

матрицы плотности, так и корреляционные матрицы различных видов. Для молекулярных систем это допускает тривиальное обобщение: матрицы плотности будут иметь дополнительные индексы, отражающие принадлежность к той или иной группе молекул, а интегрирование необходимо дополнить суммированием по всем типам молекул.

Учет многочастичных взаимодействий упрощается тем, что даже трехчастичные взаимодействия существенно слабее двухчастичных. Но в ряде случаев, например при описании фазовых переходов, важна не столько величина вклада, сколько относительный вклад в различные модификации. Следует отметить, что многочастичные взаимодействия предполагают и использование частичных матриц плотности более высокого порядка: для термического и калорического уравнений состояния при k -частичном взаимодействии это будут $R_k(1, \dots, k)$, а для теплоемкости и модулей упругости порядок матрицы плотности достигает $2k$.

Нетрудно учесть внутренние степени свободы молекул [8, 9], так как наличие информации о связанном расположении группы атомов упрощает описание однородной фазы при известной структуре неоднородной. Определение структуры составляет здесь основную сложность [10].

Более сложным является случай, когда система состоит из частиц, потенциал взаимодействия между которыми существенно отличается, например молекулярная система, имеющая электронную подсистему. Тогда удобно использовать представление вторичного квантования, однако это налагает ограничения на тип рассматриваемого потенциала. Этих ограничений можно избежать в координатном

представлении, которое, в свою очередь, имеет не до конца решенные вопросы с асимптотическим поведением матриц плотности [11]. Оптимальное решение проблем в рамках данных подходов и составляет основную задачу.

Таким образом, метод сокращенного описания не только решает проблему термодинамической совместности термического и калорического уравнений состояния, но и дает способ практического решения проблемы статистического описания поведения систем многих частиц различных классов в широкой области изменения термодинамических параметров.

Литература

1. Боголюбов Н.Н. Собр. соч. Т. 2. Киев: Наукова думка, 1970.
2. Аринштейн Э.А. // Теор. и матем. физ. 2002. **130**, № 1. С. 54.
3. Lowdin P.O. // Phys. Rev. 1955. **97**. P. 1474.
4. Смирнов М.Б., Hinka J. // ФТТ. 2000. **42B**, № 12. С. 2219.
5. Скрипов С.М. // УФН. 2001. **171**. № 3. С. 299.
6. Новиков И.И. // Теплофиз. высоких температур. 2001. **39**. № 1. С. 47.
7. Мартынов Г.А. // ДАН. 2001. **378**. № 2. С. 173.
8. Zivny O.C. // J. Chem. Phys. Lett. 1999. **308**. P. 165.
9. Piecuch P., Kucharski S.A., Spirko V. // J. Chem. Phys. 1999. **111**. P. 6679.
10. Власов А.А. Нелокальная статистическая механика. М.: Наука, 1978.
11. Ashcroft N.W., Mermin N.D. Solid state physics. Holt, Rinehart and Winston, N. Y., 1976.

Поступила в редакцию
28.06.02

АТОМНАЯ И ЯДЕРНАЯ ФИЗИКА

УДК 539.186.22, 539.19

ДИНАМИКА МОЛЕКУЛ В СИЛЬНОМ ЛАЗЕРНОМ ПОЛЕ В УСЛОВИЯХ МАЛОЙ ДИССОЦИАЦИИ

М. С. Молоденский, О. В. Тихонова

(НИИЯФ)

E-mail: ovt@mics.msu.su

В модели жесткого ротатора исследована вращательная динамика двумерного молекулярного иона водорода. Обнаружен эффект динамической ориентации ядерного волнового пакета вдоль и поперек направления поляризации поля лазера при значениях параметров лазера, для которых вероятность диссоциации мала.

Введение

Одним из проявлений взаимодействия лазерного излучения с веществом является ориентирование молекул [1]. Основным принцип экспериментов по ориентации молекул таков: вещество мишени сна-

чала взаимодействует с импульсом лазера длительностью в несколько десятков фемтосекунд. После взаимодействия изначально неупорядоченных и хаотично расположенных молекул с электромагнитным полем предварительного импульса молекулы оказы-

ваются ориентированными преимущественно вдоль некоторого направления (обычно совпадающего с направлением поляризации лазерного поля) [2]. Это наблюдается с помощью основного лазерного импульса, в результате которого происходит диссоциация молекул мишени. По зависимости количества разлетевшихся осколков от угла можно судить о степени ориентированности молекул за счет предварительного импульса, которая зависит от его амплитуды, длительности, частоты и поляризации.

