

Олимпиады школьников по физике, проводимые физическим факультетом МГУ имени М.В. Ломоносова

Физический факультет МГУ имени М.В. Ломоносова традиционно участвует в организации и проведении олимпиад школьников по физике «Ломоносов», «Покори Воробьевы горы!», Московской олимпиады школьников и олимпиады «Робофест».

В проекте Перечня олимпиад школьников на 2025-2026 учебный год этим олимпиадам присвоены следующие уровни:

- Московская олимпиада школьников по физике – уровень 1;
- «Ломоносов» по физике – уровень 1;
- «Покори Воробьевы горы!» – уровень 1;
- «Робофест» по физике – уровень 2.

Традиционно, при поступлении на физический факультет МГУ, победители олимпиад 1 и 2 уровней, а также призеры олимпиад 1 уровня зачисляются без вступительных испытаний. Призеры олимпиад 2-го уровня получают 100 баллов за дополнительное вступительное испытание по физике.

Особые права, предоставляемые победителям и призерам олимпиад школьников, включенных в Перечень олимпиад школьников на 2025/26 учебный год, поступающим на физический факультет МГУ имени М.В.Ломоносова в 2026 году будут объявлены в январе 2026 года.

В 2025 г. на физический факультет было зачислено 500 человек, 99 из них являются победителями и призерами олимпиад школьников, что составляет 19,8 % от общего числа зачисленных на 1-й курс абитуриентов. Из них пятая часть являются победителями и призерами олимпиад школьников, проводимых физическим факультетом.

Содержание

Олимпиада школьников «Покори Воробьевы горы» 2025 г.	2
Задания отборочного (заочного) этапа	
7-9 КЛАССЫ	2
10 КЛАСС	9
11 КЛАСС	13
Задания заключительного (финального) этапа	26
7-9 КЛАССЫ	26
10 КЛАСС	32
11 КЛАСС	39
Московская олимпиада школьников по физике. 2025 г.	
Задания заключительного этапа	46
9 КЛАСС	46
10 КЛАСС	50
11 КЛАСС	56
Список рекомендуемой литературы	67

ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
«ПОКОРИ ВОРОБЬЕВЫ ГОРЫ!» ПО ФИЗИКЕ
2024/25 учебный год

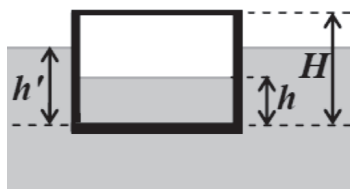
ЗАДАНИЯ ОТБОРОЧНОГО (ЗАОЧНОГО) ЭТАПА
ВОЗМОЖНЫЕ РЕШЕНИЯ И КРИТЕРИИ ПРОВЕРКИ

7-9 класс

Часть I (проверялись только ответы). Некоторые задачи:

Вопрос 2:

Цилиндрическая металлическая кастрюля высоты $H = 16$ см с толстыми стенками плавает на поверхности воды в бассейне (глубина воды под ней больше H). Внутри кастрюли тоже есть вода – высоту этого слоя воды над дном кастрюли обозначим h , а дно кастрюли находится на глубине h' под поверхностью воды в бассейне (см. рисунок). Известно, что при $h_1 = 32$ мм $h'_1 = 64$ мм, а при $h_2 = 72$ мм глубина погружения кастрюли увеличивается до $h'_2 = 96$ мм. До какого минимального уровня h_c нужно аккуратно долить воду внутрь кастрюли, чтобы она утонула? Ответ запишите в мм, с точностью до целого значения.



ОТВЕТ: 152.

Комментарий: Введем обозначения: M – масса кастрюли, S – площадь ее внешнего горизонтального сечения, s – внутреннего, а ρ – плотность воды. Тогда условие равновесия плавающей кастрюли (сила давления воды снизу уравнивает силу тяжести, действующую на кастрюлю и воду в ней) можно записать так:

$$\rho h' S = M + \rho h s \Rightarrow h' = \frac{s}{S} h + \frac{M}{\rho S} \equiv a \cdot h + b.$$

Отметим, что нам не нужно учитывать атмосферное давление, так как оно давит на кастрюлю равномерно со всех сторон – сверху непосредственно, а снизу ее давление передается водой. Мы не знаем величин, для которых вводили обозначения, но можем определить из приведенных значений h' и h коэффициенты в нашей формуле:

$$\begin{cases} 64 \text{ мм} = a \cdot 32 \text{ мм} + b \\ 96 \text{ мм} = a \cdot 72 \text{ мм} + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 32 \text{ мм} = a \cdot 40 \text{ мм} \\ b = 64 \text{ мм} - a \cdot 32 \text{ мм} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0,8 \\ b = 38,4 \text{ мм} \end{cases}$$

Таким образом, связь h' и h для нашей кастрюли имеет вид $h' = 0,8 \cdot h + 38,4$ мм. Кастрюля утонет при $h' = H = 160$ мм $\Rightarrow h = \frac{160 \text{ мм} - 38,4 \text{ мм}}{0,8} = 152$ мм.

Вопрос 3:

У трубки постоянного сечения длиной $L = 1600$ мм один из концов – запаянный, а второй открыт в атмосферу. Трубку расположили вертикально, открытым концом вверх и налили в нее ртуть таким образом, что столбик ртути,

составляющий 12 % от длины трубки, располагался внизу (начинаясь от запаянного конца). Открытый конец трубки закрыли крышкой, аккуратно ее перевернули и так же аккуратно убрали крышку. Часть ртути вылилась, и в новом положении равновесия при прежней температуре длина оставшегося столбика ртути составляла уже 4 % от длины трубки. При каком атмосферном давлении проводился опыт (считайте, что оно оставалось неизменным)? Ответ запишите в мм.рт.ст., с точностью до целого значения.

ОТВЕТ: 768.

Комментарий: Перед переворотом давление воздуха в трубке сечением S равнялось p_A , и он занимал объем $S \cdot L(1 - x)$. В конечном состоянии воздух занимал объем $S \cdot L(1 - y)$, а его давление определялось из условия равновесия столбика ртути: $p = p_A - \rho gLy$. Поскольку температура воздуха не изменилась, то

$$(p_A - \rho gLy)S \cdot L(1 - y) = p_A S \cdot L(1 - x) \Rightarrow p_A = \rho gL \frac{y(1 - y)}{x - y} = 768 \text{ мм.рт.ст.}$$

Часть II (проверялись решения).

