КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 534

О СТАТИСТИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ НЕПОДВИЖНЫХ ТОЧЕК ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

П. В. Елютин

(*кафедра квантовой радиофизики*)

Для автономных систем общего вида исследована относительная распространенность неподвижных точек различных классов на фазовой плоскости. Показано, что чаще всего встречаются седла, реже фокусы, а узлы встречаются еще реже.

Для конечномерных динамических систем, заданных системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = F_i(\{x_i\}), \quad 1 \leqslant i \leqslant K, \tag{1}$$

изучение свойств положений равновесия — неподвижных точек, заданных соотношениями $F(\{x_i\}) = 0$, — составляет первый и важнейший этап качественного исследования.

Неподвижные точки классифицируются по величинам и знакам действительных и мнимых частей характеристических показателей системы динамических уравнений (1), линеаризованной вблизи положения равновесия. Для систем на фазовой плоскости ($K = 2$) выделяются следующие классы неподвижных точек: центр ($\operatorname{Re}\lambda_{1,2} = 0$, $\operatorname{Im}\lambda_{1,2} \neq 0$), фокус ($\operatorname{Re}\lambda_{1,2} \neq 0$, $\operatorname{Im}\lambda_{1,2} \neq 0$), седло ($\operatorname{Re}\lambda_{1,2} \neq 0$, $\operatorname{Im}\lambda_{1,2} = 0$, $\lambda_1\lambda_2 < 0$) и узел ($\operatorname{Re}\lambda_{1,2} \neq 0$, $\operatorname{Im}\lambda_{1,2} = 0$, $\lambda_1\lambda_2 > 0$) [1, с. 19–24].

В настоящей заметке исследуется относительная распространенность точек этих классов в динамических системах общего вида.

Линеаризованная вблизи неподвижной точки система уравнений имеет вид

$$\frac{dx}{dt} = ax + by, \quad \frac{dy}{dt} = cx + dy. \tag{2}$$

Выбором масштаба времени можно обеспечить выполнение условия

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1. \tag{3}$$

Таким образом, пространство неподвижных точек отображается на поверхность четырехмерной сферы единичного радиуса. Меры областей этой поверхности, соответствующие различным классам точек, и определяют их распространенность. Аналогичный метод метризации использовал Кац при оценке среднего числа вещественных корней полинома заданной степени [2, с. 18–24].

Точки типа «центр» являются негрубыми (при малом изменении параметров общего вида превращаются в точки других классов) и имеют нулевую меру. Фокусам соответствует область, заданная условием

$$(a-d)^2 + 4bc < 0. \tag{4}$$

Седлам соответствует область, заданная условием

$$(a-d)^2 + 4bc > 0, \quad ad - bc < 0. \tag{5}$$

Остальная часть поверхности гиперсферы соответствует узлам.

Вычисление объемов областей (4) и (5) на поверхности гиперсферы (3) проводилось численным интегрированием с помощью метода Ромберга при четырех различных положениях осей системы координат. Найденные значения вероятностей фокусов (P_F), седел (P_S) и узлов (P_N) таковы:

$$P_F = 0{,}2920(6), \quad P_S = 0{,}5010(14), \quad P_N = 0{,}2070(20). \tag{6}$$

Цифры в скобках указывают погрешность в единицах последнего десятичного разряда. Таким образом, для систем общего вида наиболее вероятным типом неподвижной точки является седло, менее вероятен фокус, наименее распространены узлы. Частоты устойчивых и неустойчивых точек среди фокусов и узлов равны (что очевидно из симметрии).

Изложенный подход может быть обобщен на динамические системы с фазовым пространством размерностей $K > 2$. Однако быстрый рост размерности гиперсферы D с увеличением K ($D = K^2 - 1$) и усложнение вида условий для областей, соответствующих неподвижным точкам разных типов, делает соответствующие численные интегрирования весьма трудными.

Литература

1. *Рабинович М.И., Трубецков Д.И.* Введение в теорию колебаний и волн. М.: Наука, 1984.
2. *Кац М.* Вероятность и смежные вопросы в физике. М.: Мир, 1963.

Поступила в редакцию
18.06.99