Первые эксперименты по ионизации двухатомных молекул лазером показали, что осколки образуются в основном вдоль направления поляризации лазера [3]. Ярко выраженная направленность осколков ионов объяснялась как геометрический эффект — направленные вдоль поля молекулы ионизируются с большей вероятностью, чем остальные [4]. Позже было отмечено, что ионы вообще не вылетают в направлении, перпендикулярном \mathbf{E} , а геометрического эффекта для объяснения этих результатов недостаточно [5]. Был разработан метод отделения геометрического эффекта от других с помощью линейной и круговой поляризации лазера, в результате чего получены экспериментальные данные, подтверждающие анизотропию взаимодействующей с лазером среды [6].

В настоящее время эксперименты по ориентированию молекул проводятся при давлении газовой среды мишени, не превышающей значения 10^{-5} Торр. При этих условиях длина свободного пробега осколков молекул составляет несколько сантиметров, что позволяет избежать столкновений осколков с молекулами среды и экспериментально получить зависимость вероятности диссоциации молекулы от угла. Следует заметить, что при таком давлении время взаимодействия молекулы с фемтосекундным лазерным импульсом на много порядков меньше времени между соударениями всех частиц газа. Это позволяет рассматривать процесс взаимодействия лазерного излучения с веществом мишени как взаимодействие с одиночными молекулами и не учитывать влияния столкновений с частицами газа на вращательную динамику молекул.

Ориентирование молекул используется во многих практических приложениях, в частности для управления каналами химических реакций, выделения различных стереоизомеров, эффективного контроля каталитических реакций на поверхности. В этой связи важное значение приобретает управление ориентацией молекул при отсутствии их диссоциации, а также возможность выстраивания молекул вдоль заданного направления в режиме свободных «движений» после прохождения лазерного импульса.

Целью данной работы является исследование вращательной динамики модельного двумерного молекулярного иона водорода H_2^+ в процессе воздействия короткого лазерного импульса и после его окончания, а также определение параметров лазерного

импульса, при которых происходит эффективное выстраивание молекул, сопровождающееся пренебрежимо малой их диссоциацией.

Численная модель

Рассмотрим ион H_2^+ в системе координат, связанной с центром инерции. Пусть в некоторый момент времени на него начинает действовать электрическое поле лазера $\varepsilon(t) = \varepsilon_0(t) \cos \omega t$ с энергией кванта $\hbar\omega = 1.55$ эВ, со сглаженной огибающей $\varepsilon_0(t)$ (с передним и задним фронтом в 5, а плато в 10 оптических циклов и интенсивностью в пределах $10^{13} - 10^{15}$ Вт/см²). Задача о динамике молекулярного иона в таком поле сводится к решению нестационарного уравнения Шрёдингера

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = H \psi \quad (1)$$

с гамильтонианом

$$H = \frac{\mathbf{p}_e^2}{2m} + \frac{\mathbf{p}_N^2}{2\mu} + \frac{e^2}{|\mathbf{R}|} - \frac{e^2}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}/2|} - \frac{e^2}{|\mathbf{r} + \mathbf{R}/2|} - \mathbf{d}\varepsilon(t).$$

Здесь \mathbf{p}_e — оператор импульса электрона, $\mathbf{p}_N^2/2\mu$ — оператор кинетической энергии ядер в системе центра масс, \mathbf{r} — радиус-вектор электрона, \mathbf{R} — вектор, построенный между первым и вторым ядром, $\mu = M/2$ — приведенная масса, \mathbf{d} — электронный дипольный момент системы.

Будем решать задачу в приближении Борна–Оппенгеймнера, ограничиваясь рассмотрением двух нижних электронных термов и используя для молекулы H_2^+ модель жесткого ротатора. Тогда решение уравнения (1) представимо в виде разложения по волновым функциям φ_1, φ_2 электронных стационарных состояний, где мы ограничились в приближении двух термов всего двумя слагаемыми в разложении

$$\Psi(\mathbf{r}, \mathbf{R}, t) = \sum_{n=1}^2 \Phi_n(\mathbf{R}, t) \varphi_n(\mathbf{r}, \mathbf{R}). \quad (2)$$

Ограничиться двумя термами оказывается возможным, поскольку рассматриваются решения только при тех значениях параметров, для которых диссоциация системы незначительна, а значит, и пренебрежимо мала заселенность всех вышележащих возбужденных электронных состояний.

