УДК 517.9

НЕКОТОРЫЕ КАЧЕСТВЕННЫЕ СВОЙСТВА УРАВНЕНИЯ ВАН ДЕР ПОЛЯ КАК СЛЕДСТВИЕ ЕГО СИНГУЛЯРНОГО МНОЖЕСТВА

И. П. Павлоцкий[*], М. Б. Садовникова, М. Стрианезе[*]
(*кафедра квантовой статистики и теории поля*)

Показано, что сингулярное множество продолженной «обратной» интегральной кривой $x(y)$ уравнения Ван дер Поля покрыто локальными экстремумами $x(y)$, устойчивыми относительно малых возмущений уравнения. Как следствие можно указать качественный характер $x(y)$ и некоторые ее важные свойства.

Введение

Уравнение Ван дер Поля [1] для удобства напишем как систему

$$\dot{y} = -x + \varepsilon y(1 - x^2), \quad \dot{x} = y, \quad \varepsilon > 0. \qquad (1)$$

Оно служит основной моделью самоподдерживающихся колебаний в механических и электронных системах [2, 3], в биологии и биохимии [4, 5] и в ряде других приложений. Уравнение изучалось во многих публикациях.

В настоящей работе для изучения поведения интегральной кривой $x(y)$ уравнения Ван дер Поля используется метод продолжения решения на сингулярное множество уравнения через продолжение на это множество локальных первых интегралов [6–8]. Показывается, что для продолженной кривой сингулярное множество полностью покрыто локальными экстремумами $x(y)$, устойчивыми относительно малых возмущений уравнения.

Для того чтобы определить сингулярное множество, рассмотрим систему

$$\begin{gathered} \dot{y} = P(x, y), \quad \dot{x} = y, \quad P \in C^{1,1}, \\ (x, y) \in M \subseteq \mathbb{R}^2, \quad t \in T \subseteq \mathbb{R}, \end{gathered} \qquad (2)$$

полагая, что существует траектория $(\varphi(t), \dot{\varphi}(t)) \in \in M$.

Из (2) следует

$$dx/dy = y/P(x, y) \in C^{1,1}, \quad P(x, y) \neq 0. \qquad (3)$$

Назовем $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon\ P(x, y) = 0, \ \ y \neq 0\}$ сингулярным множеством второго типа, а точки S — сингулярными точками. Будем полагать, что S имеет нулевую лебегову меру в $\mathbb{R}^2$. Пусть первый интеграл $I(x, y)$ уравнения (2) продолжаем в классе $C^{1,1}$ в некоторую окрестность O сингулярной точки. $[x(t), y(t)]$ — продолжение траектории $(\varphi(t), \dot{\varphi}(t))$ на $M \bigcup O$ через $I(x, y)$, если $x(t) = \varphi(t)$, $y(t) = \dot{\varphi}(t)$ для $t \in T$ и $I(x(t), y(t)) \equiv C$ на O (C — постоянная). Как следствие получаем продолжение интегральных кривых $x(y)$ и $y(x)$ на $M \bigcup O$.

Обозначим $\Xi_c = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon\ I(x, y) = C\}$. Интегральная кривая может достигать S только в случае, когда $\Xi_c \bigcap S \neq \varnothing$.

Для удобства будем говорить, что (x_0, y_0) — точка локального экстремума функции $x(y) \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, если $x(y)$ имеет локальный экстремум при $y = y_0$ и $x_0 = x(y_0)$.

Обозначим $l_\pm = lim \frac{dx}{dy}(x, y)$ при $(x, y) \to \to (x_0, y_0 \pm 0)$, где $(x_0, y_0) \in S$. По формуле (3) $|l_+| = |l_-| = \infty$, и $x(y)$ не имеет производной в сингулярной точке. Если $x(y)$ продолжаема в (x_0, y_0) так, что $(x(y_0), y_0) = (x_0, y_0)$ и, кроме того, $l_- l_+ = -\infty$, то (x_0, y_0) — локальный экстремум продолженной кривой $x(y)$. Если же $l_- l_+ = +\infty$, то в (x_0, y_0) экстремума нет.

