_n. Если возбуждение волновода осуществляется гармоническим источником, времення́я зависимость которого имеет вид $e^{-i\omega t}$, то ищется такое решение (1), которое при $z \to \pm\infty$ имеет вид $u(z) = \sum\limits_n U_n(z) u_n$, где коэффициенты разложения U_n в дальней зоне удовлетворяют условиям

$$\frac{dU_n}{dz} - i\gamma_n U_n \Big|_{z\to+\infty} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{dU_n}{dz} + i\gamma_n U_n \Big|_{z\to-\infty} = 0.$$

Однако для того чтобы решение (1) можно было раскладывать по системе $\{u_n\}$, она должна быть полна. При этом доказательство ее полноты часто является отдельной нетривиальной задачей. Поэтому в качестве одного из способов постановки условий излучения, не требующих исследования полноты системы нормальных волн, было предложено использовать наличие у решения обобщенного преобразования Фурье, или Fr-преобразования [3–5].

Fr-преобразованием H-значной функции $u(z)$ называется преобразование вида

$$u(z) = \mathrm{Fr}[\hat{u}(\gamma)] = \frac{1}{2\pi}\int\limits_C e^{i\gamma z}\hat{u}(\gamma)\, d\gamma, \quad \text{где} \quad \hat{u}(\gamma) \in H,$$

отличающееся от обычного преобразования Фурье тем, что контур интегрирования C совпадает с действительной осью всюду, кроме некоторых окрестностей действительных полюсов $\hat{u}(\gamma)$, если таковые существуют, причем отрицательные полюсы обходятся по верхней полуплоскости, а положительные — по нижней.

Методика использования Fr-преобразования включает в себя несколько шагов.

1. Переход в пространство образов и решение задачи

$$\hat{u} + A_1\hat{u} + i\gamma A_2\hat{u} - \gamma^2 A_3\hat{u} = \hat{f}. \qquad (3)$$

Если все операторы в (3) компактны, то она имеет единственное решение.

2. Исследование возможности обратного перехода $u(z) = \mathrm{Fr}[\hat{u}(\gamma)]$ в пространство прообразов. Если задача (2) имеет не более чем конечное число действительных собственных значений, то при $\gamma \to \pm\infty$ на действительной оси для решения (3) справедлива оценка $\|\hat{u}(\gamma)\| \leqslant \mathrm{const}\cdot\|\hat{f}(\gamma)\|$, т. е. асимптотика $\hat{u}$ при $\gamma \to \pm\infty$ определяется поведением функции $\hat{f}$. Если f финитна, то чем выше степень ее гладкости, тем быстрее $\hat{f}$ убывает на бесконечности.

3. Если асимптотика $\hat{u}$ такова, что интеграл $u = \mathrm{Fr}[\hat{u}]$ сходится равномерно по параметру z и может быть дважды продифференцирован по z, то он представляет собой единственное решение (1), допускающее Fr-преобразование. За счет структуры контура интегрирования это решение в дальней зоне будет соответствовать расходящимся либо затухающим волнам.

Предложенная методика может быть проиллюстрирована на примере задачи о возбуждении колебаний в полом цилиндрическом волноводе кругового поперечного сечения, произвольно ориентированным относительно оси волновода током $\boldsymbol{j}\cdot e^{-i\omega t}$, имеющим компактный носитель. Будем считать, что на границе волновода выполняются импедансные условия $[\boldsymbol{n},\boldsymbol{E}]_{\partial\Omega}=\zeta[\boldsymbol{n},[\boldsymbol{n},\boldsymbol{H}]]$, где ζ — произвольная комплексная постоянная. При исследовании данной задачи удобно перейти от искомого поля $\{\boldsymbol{E},\boldsymbol{H}\}\cdot e^{-i\omega t}$ к разности $\{\hat{\boldsymbol{E}},\hat{\boldsymbol{H}}\}=\{\boldsymbol{E},\boldsymbol{H}\}-\{\boldsymbol{E}_0,\boldsymbol{H}_0\}$, где $\{\boldsymbol{E}_0,\boldsymbol{H}_0\}\cdot e^{-i\omega t}$ — поле, которое возбуждалось бы током $\boldsymbol{j}\cdot e^{-i\omega t}$ в волноводе, если бы его граница была идеально проводящей. Эта разность может быть выражена при помощи электрического и магнитного векторов Герца $\hat{\boldsymbol{\Pi}}^e=\varphi\cdot\boldsymbol{e}_z$ и $\hat{\boldsymbol{\Pi}}^m=\psi\cdot\boldsymbol{e}_z$, направленных вдоль оси волновода. Пусть $\varphi^{(0)}$ и $\psi^{(0)}$ — это соответствующие функции φ и ψ в случае идеально проводящей границы волновода, т. е. при $\zeta=0$. За счет радиальной симметрии волновода все функции могут быть разложены в ряды Фурье по полярному углу θ:

$$\varphi(z,\rho,\theta)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}e^{-im\theta}\cdot\varphi_m(z,\rho)\quad \text{и т. д.}$$