Искомые электронные волновые функции $\varphi_1(\mathbf{r}), \varphi_2(\mathbf{r})$ и соответствующие им электронные энергии E_1, E_2 могут быть найдены из решения стационарного уравнения Шрёдингера с электронным гамильтонианом

$$H_e = \frac{\mathbf{p}_e^2}{2m} - \frac{e^2}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}/2|} - \frac{e^2}{|\mathbf{r} + \mathbf{R}/2|},$$

зависящим от R как от параметра. Зная φ_1, φ_2 , можно получить матричные элементы перехода проекций электронного дипольного момента на направление межъядерной оси и в перпендикулярном направлении $d_{||} = e x_{12} = e x_{21} = e \langle \varphi_1 | x | \varphi_2 \rangle$ и

$d_- = ey_{12} = ey_{21} = e\langle\varphi_1|y|\varphi_2\rangle$ соответственно, причем указанные компоненты зависят от межъядерного расстояния как от параметра. Отметим, что с учетом симметрии волновых функций двух нижних состояний в двумерном случае перпендикулярная компонента $d_- \equiv 0$.

Подставив разложение (2) в исходное уравнение (1), получим в модели ротатора для H_2^+ систему двух дифференциальных уравнений для ядерной части волновой функции:

$$\begin{cases} i\hbar \frac{\partial \Phi_1(\mathbf{R}, t)}{\partial t} = \left(\frac{\mathbf{p}_N^2}{2\mu} + V_{\text{eff}}^{(1)}(\mathbf{R}) \right) \Phi_1(\mathbf{R}, t) - \\ - e\varepsilon(t) \{x_{12}(R) \cos \theta + y_{12}(R) \sin \theta\} \Phi_2(\mathbf{R}, t), \\ i\hbar \frac{\partial \Phi_2(\mathbf{R}, t)}{\partial t} = \left(\frac{\mathbf{p}_N^2}{2\mu} + V_{\text{eff}}^{(2)}(R) \right) \Phi_2(\mathbf{R}, t) - \\ - e\varepsilon(t) \{x_{12}(R) \cos \theta + y_{12}(R) \sin \theta\} \Phi_1(\mathbf{R}, t), \end{cases}$$

где $V_{\text{eff}}^{1,2} = \frac{e^2}{R} + E_{1,2}(R)$ — эффективная потенциальная энергия для ядер с учетом электронной энергии.

В приближении жесткого ротатора будем считать R постоянным в течение всего импульса и равным равновесному расстоянию между ядрами. $R = R_0 = 1.2 \text{ \AA}$ (это приближение является оправданным, так как при данных параметрах лазера межъядерное расстояние R не успевает значительно измениться в течение импульса).

Тогда оператор кинетической энергии принимает вид

$$\frac{\mathbf{p}_N^2}{2\mu} = -\frac{\hbar^2}{2\mu R_0^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2},$$

где θ — угол между межъядерной осью и осью z , совпадающей с направлением электрического поля лазера.

Разложим ядерную часть волновой функции по ее собственным функциям, каждая из которых представляет собой чистое вращательное состояние атома:

$$\Phi_N^{1,2}(\theta, t) = \sum_m C_m^{1,2}(t) \frac{e^{im\theta}}{\sqrt{2\pi}},$$

где $C_m^{1,2}$ — амплитуды заселения m -го вращательного уровня первого и второго электронного терма соответственно. Получим систему уравнений для этих амплитуд в окончательном виде:

$$\begin{cases} i\hbar \frac{\partial C_k^{(1)}}{\partial t} = Bk^2 C_k^{(1)} + V_{\text{eff}}^1(R_0) C_k^{(1)} - \\ - \frac{e\varepsilon(t)}{2} x_{12} (C_{k+1}^{(2)} + C_{k-1}^{(2)}), \\ i\hbar \frac{\partial C_k^{(2)}}{\partial t} = Bk^2 C_k^{(2)} + V_{\text{eff}}^2(R_0) C_k^{(2)} - \\ - \frac{e\varepsilon(t)}{2} x_{12} (C_{k+1}^{(1)} + C_{k-1}^{(1)}), \end{cases} \quad (3)$$

где разность потенциальной энергии между первым и вторым термом при равновесном расстоянии между

ядрами $V_{\text{eff}}^{(2)}(R_0) - V_{\text{eff}}^{(1)}(R_0) = 9.771 \text{ эВ}$, $B = \frac{\hbar^2}{2\mu R_0^2}$, $x_{12}(R = R_0) = 6.21 \cdot 10^{-9} \text{ см}$.