1. Продолжение кривой $x(y)$ на S

Для уравнения Ван дер Поля $S = x, y \in \mathbb{R}^2 \colon$ $x = \varepsilon y(1 - x^2)$, $y \neq 0$, $\varepsilon > 0$ и может быть представлен кривой

$$y = x/\varepsilon(1 - x^2), \quad x \neq 0, \quad x \neq \pm 1, \qquad (4)$$

распадающейся на три ветви. Из (3) следует

$$\frac{dx}{dy} = y/(-x + \varepsilon y(1 - x^2)). \qquad (5)$$

Вначале рассмотрим $x(y)$ вне S на оси $y = 0$, где $\frac{dx}{dy} = 0$. Вычисляя вторую производную при $y = 0$, получим

$$\left.\frac{d^2 x(y)}{dy^2}\right|_{y=0} = \frac{-1}{x^2}, \quad x \neq 0, \qquad (6)$$

т. е. $x(y)$, достигая оси $y = 0$, имеет там локальный максимум, если $x > 0$ и локальный минимум при $x < 0$.

Следуя [9], покажем, что $x(y)$ продолжаема в любую сингулярную точку (x_0, y_0) через продол-

[*] Второй Неаполитанский университет, Италия.

жение локальных первых интегралов $I(x, y, x_0, y_0)$. Фиксируем произвольные значения $x = x_0$, $y = y_0$, исключая только особую точку $(x_0, y_0) = (0, 0)$. Полагая $\tau = t - t_0$ $(x_0 = x(t_0),\ y_0 = y(t_0))$, в случае системы (1) имеем: $x = x_0 + y\tau_0 + o(\tau)$, $y = y_0 + (-x_0 + \varepsilon y(1 - x_0^2))\tau + o(\tau)$, откуда в $O \setminus S$, где O — достаточно малая окрестность точки (x_0, y_0), получаем локальный первый интеграл $I = \frac{x-x_0}{y} - \frac{y-y_0}{-x_0+\varepsilon y(1-x_0^2)} = C$. При фиксированной постоянной C в этой окрестности единственное локальное решение $x = x_0 + \frac{y(y-y_0)}{-x_0+\varepsilon y(1-x_0^2)} + yC$. Если мы хотим выбрать $(x_0, y_0) \in S$ и продолжить локальное решение в сингулярную точку, то встретимся с неопределенностью типа 0/0. Полагая $y_0 = x_0/\varepsilon(1 - x_0^2) = y^*$, вычислим

$$\lim_{y\to y^*} \frac{y(y - y^*)}{-x_0 + \varepsilon y(1 - x_0^2)} = \frac{x_0}{(\varepsilon(1 - x_0^2))^2}, \quad x_0 \neq \pm 1.$$

Таким образом, локальный первый интеграл продолжаем в $(x_0, y_0) \in S$, и локальная кривая проходит через сингулярную точку, если $C = -(\varepsilon(1 - x_0^2))^{-1}$. Иными словами, продолженная локальная кривая

$$x(y) = x_0 + y\left[\frac{y - y_0}{-x_0 + \varepsilon y(1 - x_0^2)} - \frac{1}{\varepsilon(1 - x_0^2)}\right] \to x_0,$$

если $y \to y_0$, $x_0 \neq \pm 1$, $x_0 \neq 0$ (иначе $y_0 = 0$, и мы имеем особую точку). Заметим, что $(0, 0)$ и прямые $x = \pm 1$ находятся вне S.