Фурье-коэффициенты φ_m и ψ_m будем искать в виде суммы $(\varphi_m\ \psi_m)=\left(\varphi_m^{(e)}\ \psi_m^{(e)}\right)+\left(\varphi_m^{(m)}\ \psi_m^{(m)}\right)$, где $\left(\varphi_m^{(e/m)}\ \psi_m^{(e/m)}\right)$ удовлетворяют задачам

$$\begin{cases}\Delta_\rho\varphi_m^{(e/m)}+\dfrac{\partial^2\varphi_m^{(e/m)}}{\partial z^2}+\left(\omega^2-\dfrac{m^2}{\rho^2}\right)\varphi_m^{(e/m)}=0,\\ \Delta_\rho\psi_m^{(e/m)}+\dfrac{\partial^2\psi_m^{(e/m)}}{\partial z^2}+\left(\omega^2-\dfrac{m^2}{\rho^2}\right)\psi_m^{(e/m)}=0,\\ -i\omega\zeta\dfrac{\partial\varphi_m^{(e/m)}}{\partial\rho}-\dfrac{im}{R}\zeta\dfrac{\partial\psi_m^{(e/m)}}{\partial z}-\left(\omega^2+\dfrac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\varphi_m^{(e/m)}\Big|_{\rho=R}=\\ =-\zeta f_m^{\tau,e/m}\Big|_{\rho=R},\ f_m^{\tau,e}=-i\omega\dfrac{\partial\varphi_m^{(0)}}{\partial\rho},\ f_m^{\tau,m}=-\dfrac{im}{R}\dfrac{\partial\psi_m^{(0)}}{\partial z},\\ i\omega\dfrac{\partial\psi_m^{(e/m)}}{\partial\rho}-\dfrac{im}{R}\dfrac{\partial\varphi_m^{(e/m)}}{\partial z}+\zeta\left(\omega^2+\dfrac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\psi_m^{(e/m)}\Big|_{\rho=R}=\\ =-\zeta f_m^{z,e/m}\Big|_{\rho=R},\quad f_m^{z,e}=0,\quad f_m^{z,m}=\left(\omega^2+\dfrac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\psi_m^{(0)}.\end{cases}\tag{4}$$

Задачи (4) необходимо дополнить условиями при $z\to\pm\infty$ для того, чтобы выделить их единственное решение. В качестве такого условия будем использовать существование у решений Fr-преобразований

$$\begin{pmatrix}\varphi_m^{(e/m)}(z,\rho)\\ \psi_m^{(e/m)}(z,\rho)\end{pmatrix}=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{C_m^{(e/m)}}e^{i\gamma z}\begin{pmatrix}\hat\varphi_m^{(e/m)}(\gamma,\rho)\\ \hat\psi_m^{(e/m)}(\gamma,\rho)\end{pmatrix}d\gamma,$$

где контуры интегрирования обходят вещественные полюсы подынтегральных выражений в соответствии с общим правилом.

В данном примере, как и в общем случае, асимптотика решений задач в пространстве образов будет определяться особенностями правых частей. Для цилиндрических волноводов произвольного поперечного сечения с идеально проводящими стенками, возбуждение колебаний в которых осуществляется произвольно ориентированным компактным током, векторы Герца были найдены в классических работах А. Н. Тихонова и А. А. Самарского [6–7]. Используя эти выражения, найдем $\hat\varphi_m^{(0)}$ и $\hat\psi_m^{(0)}$. Так как интерес представляет зависимость функций $\varphi_m^{(0)}$ и $\psi_m^{(0)}$ от z, то выражения для них достаточно привести в сокращенном виде: $\varphi_m^{(0)}=\sum\limits_n\varphi_{m,n}^{(0)}$ и $\psi_m^{(0)}=\sum\limits_n\psi_{m,n}^{(0)}$, где

$$\varphi_{m,n}^{(0)}=J_m\left(\sqrt{\lambda_{n,m}^0}\rho\right)\int\limits_G\{\operatorname{sign}(z-z_0)g_1+g_2\}\times\\ \times e^{i\gamma_{n,m}^0|z-z_0|}\,dM_0,$$

$$\psi_{m,n}^{(0)}=i\omega J_m\left(\sqrt{\hat\lambda_{n,m}^0}\rho\right)\int\limits_G g_3e^{i\hat\gamma_{n,m}^0|z-z_0|}\,dM_0.$$