Мы рассмотрели процесс ориентирования молекулярной системы, в результате которого заселяются десятки вращательных уровней k , поэтому нахождение аналитического решения системы затруднительно. Указанная система решалась численно методом Рунге–Кутты 4-го порядка в предположении, что в начальный момент был заселен только нулевой вращательный уровень первого терма.

Результаты и обсуждение

Анализ системы (3) позволяет предположить двоякие свойства динамики молекулы в лазерном поле. С одной стороны, могут проявляться нерезонансные осцилляции Раби в двухуровневой системе в поле с плавной огибающей для населенностей первого и второго терма. Причем поскольку отстройка оказывается сравнимой с энергетическим расстоянием между уровнями $E_2 - E_1 - \hbar\omega \approx E_2 - E_1$, заселение верхнего терма оказывается крайне неэффективным и может еще в большей степени нивелироваться на заднем фронте импульса. Действительно, из численного решения системы (3) видно, что населенности первого и второго терма $W_1(t)$ и $W_2(t)$ осциллируют с высокой частотой в противофазе, поскольку $W_1(t) + W_2(t) = 1$. Для лазерного импульса с интенсивностью 10^{14} Вт/см^2 максимальное значение заселенности второго терма в течение импульса не превышает значения $2.5 \cdot 10^{-2}$. Более того, вероятность заселения второго терма после окончания импульса или, иными словами, вероятность диссоциации оказывается пренебрежимо малой (рис. 1), поэтому

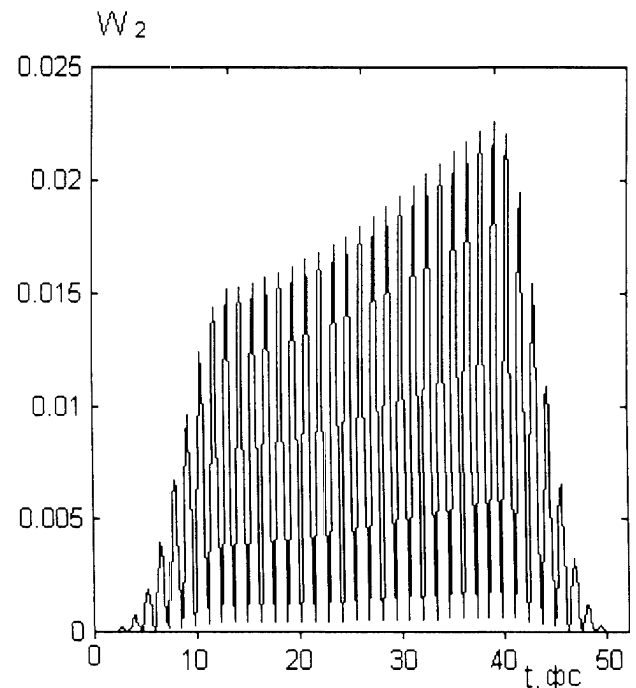


Рис. 1. Зависимость заселенности второго электронного терма от времени для интенсивности 10^{14} Вт/см^2

влиянием третьего терма на динамику молекулы для данных параметров импульса можно пренебречь.

Другой характерной чертой динамики исследуемой квантовой системы в лазерном поле является заселение вращательных подуровней первого и второго термов.

Зависимость вероятности заселения вращательных состояний на первом терме от номера вращательного уровня k в момент окончания плато импульса представлена на рис. 2. Картина заселения симметрична относительно уровня $k = 0$. На малых временах в течение импульса она похожа на картину заселенности колебательных уровней гармонического осциллятора в поле электромагнитной волны [7], т. е. характеризуется двумя «горбами» населенностей, бегущих в сторону увеличения $|k|$. Ближе к концу импульса появляются дополнительные «горбы» населенностей, увеличивается амплитуда заселенности нулевого вращательного уровня. В этом проявляется ангармоничность системы и отличие ее матричных элементов от осцилляторных.