1. («Два выстрела», 15 баллов): Доктор Ватсон по заданию Шерлока Холмса дежурил на воздушном шаре, который удерживался неподвижным с помощью троса, закрепленного на Земле. Погода была безветренной. Холмсу нужно было отправить Ватсону записку, и для этого он помещал ее в небольшой шарик и выстреливал этим шариком вертикально вверх из трубки с маломощным зарядом, подбирая заряд и целясь таким образом, чтобы шарик пролетал рядом с корзиной шара уже с небольшой скоростью, и Ватсон мог его поймать специальным сачком. В первый раз шарик пролетел совсем рядом с корзиной, но Ватсону не удалось его поймать сразу, зато он поймал его на пути вниз – через $t_1 = 7,5$ с после выстрела. Через небольшое время Холмсу понадобилось отправить Ватсону еще одну записку, и он использовал точно такой же заряд. В этот раз Ватсон поймал шарик с первой попытки – на пути вверх через $t_2 = 6,9$ с после выстрела. Пренебрегая сопротивлением воздуха, определите скорость, с которой вылетали шарики из трубки и высоту, на которой находилась корзина воздушного шара. Ускорение свободного падения считайте равным $g \approx 9,8 \text{ м/с}^2$. С какими скоростями летели шарики в моменты времени, когда Ватсон их ловил?

Указание: В соответствии с условием, движение шарика – *равноускоренное*, то есть проекция его скорости на ось, направленную вертикально вверх, уменьшается на $9,8 \text{ м/с}$ за каждую секунду.

Возможное решение:

Как ясно из указания, скорость шарика, запущенного вертикально вверх со скоростью v_0 , спустя время t после старта, равна $v(t) = v_0 - gt$. При линейном изменении скорости средняя скорость на участке пути, пройденного за это время, равна полусумме начальной и конечной скоростей этого участка. Поэтому высота, на которой оказывается шарик спустя время t после старта, равна $H = \frac{1}{2}(v_0 + v_0 - gt)t = v_0 t - \frac{gt^2}{2}$. Таким образом, оба заданных времени являются корнями квадратного уравнения

$$t^2 - 2 \frac{v_0}{g} t + \frac{2H}{g} = 0.$$

По теореме Виета

$$2 \frac{v_0}{g} = t_1 + t_2 \Rightarrow v_0 = \frac{g(t_1 + t_2)}{2} \approx 70,56 \text{ м/с.}$$

и

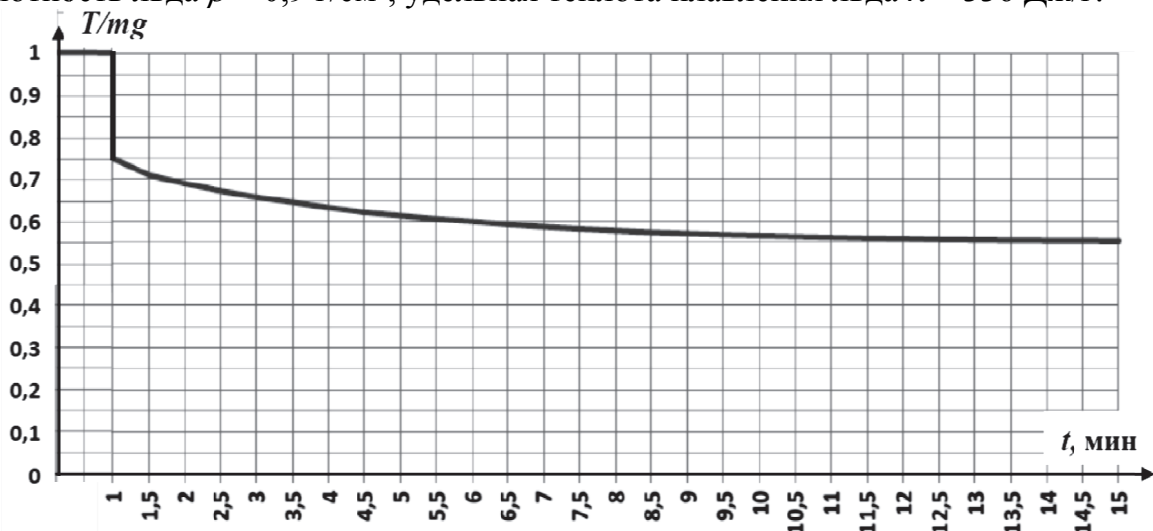
$$\frac{2H}{g} = t_1 \cdot t_2 \Rightarrow H = \frac{gt_1 t_2}{2} \approx 253,575 \text{ м} \approx 253,6 \text{ м.}$$

Из характера движения шарика ясно, что после пролета вверх мимо корзины он тормозится до нулевой скорости такое же время, в течении которого разгоняется при падении до корзины. Значит, скорость шарика при обоих пролетах мимо корзины должна быть одинакова и равна скорости, набираемой за половину промежутка времени между пролетами, то есть

$$v_1 = v_2 = \frac{g(t_2 - t_1)}{2} \approx 2,94 \text{ м/с.}$$

ОТВЕТЫ: начальная скорость шариков $v_0 = \frac{g(t_1+t_2)}{2} \approx 70,56 \text{ м/с}$, корзина воздушного шара находилась на высоте около $H = \frac{gt_1 t_2}{2} \approx 253,6 \text{ м}$, в момент «поимки» оба шарика летели с одинаковыми скоростями $v_1 = v_2 = \frac{g(t_2-t_1)}{2} \approx 2,94 \text{ м/с}$.

2. («График замораживания», 18 баллов) В большом сосуде с теплоизолирующими стенками находилась вода, температура которой была практически точно равна 0°C . Небольшой груз из необычного материала, о котором нам известна только величина его удельной теплоемкости $c = 18,9 \text{ Дж/(г}\cdot^\circ\text{C)}$ (а также то, что он довольно хорошо проводит тепло), подвесили на легкой тонкой нити, прикрепленной к крючку электронного динамометра. Этот динамометр был настроен так, что он показывал силу натяжения нити в единицах величины силы тяжести, действующей на груз. Груз стали равномерно опускать вниз, так что он в итоге целиком оказался под водой, где его аккуратно остановили. На графике показана зависимость показаний динамометра от времени. Определите плотность сплава и температуру груза перед опусканием его в воду. Считать точными следующие данные: плотность воды $\rho_0 = 1 \text{ г/см}^3$, плотность льда $\rho = 0,9 \text{ г/см}^3$, удельная теплота плавления льда $\lambda = 336 \text{ Дж/г}$.



Возможное решение:

Ясно, что показания динамометра уменьшаются в процессе опускания груза в воду из-за появления силы Архимеда, причем вначале (за «очень малое» в масштабе графика время) эта сила появляется из-за погружения самого груза в воду, а потом (медленный процесс) – из-за намораживания льда на грузе: плотность льда ниже плотности воды, и увеличение силы Архимеда (благодаря увеличению объема) больше увеличения силы тяжести (связанной с дополнительной массой льда).