Функции g_1, g_2 и g_3 в этих выражениях зависят от координат и содержат ток $j(M_0)$ в качестве сомножителя. Интегрирование ведется по области G, в которой возбуждающий колебания ток отличен от нуля, а постоянные $\gamma_{n,m}^0$ и $\hat\gamma_{n,m}^0$ вычисляются как корни $\gamma_{n,m}^0=\sqrt{\omega^2-\lambda_{n,m}^0}$ и $\hat\gamma_{n,m}^0=\sqrt{\omega^2-\hat\lambda_{n,m}^0}$, где $\lambda_{n,m}^0$ и $\hat\lambda_{n,m}^0$ представляют собой решения характеристических уравнений $J_m\left(\sqrt{\lambda_{n,m}^0}R\right)=0$ и $J_m'\left(\sqrt{\hat\lambda_{n,m}^0}R\right)=0$. На основании леммы Жордана

$$e^{i\gamma_{n,m}^0|z-z_0|}=-\frac{i\gamma_{n,m}^0}{\pi}\int\limits_{\Gamma_{n,m}^{(0)}}\frac{e^{i\gamma(z-z_0)}}{\gamma^2-(\gamma_{n,m}^0)^2}\,d\gamma,$$

$$\operatorname{sign}(z-z_0)\,e^{i\gamma_{n,m}^0|z-z_0|}=-\frac{i\gamma}{\pi}\int\limits_{\Gamma_{n,m}^{(0)}}\frac{e^{i\gamma(z-z_0)}}{\gamma^2-(\gamma_{n,m}^0)^2}\,d\gamma,$$

где $\Gamma_{n,m}^{(0)}$ совпадает с действительной осью, если соответствующее $\gamma_{n,m}^0$ является мнимым, и если $\gamma_{n,m}^0$ является действительным, то контур обходит точку $\gamma_{n,m}^0$ в нижней полуплоскости и $(-\gamma_{n,m}^0)$ в верхней. Поэтому

$$\hat\varphi_{m,n}^{(0)}=-\frac{2iJ_m\left(\sqrt{\lambda_{n,m}^0}\rho\right)}{\gamma^2-(\gamma_{n,m}^0)^2}\int\limits_G\{\gamma g_1+\gamma_{n,m}^0g_2\}e^{-i\gamma z_0}\,dM_0,$$

$$\hat\psi_{m,n}^{(0)}=\frac{2\hat\gamma_{n,m}^0\omega J_m\left(\sqrt{\hat\lambda_{n,m}^0}\rho\right)}{\gamma^2-(\hat\gamma_{n,m}^0)^2}\int\limits_G g_3e^{-i\gamma z_0}\,dM_0.$$

Обратимся теперь к анализу задач для функций $\left(\hat{\varphi}^{(e/m)}_{m,n}\ \hat{\psi}^{(e/m)}_{m,n}\right)^T$, которые в дальнейшем будут играть роль Fr-образов функций $\left(\varphi^{(e/m)}_{m,n}\ \psi^{(e/m)}_{m,n}\right)^T$:

$$\begin{cases} \Delta_\rho \hat{\varphi}^{(e/m)}_{m,n} + \left(\omega^2 - \gamma^2 - \dfrac{m^2}{\rho^2}\right)\hat{\varphi}^{(e/m)}_{m,n} = 0, \\ \Delta_\rho \hat{\psi}^{(e/m)}_{m,n} + \left(\omega^2 - \gamma^2 - \dfrac{m^2}{\rho^2}\right)\hat{\psi}^{(e/m)}_{m,n} = 0, \\ -i\omega\zeta\dfrac{\partial\hat{\varphi}^{(e/m)}_{m,n}}{\partial\rho} + \dfrac{m\gamma}{R}\zeta\hat{\psi}^{(e/m)}_{m,n} - (\omega^2-\gamma^2)\hat{\varphi}^{(e/m)}_{m,n}\Big|_{\rho=R} = \\ = -\zeta\hat{f}^{\tau,e/m}_{m,n}\Big|_{\rho=R}, \quad \hat{f}^{\tau,e}_{m,n} = -i\omega\dfrac{\partial\hat{\varphi}^{(0)}_{m,n}}{\partial\rho}, \quad \hat{f}^{\tau,m}_{m,n} = \dfrac{m\gamma}{R}\hat{\psi}^{(0)}_{m,n}, \\ i\omega\dfrac{\partial\hat{\psi}^{(e/m)}_{m,n}}{\partial\rho} + \dfrac{m\gamma}{R}\hat{\varphi}^{(e/m)}_{m,n} + \zeta(\omega^2-\gamma^2)\hat{\psi}^{(e/m)}_{m,n}\Big|_{\rho=R} = \\ = -\zeta\hat{f}^{z,e/m}_{m,n}\Big|_{\rho=R}, \quad \hat{f}^{z,e}_{m,n} = 0, \quad \hat{f}^{z,m}_{m,n} = (\omega^2-\gamma^2)\hat{\psi}^{(0)}_{m,n}. \end{cases} \tag{5}$$