С помощью формулы (5) покажем, что продолженные кривые $x(y)$ имеют в любой сингулярной точке (x_0, y_0) локальные экстремумы: знаки $dx/dy(x_0, y_0 - 0)$ и $dx/dy(x_0, y_0 + 0)$ противоположны. Как нетрудно видеть, достаточно рассмотреть четыре ситуации: 1) $[x_0 > 1,\ y_0 < 0]$ — имеем локальные минимумы функции $x(y)$; 2) $[x_0 > 0,\ y_0 > 0]$ — в сингулярных точках также локальные минимумы $x(y)$; 3) $[x_0 < 0,\ y_0 < 0]$ — имеем локальные максимумы; 4) $[x_0 < -1,\ y_0 > 0]$ — также локальные максимумы. Вне $y = 0$ функция $x(y)$ недифференцируема в экстремальных точках.

2. Устойчивость локальных экстремумов

Вместе с уравнением (2) рассмотрим возмущенное уравнение

$$y^0 = P(x, y) + \lambda\pi(x, y), \quad x^0 = y, \quad \pi \in C^1 \qquad (7)$$

с сингулярным множеством

$$S^* = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon P(x, y) + \lambda\pi(x, y) = 0,\ y \neq 0\}$$

и интегральными кривыми $x^*(y)$, продолженными на S^*.

О п р е д е л е н и е 1. Пусть $O(x_0, y_0)$ — некоторая окрестность сингулярной точки (x_0, y_0). Кривые $x(y)$ и $x^*(y)$ имеют в $O(x_0, y_0)$ поведение одинакового типа, если: 1) $x(y)$ возрастает (убывает) в какой-то точке $(x(y), y) \in O(x_0, y_0) \bigcap S$, а $x^*(y)$ возрастает (убывает) в каждой точке $(x^*(y), y) \in O(x_0, y_0) \bigcap S^*$, или 2) $x(y)$ имеет локальный максимум (минимум) в каждой точке $(x(y), y) \in O(x_0, y_0) \bigcap S$, а $x^*(y)$ имеет локальный максимум (минимум) в любой точке $(x^*(y), y) \in O(x_0, y_0) \bigcap S^*$.

О п р е д е л е н и е 2. $(x_0, y_0) \in S$ является точкой локальной устойчивости кривой $x(y)$ относительно перехода от уравнения (2) к (7), если для достаточно малого $|\lambda| > 0$ $(0 < \lambda < \lambda_0(x_0, y_0))$ существует такая окрестность $O(x_0, y_0)$ точки (x_0, y_0), что интегральные кривые $x(y)$ и $x^*(y)$ имеют поведение одинакового типа в $O(x_0, y_0)$.

В работе [10] доказана

Т е о р е м а. *Пусть $x(y)$ — интегральная кривая уравнения (2), продолженная на S через первый интеграл уравнения, а $x^*(y)$ — интегральная кривая уравнения* (2)*, продолженная на S^* через первый интеграл уравнения* (7)*. Локальные экстремумы $x(y)$ на S локально устойчивы. Точки $x(y)$ другого типа на S неустойчивы.*

3. Некоторые выводы

Рассмотрим также случай, где плоскость разделена на три области: R_1 над ветвью S_2^+ сингулярного множества; R_2 под $S_2^- \subset S$ и R между S_2^- и S_2^+. Таким образом, средняя ветвь S, между асимптотами $x = \pm 1$, находится в R. Продолженные кривые $x(y)$ имеют следующие свойства:

1) $dx/dy < 0$ как в R_1, так и в R_2 (см. (5)). Если интегральная кривая $x(y)$, проходя через точку в R_1, достигает S_2^+. Она не может пересечь S_2^+ в случае непрерывной $y(t)$, так как имеет на S_2^+ локальный минимум. Из-за того что $dx/dy < 0$ всюду в R_1 и, кроме того, $(dx/dy)(x_0, y_0 + 0) \to +\infty$, $(x_0, y_0) \in S_2^+$, следует, что после (x_0, y_0) интегральная кривая не может возвратиться в R_1. Более того, (x_0, y_0) не может быть точкой остановки ибо невозможно сохранить со временем положение x_0 при скорости $dx/dt = y_0 \neq 0$. Предположим, что скачок $x(t)$ невозможен по природе описываемой модели, т. е. $y = \dot{y}$ существует для любого t. Тогда интегральная кривая продолжается из $(x_0, y_0) \in S_2^*$, либо переходя в момент $t = t_0$ в другую интегральную кривую, расположенную в R и отвечающую другому решению $x = f(t)$, либо $y(t)$ в момент $t = t_0$ совершает скачок $\triangle y = y_1 - y_0$, $(x_0, y_1) \in R$, и dy/dt существует только в классе обобщенных функций. Такая ситуация встречается на сингулярном множестве 1-го типа [6, 7]. Нетрудно видеть, что циклы, полностью лежащие в R_1, невозможны. Ситуация аналогична для $x(y)$, проходящей через точку в R_2 и достигающей S_2^-. В частности, невозможны циклы, полностью лежащие в R_2. Интегральные кривые, в частности циклы, пересекающиеся с S_2^+ или

с S_2^-, могут иметь скачки скорости y в сингулярных точках $(x_0, y_0) \in S_2^* \bigcup S_2^-$;

2) в R: $dx/dy < 0$, если $x > 1$, $y > 0$ или $x < -1$, $y < 0$; $dx/dy > 0$ при $-1 < x < 1$. По причинам, изложенным в предыдущем свойстве, $x(y)$, проходя через точки в R, не может войти ни в R_1, ни в R_2 без скачка $y(t)$. В R возможны различные типы поведения $x(y)$. Вспомним также, что на оси $y = 0$ функция $x(y)$ имеет локальный максимум, если $x(0) > 0$, и локальный минимум, если $x(0) < 0$. Интервалы выпуклости и вогнутости устанавливаются с помощью формулы

$$\frac{d^2x}{dy^2} = \frac{x^2 + y^2 + \varepsilon xy(x^2 + 2y^2 - 1)}{[-x + \varepsilon y(1 - x^2)]^3}.$$

На рис. 2 приведен пример цикла без скачков, расположенного в R;

3) если $|y| = |\dot{x}|$ принимают очень большие, но конечные значения, то в плоскости (x, y) возникают циклы типа «релаксационных колебаний». Для больших значений ε такая ситуация изучена другим методом и в других переменных, например в книге [1].

Авторы благодарят А. Буономо за обсуждение работы.

Литература

1. *Van der Pol B.* // Phil. Mag. 1926. **7**, N 2. P. 978.
2. *Andronov A.A., Vitt A.A., Chaikin S.A.* Addison Wesly Reading, M.A., 1966.
3. *Buonomo A., Di Bello C.* // IEEE Trans. Circuits Systems I. Fund. Theory Appl. 1966. **43**. P. 953.
4. *Cronin I.* Mathematical Aspects of Hodghin-Huxley Neutral Theory. Cambridge, 1987.
5. *Yrasman J.* Assymptotic methods for relaxation oscillators and application. N.Y., 1987.
6. *Павлоцкий И.П., Стрианезе М., Тоскано Р.* // Дифференц. уравнения. 1998. **34**, № 3. С. 313.
7. *Pavlotsky I.P., Strianese M., Toscano R.* // J. Interdisciplinary Math. 1999. **2**, № 2–3. С. 101.
8. *Pavlotsky I.P., Strianese M.* // Nonlinear Analysis. 2001. **47**. P. 4313.
9. *Баутин Н.Н., Леонтович Е.А.* Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. М., 1990.
10. *Павлоцкий И.П., Садовников Б.И., Стрианезе М.* // Докл. РАН. 2002. **383б**, № 3. С. 311.
11. *Мищенко Е.Ф., Розов Н.Х.* Дифференциальные уравнения с малым параметром и релаксационные колебания. М., 1975.

Поступила в редакцию
28.03.07