Рассмотрим сначала «быстрый» процесс опускания груза в воду, пренебрегая «намораживанием» льда: сила натяжения нити вместе с силой Архимеда уравнивают силу тяжести:

$$T + F_A = mg \Rightarrow T = mg - \rho_0 V_{\text{погр}} g.$$

При полном погружении $V_{\text{погр}} = \frac{m}{\rho_c}$, и

$$T = mg - \rho_0 \frac{m}{\rho_c} g \Rightarrow T = mg \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho_c} \right).$$

По графику в этот момент видно, что

$$\frac{T}{mg} \approx 0,75 \Rightarrow \frac{\rho_0}{\rho_c} \approx 0,25 \Rightarrow \rho_c \approx 4\rho_0 = 4 \text{ г/см}^3.$$

За достаточно большое время процесс намораживания льда прекращается, поскольку устанавливается тепловое равновесие – при температуре $t = 0^\circ\text{C}$. Обозначим M массу льда после установления теплового равновесия. Тогда

$$T = (m + M)g - \rho_0 \left(\frac{m}{\rho_c} + \frac{M}{\rho} \right) g \Rightarrow \frac{T}{mg} \approx 0,55 = 0,75 - \frac{M}{9m}$$

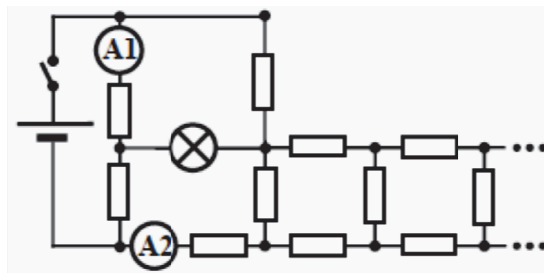
(здесь мы подставили известные значения плотностей). Из этого уравнения находим массу льда, замороженную к моменту становления равновесия $M \approx 0,2 \cdot 9m = 1,8 \cdot m$. Записав уравнение теплового баланса, находим из него начальную температуру груза t_0 :

$$\lambda M = cm(t - t_0) \Rightarrow t_0 = -\frac{\lambda M}{cm} = -1,8 \frac{\lambda}{c} \approx -32^\circ\text{C}.$$

Важно отметить, что в процессе замораживания льда температура границы раздела вода-лед всегда остается равной 0°C , и поэтому в УТБ нет слагаемого, учитывающего охлаждение воды или нагрев льда. Данные по условию точны, и погрешности в ответах связаны только с определением части числовых данных из графика.

ОТВЕТ: плотность сплава $\rho_c \approx 4\rho_0 = 4 \text{ г/см}^3$, начальная температура груза $t_0 \approx -32^\circ\text{C}$.

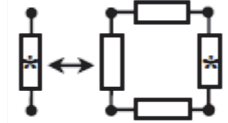
3. («Длинная цепь», 20 баллов) В школьной лаборатории ученики собрали цепь, схема которой показана на рисунке, из аккумулятора, ключа, лампочки накаливания, двух практически идеальных амперметров (их внутренние сопротивления намного меньше сопротивления любого другого элемента схемы) и 2024 одинаковых резисторов. Ключ замкнули, и амперметр A1 показал величину силы



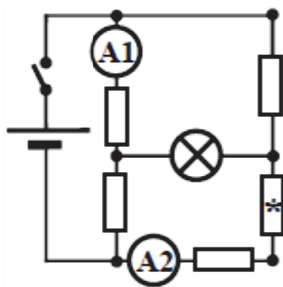
тока $I_1 = 2732$ мА (ошибка измерения у этих амперметров около 0,5 мА). Течет ли ток через лампу? Каковы показания амперметра А2?

Возможное решение:

Пусть R – сопротивление одного из наших резисторов. В первую очередь отметим, что всю длинную цепочку из 2020 резисторов (кроме трех занумерованных и одного, включенного последовательно с цепочкой) можно заменить на один резистор R^* , и при этом для расчета его сопротивления можно воспользоваться тем соображением, что при отсечении от такой цепочки одного звена ее сопротивление практически не изменится. Поэтому



$$R^* = \frac{R(2R + R^*)}{3R + R^*} \Rightarrow R^{*2} + 2RR^* - 2R^2 = 0 \Rightarrow R^* = (\sqrt{3} - 1)R.$$



Значит, общее сопротивление в «правой нижней» ветви схемы равно $R_n = \sqrt{3}R$, причем это именно общее сопротивление всех «незанумерованных» резисторов схемы. Теперь видно, что мост не является сбалансированным ($R^2 \neq \sqrt{3}R^2$), и через лампу течет ненулевой ток. Общее напряжение, создаваемое источником, на всей «мостовой» схеме, равно

$$U = I_1 R + I_4 R = I_3 R + I_2 R_n \Rightarrow I_1 + I_4 = I_3 + \sqrt{3} I_2.$$

Здесь $I_{1,2}$ – силы токов через амперметры, а $I_{3,4}$ – через резисторы в ветвях моста без амперметров (№ 3 – «выше» на схеме, № 4 – «ниже»). С другой стороны, условие непрерывности тока дает

$$I_1 + I_3 = I_2 + I_4.$$

Складывая эти два уравнения почленно и сокращая одинаковые слагаемые, получаем, что

$$2I_1 = (\sqrt{3} + 1)I_2,$$

и теперь показания амперметра А2 легко определяются:

$$I_2 = \frac{2I_1}{\sqrt{3} + 1} \approx 2000 \text{ мА}$$

с ошибкой около 0,5 мА.

ОТВЕТЫ: Ток через лампу течет, $I_2 = \frac{2I_1}{\sqrt{3}+1} \approx 2000$ мА.

4. («Пороховой ракетный двигатель», 22 балла): В качестве стартовых силовых установок и ускорителей используются **пороховые ракетные двигатели** (твердотопливные реактивные двигатели, в которых в качестве топлива используется бездымный порох). Самые ранние сведения об использовании твердотопливных ракет (китайских пороховых ракет) относятся к XIII веку. Вплоть до XX века все ракеты использовали ту или иную форму