Их решения имеют вид $\left(\hat{\varphi}^{(e/m)}_{m,n}\ \hat{\psi}^{(e/m)}_{m,n}\right) = \left(A^{(e/m)}_{m,n}\ B^{(e/m)}_{m,n}\right)\cdot J\left(\sqrt{\omega^2-\gamma^2}\cdot\rho\right)$. При подстановке данного выражения в граничные условия будет получена система для определения коэффициентов $A^{(e/m)}_{m,n}$ и $B^{(e/m)}_{m,n}$, которая единственным образом разрешима, если ее определитель

$$\begin{gathered} \mathrm{Det}(\gamma) = \zeta\omega^2\left(\omega^2-\gamma^2\right)\left[J'_m\left(\sqrt{\omega^2-\gamma^2}R\right)\right]^2 - \\ - i\omega\left(1+\zeta^2\right)\left(\omega^2-\gamma^2\right)^{3/2} J_m\left(\sqrt{\gamma^2-\omega^2}R\right) \times \\ \times J'_m\left(\sqrt{\omega^2-\gamma^2}R\right) - \\ - \zeta\left((\omega^2-\gamma^2)^2 + \left(\frac{m\gamma}{R}\right)^2\right) J_m^2\left(\sqrt{\omega^2-\gamma^2}R\right) \end{gathered}$$

не обращается в нуль. Нули этого определителя представляют собой постоянные распространения нормальных волн в рассматриваемом волноводе. На основании подготовительной теоремы Вейерштрасса можно показать, что при всех достаточно малых по модулю ζ корни уравнения $\mathrm{Det}(\gamma) = 0$ имеют единичную кратность. Действительных постоянных распространения может быть только конечное число, причем все они по модулю ограничены некоторым γ_0. При всех действительных γ, таких что $|\gamma| > \gamma_0$, решение задач (5) единственно. При $\gamma \to \pm\infty$ за счет поведения цилиндрических функций при большом аргументе [8] и финитности тока j оно имеет асимптотику, обеспечивающую равномерную сходимость интегралов

$$\left(\varphi^{(e/m)}_{m,n}\ \psi^{(e/m)}_{m,n}\right) = \mathrm{Fr}\left[\left(\hat{\varphi}^{(e/m)}_{m,n}\ \hat{\psi}^{(e/m)}_{m,n}\right)\right]. \tag{6}$$

Если функция $j(M)$, описывающая возбуждающий колебания ток, является хотя бы два раза непрерывно дифференцируемой по z, то интегралы (6) представляют собой решение задачи (4), если в правые части ее граничных условий подставлены функции $f^{\tau,e/m}_{m,n}$ и $f^{z,e/m}_{m,n}$.

Интегралы (6) можно вычислить при помощи взятия вычетов, замыкая контуры $C^{(e/m)}_{m,n}$ в верхней полуплоскости, если $z - z_0 \geqslant 0$, и в нижней, если $z - z_0 \leqslant 0$. В результате получим

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \varphi^{(e)}_{n,m} \\ \psi^{(e)}_{n,m} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -\varphi^{(0)}_{n,m} \\ 0 \end{pmatrix} + \\ &+ \zeta\sum_k \frac{J_m\left(\sqrt{\lambda^+_{km}}\,\rho\right)}{(\gamma^+_{km})^2 - (\gamma^0_{nm})^2}\int_{G^+} e^{i\gamma^+_{km}(z-z_0)}\begin{pmatrix} q_1^+ \\ q_2^+ \end{pmatrix} dM_0 + \\ &+ \zeta\sum_k \frac{J_m\left(\sqrt{\lambda^-_{km}}\,\rho\right)}{(\gamma^-_{km})^2 - (\gamma^0_{nm})^2}\int_{G^-} e^{i\gamma^-_{km}(z-z_0)}\begin{pmatrix} q_1^- \\ q_2^- \end{pmatrix} dM_0 + \\ &+ \zeta\left(\frac{\rho}{R}\right)^m\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}\int_{G^+} e^{i\omega(z-z_0)}(\tilde{g}_1+\tilde{g}_2)\,dM_0 - \right. \\ &\left. - i\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}\int_{G^-} e^{-i\omega(z-z_0)}(\tilde{g}_1-\tilde{g}_2)\,dM_0\right\} \end{aligned} \tag{7}$$