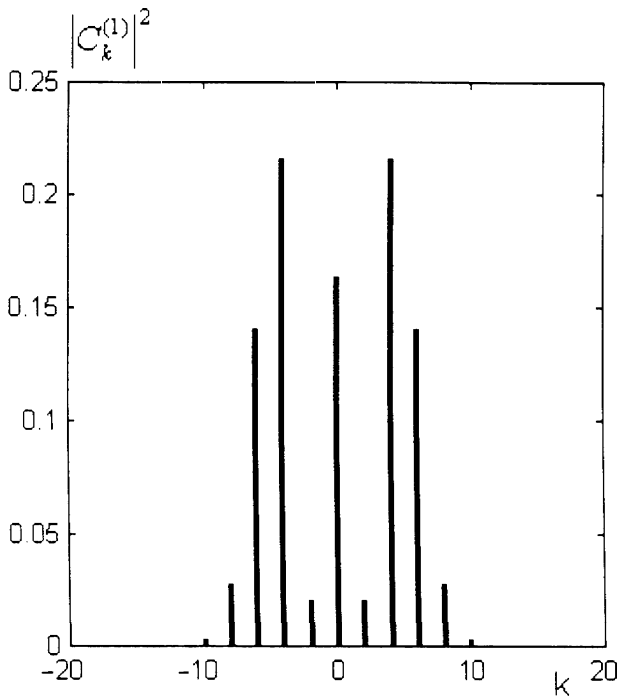


Рис. 2. Вероятности заселения вращательных уровней первого терма в зависимости от номера вращательного уровня k для интенсивности 10^{14} Вт/см²

Результатом взаимодействия системы с полем является заселение около 20 вращательных уровней. Зная амплитуды заселения вращательных уровней в зависимости от времени, можно найти квадрат модуля ядерной части волновой функции первого и второго терма как функцию θ

$$|\Phi_N^{1,2}(\theta, t)|^2 = \frac{1}{2\pi} \sum_{m,k} C_m^{1,2} C_k^{1,2*} e^{i(m-k)\theta}. \quad (4)$$

В начальный момент пакет был распределен по θ равномерно, поскольку все молекулы были ориен-

тированы случайным образом. В момент окончания плато импульса, которому соответствует распределение, представленное на рис. 2, плотность вероятности нахождения ядерной подсистемы локализуется преимущественно в направлении $\theta = 0, \pi$, что соответствует выстраиванию оси молекулы вдоль направления поляризации волны (рис. 3), причем распределение оказывается достаточно узким с характерной шириной, примерно равной 0.7 рад по уровню 1/2. В конце импульса распределение становится еще более узким, причем в главных максимумах, локализованных около $\theta = 0, \pi$ оказывается сосредоточено приблизительно 85% всей вероятности.

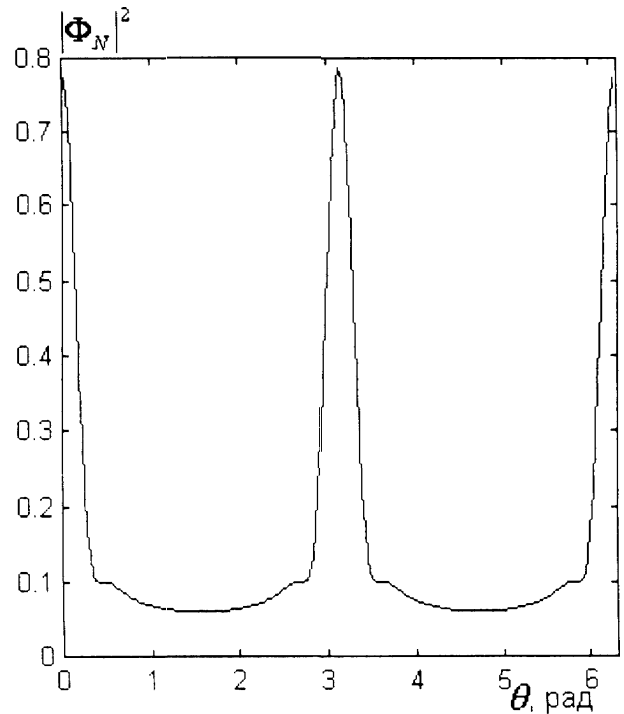


Рис. 3. Ядерный волновой пакет в момент окончания плато импульса как функция угла θ между межъядерной осью и направлением напряженности электрического поля лазера для интенсивности 10^{14} Вт/см²