твёрдого топлива. Важной характеристикой таких двигателей является *скорость истечения* продуктов сгорания пороха из сопла двигателя. Конечно, точный расчет этой скорости – очень сложная задача, и скорость истечения зависит и от сорта пороха, и от конструкции камеры сгорания и сопла, и даже от способа и условий запуска горения. На практике для расчета скорости истечения чаще всего используют *эмпирические зависимости*, получаемые на основании опытных данных. Пусть, например, для некоторого типа двигателей, и конкретного сорта пороха была подобрана зависимость скорости истечения u от давления в камере сгорания p :

$$u = \xi \cdot (p/1 \text{ Па})^\alpha,$$

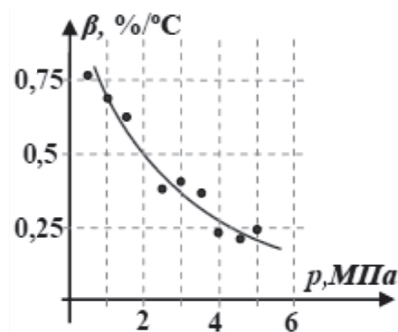
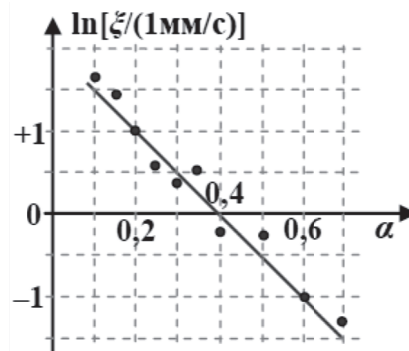
где ξ и α – подобранные коэффициенты, связанные с характеристиками пороха и зависящие от параметров двигателя (например, от площади сопла). Впрочем, измерения показали, что для изучаемых двигателей эти величины не являются независимыми: на графике приведены их значения для нескольких двигателей этого типа при использовании одинакового сорта пороха. Как видно, связь $\ln(\xi)$ с α с удовлетворительной для оценочных вычислений точностью может быть описана линейной зависимостью (на графике показана соответствующая прямая):

$$\ln[\xi/(1\text{мм/с})] = b - k \cdot \alpha,$$

где b и k — постоянные для данного типа двигателей и этого топлива параметры. Кроме того, известно, что на скорость истечения оказывает влияние и температура в камере сгорания. Известно, что с увеличением этой температуры увеличивается и скорость истечения. Характер этой зависимости также сложно получить теоретически, и поэтому здесь тоже используют эмпирические зависимости. Для этого измеряют скорость истечения при различных температурах, а затем подбирают подходящую зависимость. Исследования показали, что влияние температуры можно учесть, вводя «корректирующий» множитель, который показывает, как отличается скорость истечения при температуре T от скорости при «номинальной» температуре $T_N = +20^\circ\text{C}$.

$$u(T) = u_N \cdot \exp\{\beta(T - T_N)\},$$

где величина β – это *коэффициент температурной чувствительности* топлива. Было установлено, что для изучаемых двигателей он зависит в основном от величины давления в камере сгорания. На графике показаны экспериментальные значения температурной чувствительности для наших сортов пороха, измеренные при различных давлениях, а также *аппроксимирующая кривая* для этой зависимости.



В результате мы получили эмпирическую формулу для расчета скорости истечения:

$$u(p, T) = \xi \cdot (p/1 \text{ Па})^\alpha \cdot \exp\{\beta(T - T_N)\},$$

в которой $\xi = \xi(\alpha)$ и $\beta = \beta(p)$.

Определите скорость истечения газа из сопла в установившемся режиме, при котором температура в камере сгорания $T = 1730^\circ\text{C}$, а давление $p = 2 \text{ МПа}$. Известно, что изменение площади сопла, при котором скорость истечения уменьшится в два раза при тех же температуре и давлении, соответствует уменьшению коэффициента α в $k = 1,175$ раза.

Математическая подсказка: Логарифмическая и показательная функции в математике – взаимно обратные. В физике особую роль играет экспонента – показательная функция, основанием которой является «замечательное» число $e \approx 2,7218281828 \dots$. Таким, образом, для вычисления экспоненты нужно возвести это число в степень аргумента: $\exp(x) \equiv e^x$. Логарифм по основанию e называют *натуральным*: $y = e^x \Leftrightarrow x = \ln(y)$.

Возможное решение:

В первую очередь определим постоянные b и k в эмпирической зависимости скорости истечения от α . Выберем на графике удобные точки *интерполирующей прямой*:

$$\begin{cases} 1 = b - 0,2 \cdot k \\ -1 = b - 0,6 \cdot k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 2 \\ k = 5 \end{cases} \Rightarrow \ln[\xi/(1 \text{ мм/с})] = 2 - 5 \cdot \alpha,$$

Теперь используем информацию из условия: для значения скорости истечения $u' = \frac{1}{2}u$

$$\frac{u}{u'} = 2 = \frac{\xi}{\xi'} \cdot \left(\frac{p}{1 \text{ Па}}\right)^{\alpha-\alpha'} = e^{-5(\alpha-\alpha')} \left(\frac{p}{1 \text{ Па}}\right)^{\alpha-\alpha'} = \left(\frac{p}{e^5 \text{ Па}}\right)^{\alpha-\alpha'} \Rightarrow$$

$$\alpha - \alpha' = \frac{\ln(2)}{\ln(p/e^5 \text{ Па})} \approx 0,073.$$

Нам также известно, что $\alpha' = \alpha/1,175$, и из полученных уравнений находим $\alpha \approx 0,49$. Это позволяет нам определить ξ для исследуемого режима:

$$\xi \approx 1 \frac{\text{мм}}{\text{с}} \cdot e^{2-5 \cdot 0,49} \approx 0,64 \frac{\text{мм}}{\text{с}}.$$

По второму графику определяем β для заданного давления: $\beta \approx 0,5 \frac{\%}{^\circ\text{C}}$. Теперь мы можем определить скорость истечения по рекомендованной эмпирической формуле:

$$u \approx 0,64 \frac{\text{мм}}{\text{с}} \cdot (2 \cdot 10^6)^{0,49} \cdot \exp\left[\frac{17,1}{2}\right] \approx 4,04 \frac{\text{км}}{\text{с}}.$$

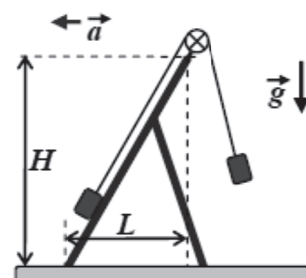
ОТВЕТ: скорость истечения в этом режиме $u \approx 4 \text{ км/с}$.