и

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \varphi^{(m)}_{n,m} \\ \psi^{(m)}_{n,m} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ -\psi^{(0)}_{n,m} \end{pmatrix} + \\ &+ \zeta\sum_k \frac{J_m\left(\sqrt{\lambda^+_{km}}\,\rho\right)}{(\gamma^+_{km})^2 - (\hat{\gamma}^0_{nm})^2}\int_{G^+} e^{i\gamma^+_{km}(z-z_0)}\begin{pmatrix} q_3^+ \\ q_4^+ \end{pmatrix} dM_0 + \\ &+ \zeta\sum_k \frac{J_m\left(\sqrt{\lambda^-_{km}}\,\rho\right)}{(\gamma^-_{km})^2 - (\hat{\gamma}^0_{nm})^2}\int_{G^-} e^{i\gamma^-_{km}(z-z_0)}\begin{pmatrix} q_3^- \\ q_4^- \end{pmatrix} dM_0 + \\ &+ \zeta\left(\frac{\rho}{R}\right)^m\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}\int_{G^+} e^{i\omega(z-z_0)}\tilde{g}_3\,dM_0 - \right. \\ &\left. - i\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}\int_{G^-} e^{-i\omega(z-z_0)}\tilde{g}_3\,dM_0\right\}. \end{aligned} \tag{8}$$

В этих выражениях константы $\gamma^+_{n,m}$ представляют собой постоянные распространения, которые либо положительны, либо имеют положительную мнимую часть, а $\gamma^-_{n,m}$ — постоянные распространения, которые либо отрицательны, либо имеют отрицательную мнимую часть. Область G^+ — это часть области G, в которой справедливо неравенство $z_0 \leqslant z$ при данном z, и G^- — часть G, в которой $z_0 \geqslant z$. Функции $q_i^\pm$ и $\tilde{g}_i$ зависят только от координат M_0.

Для нахождения постоянных распространения применима теория возмущения. В первом приближении по параметру ζ они имеют вид

$$\gamma_{n,m}(\zeta) = \pm\gamma^0_{n,m}\left(1 + \zeta\cdot\frac{i\omega}{R\left(\gamma^0_{n,m}\right)^2} + \ldots\right),$$

$$\gamma_{n',m'}(\zeta) = \pm\hat{\gamma}^0_{n',m'}\times$$

$$\times\left\{1 + \frac{i\zeta R}{\omega\left(\hat{\gamma}^0_{n',m'}\right)^2}\cdot\frac{\left(\hat{\lambda}^0_{n',m'}\right)^2 + \left(\frac{m\hat{\gamma}^0_{n',m'}}{R}\right)^2}{R^2\hat{\lambda}^0_{n',m'} - m'^2} + \ldots\right\}.$$

Таким образом, при помощи методики обобщенного преобразования Фурье в явном виде может быть получено единственное решение, которое включает в себя затухающие и расходящиеся волны. В этом смысле данное решение удовлетворяет парциальным условиям излучения. При этом исследовать полноту системы нормальных волн нет необходимости.

Литература

1. *Ильинский А.С., Кравцов В.В., Свешников А.Г.* Математические модели электродинамики. М., 1991.
2. *Ильинский А.С., Слепян Г.Я.* Колебания и волны в электромагнитных системах с потерями. М., 1983.
3. *Боголюбов А.Н., Малых М.Д.* // ЖВМ и МФ. 2003. **43**, № 4. С. 585.
4. *Боголюбов А.Н., Малых М.Д., Мухартова Ю.В.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2006. № 1. С. 3.
5. *Боголюбов А.Н., Малых М.Д., Мухартова Ю.В.* // ЖВМ и МФ. 2006. **46**, № 12. С. 2228.
6. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* // Журн. техн. физики. 1947. **XVII**, № 11. С. 1283.
7. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* // Журн. техн. физики. 1947. **XVII**, № 12. С. 1431.
8. *Свешников А.Г., Боголюбов А.Н., Кравцов В.В.* Лекции по математической физике. М., 2004.

Поступила в редакцию
05.09.2007