Для рассмотрения вращательной динамики молекул удобно использовать зависимость от времени средних по пакету значений $\cos\theta$ и $\cos^2\theta$, характеризующую выстраивание молекул вдоль электрического поля. Для наших начальных условий вероятность отклонения оси молекулы на угол θ относительно направления поля, очевидно, равна вероятности отклонения на угол $-\theta$, поэтому $\cos\theta = 0$ во все моменты времени.

Рассмотрим дисперсию отклонения пакета от направления вдоль поляризации лазера $\cos^2\theta$. В моменты времени, когда эта величина принимает значения больше 0.5, пакет локализован преимущественно около $\theta = 0$ и $\theta = \pi$; если ее значение меньше 0.5, пакет находится преимущественно возле $\theta = \pi/2$ и $\theta = -\pi/2$.

Важно заметить, что выстраивание является динамическим, т. е. не удастся достаточно долго сохра-

нить хорошо локализованный волновой пакет ни в течение импульса, ни в послеимпульсовом режиме. После выключения поля модуль комплексной амплитуды заселения не изменяется со временем, но меняется ее аргумент, поэтому заселенность вращательных уровней $\overline{\cos^2 \theta}$ остается постоянной, однако волновой пакет и $\overline{\cos^2 \theta}$ при этом продолжают изменяться со временем, что можно заметить по поведению $\overline{\cos^2 \theta}$ после окончания импульса (рис. 4).

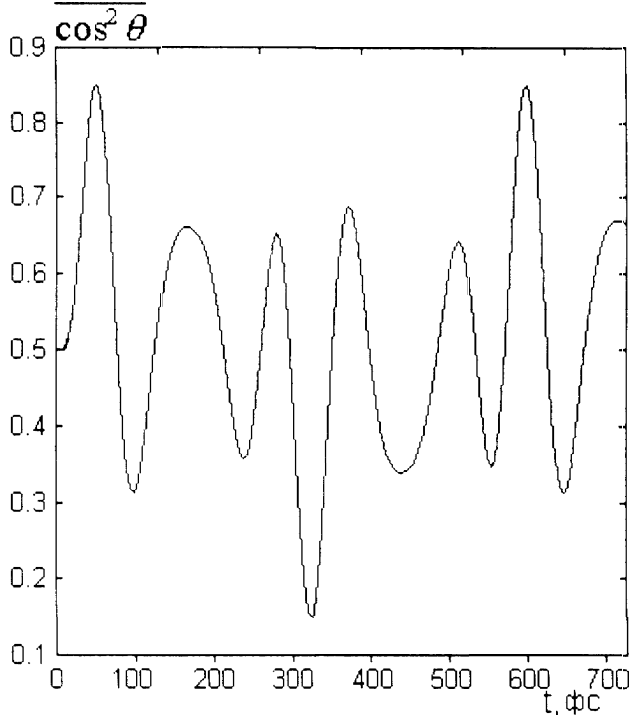


Рис. 4. Средний по пакету $\overline{\cos^2 \theta}$, характеризующий динамическое выстраивание молекулы, как функция времени для интенсивности 10^{14} Вт/см². Момент окончания импульса соответствует времени $t = 50$ фс

Исследуя динамику волнового пакета (или величины $\overline{\cos^2 \theta}$) после окончания импульса, нетрудно видеть, что волновой пакет с течением времени претерпевает сильные изменения за характерное время $\tau \approx 30-50$ фс. Однако через достаточно длительное время после окончания импульса пакет принимает исходную форму, соответствующую началу режима свободного вращательного движения. Период восстановления формы пакета в режиме свободной вращательной динамики по окончании импульса оказывается $\tau \approx 550$ фс. Эту величину можно получить аналитически — решая систему уравнений (3) при $\varepsilon(t) \equiv 0$ (после окончания лазерного импульса), получим из (4) зависимость ядерного волнового пакета от времени как суперпозицию гармонически меняющихся функций с кратными аргументами. Очевидно, период восстановления пакета в этом случае будет равен частоте низшей гармоники в разложении (4). Таким образом, получим $\tau \approx \hbar/B$, что дает ту же величину.