10 класс

Часть I (проверялись только ответы). Пример задачи:

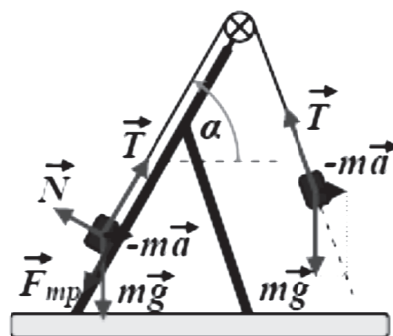
Вопрос 3:

Допустим, что нам нужен механический датчик контроля ускорения, который «срабатывает» при превышении некоторого критического его значения. Датчик нужно установить на скоростной модели электромобиля, который будет ездить по прямой горизонтальной трассе в тоннеле, в котором почти полностью откачан воздух. Предлагается установить на электромобиле наклонную поверхность с двумя тяжелыми грузами одинаковой массы, соединенными легким и почти нерастяжимым тросом. Один груз помещается на наклонную поверхность, трос перекидывается через легкий блок, закрепленный на конце поверхности (участок троса при этом параллелен поверхности), а второй груз висит свободно (см. рисунок). Высота наклонной поверхности $H = 35$ см, ее горизонтальная проекция $L = 15$ см, поверхность понижается вперед по ходу электромобиля. Известно, что коэффициент трения между первым грузом и поверхностью $\mu = 3/7$. Найдите критическое значение ускорения, на которое рассчитан этот датчик. Ускорение свободного падения примите равным $g \approx 9,8$ м/с². Ответ запишите в м/с², с точностью до десятых.



ОТВЕТ: 4,2.

Комментарий: Понятно, что датчик «срабатывает», когда первый груз начинает скользить вверх по наклонной поверхности. Проведем анализ равновесия груза в неинерциальной системе отсчета,двигающийся с постоянным ускорением, равным ускорению автомобиля. В НИСО к реальным силам добавляются силы инерции, и участок троса, к которому прикреплен второй груз, отклоняется от вертикали, и сила натяжения троса $T = m\sqrt{g^2 + a^2}$. Для обеспечения равновесия первого груза действующая на него сила трения должна быть равна $F_{тр} = T + ma \cdot \cos(\alpha) - mg \cdot \sin(\alpha)$. При критическом значении ускорения эта сила достигает максимального значения силы трения покоя, которое мы считаем равным $\mu N = \mu m[a \cdot \sin(\alpha) + g \cdot \cos(\alpha)]$. Таким образом, критическое значение ускорения определяется из уравнения



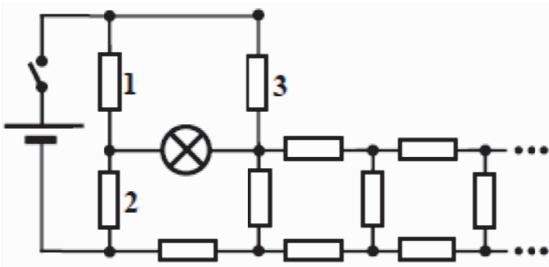
$$\begin{aligned} \sqrt{g^2 + a^2} + a \cdot \cos(\alpha) - g \cdot \sin(\alpha) &= \mu[a \cdot \sin(\alpha) + g \cdot \cos(\alpha)] \Rightarrow \\ \Rightarrow \sqrt{g^2 + a^2} &= g[\mu \cdot \cos(\alpha) + \sin(\alpha)] + a[\mu \cdot \sin(\alpha) - \cos(\alpha)]. \end{aligned}$$

Значения тригонометрических функций угла наклона поверхности $\sin(\alpha) = \frac{H}{\sqrt{H^2+L^2}} = \frac{7}{\sqrt{58}}$ и $\cos(\alpha) = \frac{L}{\sqrt{H^2+L^2}} = \frac{3}{\sqrt{58}}$, и поэтому при заданном значении μ

$$\begin{cases} \mu \cdot \cos(\alpha) + \sin(\alpha) = \frac{\sqrt{58}}{7} \\ \mu \cdot \sin(\alpha) - \cos(\alpha) = 0 \end{cases} \Rightarrow \sqrt{g^2 + a^2} = \frac{\sqrt{58}}{7} g \Rightarrow a = \frac{3}{7} g \approx 4,2 \text{ м/с}^2.$$

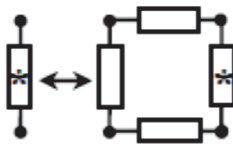
Часть II (проверялись решения).

1. («Разные мощности», 14 баллов). В школьной лаборатории ученики собрали цепь, схема которой показана на рисунке, из аккумулятора, ключа, лампочки накаливания и 2024 одинаковых резисторов. Ключ замкнули, и лампа «загорелась». Найдите отношение суммарной мощности, потребляемой всеми «незанумерованными» резисторами схемы, и мощности, потребляемой резистором с номером 1.



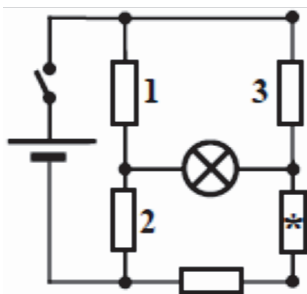
Возможное решение:

Пусть R – сопротивление одного из наших резисторов. В первую очередь отметим, что всю длинную цепочку из 2020 резисторов (кроме трех занумерованных и одного, включенного последовательно с цепочкой) можно заменить на один резистор R^* , и при этом для расчета его сопротивления можно воспользоваться тем соображением, что при отсечении от такой цепочки одного звена ее сопротивление практически не изменится. Поэтому



$$R^* = \frac{R(2R + R^*)}{3R + R^*} \Rightarrow R^{*2} + 2RR^* - 2R^2 = 0 \Rightarrow R^* = (\sqrt{3} - 1)R.$$

Значит, общее сопротивление в «правой нижней» ветви схемы равно $R_n = \sqrt{3}R$, причем это именно общее сопротивление всех «незанумерованных» резисторов схемы. Общее напряжение, создаваемое источником, на всей «мостовой» схеме, равно



$$U = I_1 R + I_2 R = I_3 R + I_n R_n \Rightarrow I_1 + I_2 = I_3 + \sqrt{3} I_n.$$

С другой стороны, условие непрерывности тока дает

$$I_1 + I_3 = I_2 + I_n.$$

Складывая эти два уравнения почленно и сокращая одинаковые слагаемые, получаем, что

$$2I_1 = (\sqrt{3} + 1)I_n,$$

и теперь искомое отношение мощностей легко находится:

$$\frac{P_n}{P_1} = \left(\frac{I_n}{I_1}\right)^2 \frac{R_n}{R} = \left(\frac{2}{\sqrt{3}+1}\right)^2 \sqrt{3} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}+2} = 4\sqrt{3} - 6 \approx 0,9282.$$

ОТВЕТ: $\frac{P_n}{P_1} = 4\sqrt{3} - 6 \approx 0,9282.$

2. («Из области фантастики», 16 баллов). В кубическом сосуде с ребром $a = 1$ м находится $\nu = 25,07$ моля криптона в равновесном состоянии с температурой $T = 168$ К. В некоторый момент времени неким фантастическим способом изменяются законы соударения молекул криптона с внутренними стенками сосуда: теперь эти соударения с вероятностью 98% являются упругими, а с вероятностью 2% – абсолютно неупругими. Оцените время после воздействия, за которое давление на стенки сосуда уменьшится на 2 % по сравнению с тем, что было до воздействия. За какое время это давление уменьшится в два раза? Какая масса криптона «оседет» на стенках сосуда к этому моменту времени? Молярная масса криптона $\mu \approx 83,8$ г/моль, универсальная газовая постоянная $R \approx 8,31$ Дж/(моль·К).

Возможное решение:

При абсолютно неупругих соударениях передача импульса от азота к стенке в 2 раза меньше, чем при упругом. Средняя передача импульса после воздействия $\langle \Delta p \rangle = 0,98 \cdot \Delta p + 0,02 \cdot \frac{\Delta p}{2} = 0,99 \cdot \Delta p$ (здесь Δp – передача импульса при упругих соударениях). Следовательно, при той же концентрации и скорости молекул давление газа на наши «необычные» стенки будет на 1 % меньше, чем для «обычных» стенок. Значит, сразу после воздействия давление «мгновенно» падает на 1 %. Ясно, что для уменьшения давления на 2 % оно должно упасть еще примерно на 1 % от начального (при оценочном вычислении пренебрежем отличием $\frac{1}{0,99}$ от 1).

Второй эффект, который повлияет на давление, связан с тем, что при абсолютно неупругом соударении молекулы «прилипают» к стенкам, и масса газа в сосуде (а вместе с ней и концентрация молекул газа) уменьшается. При этом средняя кинетическая энергия поступательного движения у оставшихся молекул практически не изменяется. Таким образом, после воздействия давление в сосуде будет уменьшаться примерно пропорционально массе газа. Количество молекул, прилипающих к стенкам общей площадью $S = 6a^2$ за малое время Δt , можно оценить как $N \approx 0,02 \cdot \frac{1}{6} n \cdot 6a^2 \nu \Delta t$, где ν – средняя скорость молекул с

массой m_0 , которую можно считать примерно равной $\nu \approx \sqrt{\frac{2 \cdot (3kT/2)}{m_0}} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}$.

Поэтому скорость убыли массы $\frac{\Delta m}{\Delta t} = -m_0 \frac{\Delta N}{\Delta t} \approx -0,02 \cdot m_0 n a^2 \sqrt{\frac{3RT}{\mu}} = -\frac{m}{50a} \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}$.

Значит, $\frac{\Delta m}{m} \approx -\frac{1}{50a} \sqrt{\frac{3RT}{\mu}} \Delta t$. Таким образом, время уменьшения массы (и, как мы

поняли, давления) еще на 1% равно $t_1 \approx 0,5a \sqrt{\frac{\mu}{3RT}} \approx 2,2$ мс. Это и есть требуемая

оценка. Как видно, это происходит очень быстро с макроскопической точки зрения, но достаточно медленно с микроскопической (если умножить это время на скорость теплового движения молекул криптона при этой температуре, получается 0,5 м, что меньше размеров сосуда, но велико по сравнению с длиной свободного пробега молекулы при этих условиях). При этом на стенках осядет примерно 1% от начальной массы криптона: $\Delta m_1 \approx 0,01 \cdot \mu \nu \approx 21 \text{ г}$.

Для больших изменений давления нам нужно учесть зависимость скорости изменения массы от массы, то есть решить уравнение

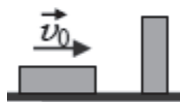
$$\frac{dm}{dt} = -\frac{m}{50a} \sqrt{\frac{3RT}{\mu}} \Rightarrow \frac{dm}{m} = d(\ln(m)) = -\frac{m}{50a} \sqrt{\frac{3RT}{\mu}} dt \equiv -d\left(\frac{t}{\tau}\right).$$

Суммирование приращений приводит к зависимости $m(t) = m(0) \cdot e^{-t/\tau}$, в которой $\tau \approx 50a \sqrt{\frac{\mu}{3RT}} \approx 0,22 \text{ с}$. Зависимость давления от времени $p(t) = 0,99 \cdot p_0 \cdot e^{-t/\tau}$, и снижение давления в два раза происходит к моменту времени $t_2 = 50a \sqrt{\frac{\mu}{3RT}} \cdot \ln(1,98) \approx 0,15 \text{ с}$. Масса «захваченного» стенками криптона $\Delta m_2 = \left(1 - \frac{0,5}{0,99}\right) \mu \nu \approx 0,495 \cdot \mu \nu \approx 1039 \text{ г}$, то есть немного меньше половины общей массы.

ОТВЕТЫ: Давление в сосуде упадет на 2 % примерно спустя время $t_1 \approx 0,5a \sqrt{\frac{\mu}{3RT}} \approx 2,2 \text{ мс}$ после воздействия, в два раза – примерно спустя $t_2 = 50a \sqrt{\frac{\mu}{3RT}} \cdot \ln(1,98) \approx 0,15 \text{ с}$, за это время на стенках «осядет» $\Delta m_2 = \frac{49}{99} \mu \nu \approx 1039 \text{ г}$ криптона.

3. («Пороховой ракетный двигатель», 20 баллов). Совпадает с задачей 4 для 7-9 классов.

4. («Стержневой удар», 24 балла). Гладкий однородный стержень длины L с квадратным поперечным сечением $a \times a$ установлен вертикально на гладкой горизонтальной поверхности. Второй такой же стержень скользит по этой поверхности со скоростью v_0 , направленной перпендикулярно одной из боковых граней первого, и сталкивается с первым так, что наносит своим торцом удар по этой грани (см. рисунок). В каких направлениях и с какими угловыми скоростями будут вращаться стержни после удара? Известно, что $a = L/3$, деформации всех тел считайте упругими, причем деформации стержней очень малы, и при этом намного больше деформаций поверхности.



Указание: При описании вращательного движения твердого тела удобно использовать характеристику, называемую *моментом инерции*. Если разбить тело на материальные точки, то момент инерции относительно заданной оси вращения вычисляется как сумма вкладов от отдельных точек: $I \equiv \sum_i m_i l_i^2$, где l_i

– расстояние до i -й точки от оси. Эта величина используется при записи уравнения вращательного движения тела $I \frac{d\omega}{dt} = M_{ex}$ (в котором ω – угловая скорость, а M_{ex} – момент внешних сил), и в выражении для кинетической энергии вращения $E_{вр} = \frac{1}{2} I \omega^2$. Момент инерции однородного параллелепипеда массой m с размерами $a \times b \times c$ относительно оси, проходящей через его центр масс перпендикулярно грани $b \times c$, равен $I_0 = \frac{1}{12} m(b^2 + c^2)$.

Возможное решение: см. решение задачи 3 из задания для 11 класса.