Отметим, что характерное время вращательного движения молекулы может быть оценено как

$\tau_{ch} \approx \hbar/[B(2m+1)] \approx 30$ фс для заселения порядка 10 вращательных состояний. Таким образом, вращение в поле оказывается гораздо более быстрым процессом по сравнению со свободным вращением молекул, находящихся, например, при комнатной температуре, когда вращательные степени свободы возбуждены не более чем до $m_{max} \approx 3$.

Момент времени, когда средний квадрат косинуса принимает свое минимальное значение 0.15, соответствует тому, что молекулярная ось локализуется перпендикулярно направлению поляризации лазера [8] (рис. 5). В моменты времени, промежуточные выстраиванию вдоль и поперек поля, форма пакета становится сильно изрезанной, появляются побочные пики. Такое угловое распределение характеризует динамическую дезориентацию молекулы в процессе вращательной динамики. В те моменты времени, когда молекула локализуется вдоль либо поперек поля, форма пакетов одинакова, но смещена на угол $\pi/2$ по θ .

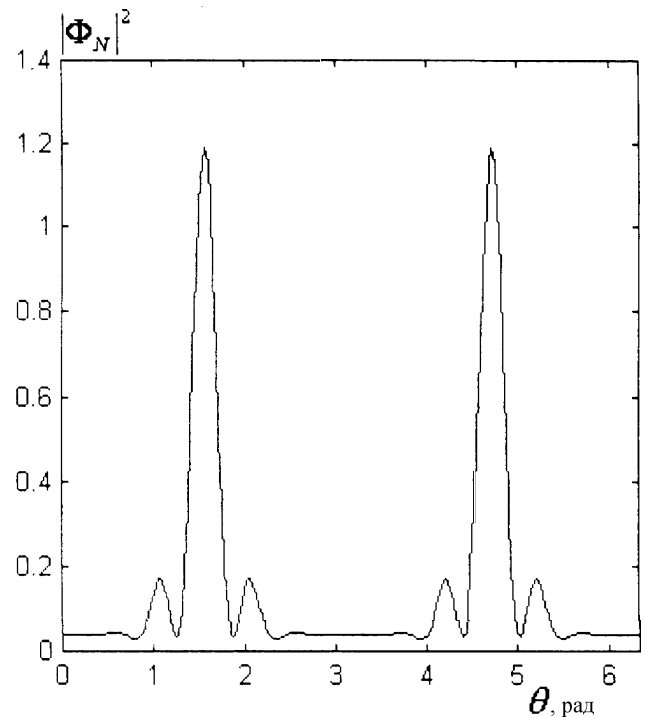


Рис. 5. Ядерный волновой пакет в момент выстраивания поперек направления поляризации лазера как функция угла θ между межъядерной осью и направлением напряженности электрического поля лазера

Расчеты, проведенные для более высоких лазерных интенсивностей, показали, что в этом случае верхний терм оказывается заметно заселенным в процессе лазерного воздействия. В этом режиме приближение двух термов уже не является физически оправданным, поскольку следует учитывать возбуждение высших электронных состояний, а также переходы в ионизационный континуум.

Таким образом, проведенные численные расчеты свидетельствуют о том, что с помощью лазерного импульса с указанными длительностью и частотой

при интенсивности 10^{14} Вт/см² молекула с вероятностью 85% оказывается динамически выстроенной вдоль и поперек лазерного поля при характерном угле, приблизительно равном 25° . При этом вероятность диссоциации оказывается пренебрежимо малой.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты 00-02-16046, 02-02-06249), а также ИНТАС (грант 99-1495).

Литература

1. *Corkum P.B., Ellert C., Mehendale M.* // Faraday Discuss. 1999. **113**. P. 47.
2. *Tsubouchi M., Whitaker B.J., Wang L.* // Phys. Rev. Lett. 2001. **86**. P. 4500.