11 класс

Часть I (проверялись только ответы). Некоторые задачи:

Вопрос 2 (8 баллов):

В вертикальном цилиндре с гладкими стенками под поршнем с массой $M = 110$ кг находится $\nu = 1,1$ моля гелия при температуре $t = 27,7^\circ\text{C}$. Внешнее давление равно нормальному атмосферному, поршень покоится на высоте $H = 175$ см. Найдите период малых изотермических колебаний поршня при выводе из этого положения равновесия. Считайте, что универсальная газовая постоянная равна $R \approx 8,31$ Дж/(кг·К), а температура абсолютного нуля по шкале Цельсия $t_0 \approx 273,15^\circ\text{C}$. Ответ запишите в секундах, с точностью до десятых.

ОТВЕТ: 2,2.

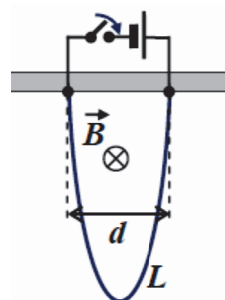
Комментарий: В состоянии равновесия $Mg + p_0 \cdot S = p \cdot S = \frac{pV}{H} = \frac{\nu RT}{H}$. При малом отклонении (на расстояние $x \ll H$) от положения равновесия уравнение движения поршня

$$M\ddot{x} = p \cdot S - Mg - p_0 \cdot S = \frac{\nu RT}{H+x} - \frac{\nu RT}{H} \approx -\frac{\nu RT}{H^2} x$$

приводится к уравнению гармонических колебаний с циклической частотой $\omega = \frac{\sqrt{\nu RT}}{H\sqrt{M}}$. Значит, период этих колебаний $\tau = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi H \sqrt{\frac{M}{\nu RT}} \approx 2,2$ с.

Вопрос 3 (10 баллов):

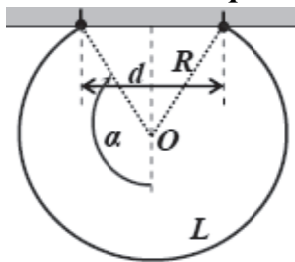
Очень легкий (с массой примерно 0,3-0,4 г) и гибкий провод подвешен за концы шарнирно к горизонтальному потолку. К этим шарнирам подведены провода, позволяющие подавать на них напряжение от аккумулятора (см. рисунок). В области пространства, в которой располагается провод, создано горизонтальное магнитное поле с индукцией $B = 0,5$ Тл, перпендикулярное плоскости его подвеса. Расстояние между точками подвеса провода равно $d = 30$ см, а его длина L ровно в $\frac{5\pi}{3} \approx 5,236$ раза больше. Ключ замыкают, и по проводу течет ток с силой $I = 36$ А. Найдите



силу натяжения провода после установления равновесия. Ответ запишите в ньютонах, с точностью до десятых.

ОТВЕТ: 5,4.

Комментарий: При указанной массе на требуемом уровне точности действующей на провод силой тяжести (менее 0,004 Н) можно пренебречь. Невесомый гибкий провод в однородном магнитном поле примет форму дуги окружности некоторого радиуса R . Пусть α – половина углового размера этой дуги (см. рисунок). Тогда длина провода $L = 2R \cdot \alpha$. С другой стороны, длина хорды этой дуги соответствует расстоянию между шарнирами: $d = 2R \cdot \sin(\alpha)$. Таким образом, радиус кривизны провода в состоянии равновесия определяется по значениям d и L из уравнения $d = 2R \cdot \sin\left(\frac{L}{2R}\right)$, а затем сила натяжения провода находится из условия равновесия его малого элемента: $IBRd\alpha = 2T \sin\left(\frac{d\alpha}{2}\right)$, то есть $T = IBR$. Можно записать уравнение на α в виде $\frac{\sin(\alpha)}{\alpha} = \frac{d}{L} = \frac{3}{5\pi}$, и заметить, что его корень – это $\alpha = \frac{5\pi}{6}$, и при этом $d = R$. Значит, $T = IBd = 5,4$ Н.



Часть II (проверялись РЕШЕНИЯ). «ОДНАЖДЫ В ПАРАЛЛЕЛЬНОЙ ВСЕЛЕННОЙ».

Действие происходит в параллельной Вселенной, открытой для нас Айзеком Азимовым (см. серию рассказов «Я, робот»). Там тоже идет 2024 год, но там еще в XX веке был создан позитронный мозг, по своим возможностям не уступающий человеческому, создатель которого заложил в его физическую конструкцию три Закона Робототехники. Впрочем, это не имеет прямого отношения к нашим задачам. Итак, приступим...

Сьюзен Кэлвин сидела в кабинете доктора Альфреда Лэннинга, когда туда зашел Грегори Пауэлл.

– В информационной ленте мира, из которого выходил на контакт этот астрофизик... – начал он.

– Азимов. – терпеливо подсказал ему доктор Лэннинг.

– Да! – торопливо проговорил Пауэлл – Там дали Нобелевскую премию по физике за машинное обучение!

– Машинное обучение? – оживилась Сьюзен Кэлвин, – Быть может, это похоже на наш эксперимент, когда мы на начальном этапе обучаем группу роботов так, как когда-то обучали детей в школе, и только потом используем прямую загрузку информации?

– Вряд ли – сказал доктор Лэннинг, – Не забывайте, их машины снабжены электронными мозгами, работающими в основном по классическим принципам: максимум – туннельные переходы и спинтроника. Но я и сам когда-то начинал с попыток смоделировать нейронную сеть системой взаимодействующих

квантовых частиц, и один из их лауреатов делал то же самое, только у него была модель спиновой решетки.

– Спиновая решетка? – переспросил Пауэлл, – Что это за штука?

– Но Вы должны знать: это система закрепленных частиц, каждая из которых – элементарный магнетик с моментом $\vec{\mu} = -\mu_0 \vec{S}$, где *атомный магнетон* (константа, записываемая через элементарный заряд, постоянную Планка и массу электрона) $\mu_0 = \frac{eh}{4\pi m}$, знак «минус» связан с тем, что в атомном магнетизме основную роль играют отрицательно заряженные электроны, а безразмерный вектор \vec{S} характеризует состояние частицы. В простом случае в магнитном поле с индукцией \vec{B} квантовая частица может находиться всего в двух состояниях с проекциями \vec{S} на направление магнитного поля $+1$ и -1 , а взаимодействия частиц между собой можно пренебречь.

– Тогда у половины частиц этот вектор будет направлен по полю, а у другой половины – против поля, и магнитный момент всей решетки будет равен нулю с точностью до флуктуаций, – важно заметил Пауэлл.