3. *Fransink L.J., Codling K., Hatherly P.A.* // Phys. Rev. Lett. 1987. **58**. P. 2424.
4. *Codling K., Frasiniski L.J., Hatherly P.A.* // J. Phys. B. 1989. **22**. L321.
5. *Normand D., Lompre L.A., Cornaggia C.* // J. Phys. B. 1992. **25**. P. L497.
6. *Ellert Ch., Corkum P.B.* // Phys. Rev. 1999. **A59**. P. R3170.
7. *Волкова Е.А., Попов А.М., Рахимов А.Т.*, Квантовая механика на персональном компьютере. М.: URSS, 1995.
8. *Frasinski L.J., Plumridge J., Posthumus J.H.* // Phys. Rev. Lett. 2001. **86**. P. 2541.

Поступила в редакцию
03.04.02

РАДИОФИЗИКА

УДК 519.246; 524

О ВОЗМОЖНОСТИ ДОДЕТЕКТОРНОГО ОБНАРУЖЕНИЯ СЛАБЫХ ГРАВИТАЦИОННЫХ ИМПУЛЬСОВ ПРИ НОРМАЛИЗУЮЩЕЙ ХАРАКТЕРИСТИКЕ НЕЛИНЕЙНОГО ЭЛЕМЕНТА

А. В. Гусев

(ГАИШ)

E-mail: avg@sai.msu.ru

Обсуждается возможность нормализации шума резонансной гравитационной антенны с трансформатором смещения при «быстрой» обработке выходного сигнала по схеме: «безынерционный нелинейный преобразователь — согласованный фильтр». Аддитивная помеха при наличии хаотических импульсных шумов рассматривается как аномально-засоренный случайный процесс с бигауссовой плотностью вероятности.

1. Теория криогенных резонансных гравитационных антенн типа «Exploger» [1] разрабатывалась для гауссовых шумов в системе и полезного сигнала в виде отдельных δ -импульсов. Шумы на выходе линейного тракта реальных (действующих) гравитационных антенн оказываются заметно негауссовыми. Наличие таких шумов проявляется в аномальном поведении крыльев выборочной плотности вероятности выходного сигнала по отношению к ожидаемой гауссовой кривой при додетекторном обнаружении (или экспоненциальной кривой при амплитудной обработке информации). Для защиты антенны от негауссовых воздействий (преимущественно от хаотических импульсных помех) предлагается: 1) применение схемы совпадений (например, «Exploger-Nautilus») для выделения гравитационных импульсов, 2) применение режима «минимальной моды» [1] при одноканальном приеме. Однако эти методы подавления негауссовых помех оказываются неэффективными при обнаружении слабых гравитационных импульсов. Поэтому представляет интерес поиск новых алгоритмов обработки выходного сигнала резонансных гравитационных антенн с учетом

особенностей формирования «банка данных».

Узкополосный процесс $x(t)$ на выходе резонансных гравитационных антенн, в состав которых входит механический трансформатор смещения, можно представить в виде линейной суперпозиции двух квазигармонических колебаний $x_1(t)$ и $x_2(t)$:

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t), \quad 0 \leq t \leq T,$$

$$x_1(t) = R_1(t) \cos \Psi_1(t), \quad x_2(t) = R_2(t) \cos \Psi_2(t),$$

где $R_1(t)$ и $R_2(t)$ — огибающие, $\Psi_1(t) = \omega_1 t + \psi_1(t)$ и $\Psi_2(t) = \omega_2 t + \psi_2(t)$ — случайные фазы, $\omega_1 = 2\pi\nu_1$ и $\omega_2 = 2\pi\nu_2$ — собственные частоты механической системы, $(\nu_2 - \nu_1) = 2\nu_B \gg \delta\nu_{1,2}$, ν_B — частота биений, $\delta\nu_1$ и $\delta\nu_2$ — ширина спектра квазигармонических колебаний $x_1(t)$ и $x_2(t)$. Например, для резонансной гравитационной антенны «Exploger» (Швейцария, ЦЕРН) [1] $\nu_1 \approx 907.07$ Гц, $\nu_2 \approx 923.26$ Гц при $\delta\nu_1 \approx 0.14$ Гц и $\delta\nu_2 \approx 0.13$ Гц.

Используя комплексную форму записи квазигармонических колебаний, при $\nu_1 \approx \nu_2$ получим

$$x(t) = \text{Re} [\tilde{x}(t) \exp \{j\omega_0 t\}], \quad (1)$$