– Не торопитесь, – предостерег его доктор Лэннинг. – Если решетка находится при температуре T , то вероятности реализации разных микросостояний описываются статистикой Больцмана: вероятности иметь каждую из двух проекций s_B равны $w(s_B) = C \cdot \exp\left[-\frac{E(s_B)}{kT}\right]$, где C не зависит от s_B . Кстати, хотя второй из лауреатов, по-моему, не физик, но в одной из его работ тоже использовалась статистика Больцмана.

– Но ведь сумма двух вероятностей равна 1? – уточнила Сьюзен Кэлвин.

– Да, конечно, – ответил доктор Лэннинг и продолжил, – А энергия этих состояний $E(s_B) = -(\vec{\mu} \cdot \vec{B}) = \mu_0 B \cdot s_B$. Так что они вовсе не равновероятны. Кстати, Сьюзен, это может быть неплохой задачей для Ваших «школьников». Это важно – ведь при производстве позитронного мозга мы используем охлаждение некоторых элементов до низких температур за счет *адиабатического размагничивания* решеток магнитных кристаллов, а они в чем-то похожи на спиновые решетки. Только расскажите им про *энтропию*: им для начала достаточно будет знать, что в термодинамике это функция состояния системы микрочастиц S , бесконечно малое изменение которой связано с количеством теплоты, которое получила система при температуре T : $dS = \frac{1}{T} \delta Q$. И сообщите, что для спиновой решетки из N частиц в магнитном поле \vec{B} эта самая энтропия равна

$$S(T, B) = S_0(T) - \frac{kN}{2} \left[\frac{e^{\mu_0 B/kT} - e^{-\mu_0 B/kT}}{e^{\mu_0 B/kT} + e^{-\mu_0 B/kT}} \right]^2.$$

– А $S_0(T)$?

– Это энтропия решетки без учета магнитных свойств – она им, в сущности, не понадобится. Пусть считают, что в нужных им процессах ее изменение пренебрежимо мало.

1. («Охлаждение намагниченной спиновой решетки», 18 баллов)/ Определите величину C и найдите вероятности реализации значений $s_B = \pm 1$ при температуре жидкого гелия $T_0 \approx 1,9$ К в магнитном поле $B = 10$ Тл. Вычислите среднее значение магнитного момента спиновой решетки из N частиц

при этих значениях температуры и индукции поля. Рассмотрите процесс, в котором эту решетку сначала при постоянной температуре $T_0 \approx 1,9$ К намагнитили до создания магнитного поля $B = 10$ Тл, а затем адиабатически размагнитили до магнитного поля «остаточной» намагниченности, которая для этой решетки равна $B_0 = 5$ мТл. Какой примерно будет конечная температура решетки? Используйте данные:

- Атомный магнетон $\mu_0 = \frac{eh}{4\pi m} \approx 9,27 \cdot 10^{-24}$ Дж/Тл;
- Постоянная Больцмана $k \approx 1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К.

Возможное решение:

В соответствии с «подсказкой» Сьюзен Кэлвин, сумма $C \cdot \exp[+z] + C \cdot \exp[-z] = 1$, где $z \equiv \frac{\mu_0 B}{kT} \approx 3,535$. Следовательно:

$$C = \frac{1}{\exp[+z] + \exp[-z]} \approx 0,0291 \Rightarrow \begin{cases} w(+1) = \frac{\exp[-z]}{\exp[+z] + \exp[-z]} \approx 0,00085 \\ w(-1) = \frac{\exp[+z]}{\exp[+z] + \exp[-z]} \approx 0,99915 \end{cases}$$

Среднее значение проекции магнитного момента частицы на направление внешнего поля

$$\mu_{cp B} = \mu_0 [(+1) \cdot w(+1) + (-1) \cdot w(-1)] \approx -0,9983 \cdot \mu_0 \approx -9,25 \cdot 10^{-24} \text{ Дж/Тл.}$$

Так что среднее значение магнитного момента спиновой решетки из N частиц равно

$$M \approx 0,9983 \cdot \mu_0 N \approx 9,25 \cdot 10^{-24} \cdot N \text{ Дж/Тл.}$$

При анализе процесса адиабатического размагничивания достаточно заметить, что в соответствии с сообщенными свойствами энтропии она остается постоянной в адиабатическом процессе ($\delta Q \Rightarrow dS = 0$), а из формулы для энтропии решетки следует, что при заданных приближениях постоянство энтропии означает постоянство B/T . Таким образом:

$$\frac{B}{T_0} = \frac{B_0}{T} \Rightarrow T = \frac{B_0}{B} T_0 \approx 0,95 \cdot 10^{-3} \text{ К} \approx 1 \text{ мК.}$$

ОТВЕТЫ: $C = \frac{1}{\exp[+z] + \exp[-z]} \approx 0,0291$,

вероятности $w(+1) = \frac{\exp[-z]}{\exp[+z] + \exp[-z]} \approx 0,00085$,

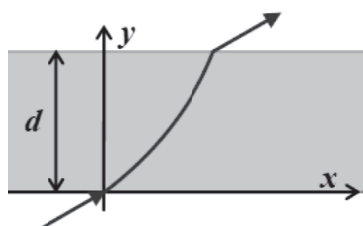
$w(-1) = \frac{\exp[+z]}{\exp[+z] + \exp[-z]} \approx 0,99915$,

$M \approx 0,9983 \cdot \mu_0 N \approx 9,25 \cdot 10^{-24} \cdot N \text{ Дж/Тл.}$

Конечная температура решетки при размагничивании $T = \frac{B_0}{B} T_0 \approx 1 \text{ мК.}$

– Кстати, а чем они у Вас сегодня занимаются? – спросил доктор Лэннинг.

– У них была лабораторная работа, - сообщила Сьюзен. – Они синтезировали прозрачные плоскопараллельные пластины, в которых показатель преломления изменяется в зависимости от координаты y , отсчитываемой поперек пластины так, что узкий световой пучок идет по заданной кривой $y(x)$. Например, ученик S-401 синтезировал пластину, у которой луч,



упавший из воздуха в начале координат под углом $\alpha_0 = 60^\circ$, «прочерчивает» внутри пластины толщиной d график функции $y(x) = x + \frac{x^2}{2d}$ (см. рисунок).

– И как же у этой пластины показатель преломления зависит от y ?

2. («Световая парабола», 15 баллов) Ответьте на вопрос доктора Лэннинга. Показатель преломления воздуха считайте равным 1.

Возможное решение:

При движении луча внутри пластины, в соответствии с законом Снелла:

$$n(y) \cdot \sin[\alpha(y)] = n_0 \cdot \sin(\alpha_0) = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

где α – угол отклонения луча от оси y . С другой стороны,

$$\frac{dy}{dx} = 1 + \frac{x}{d} = \operatorname{ctg}(\alpha) = \sqrt{\frac{1 - \sin^2(\alpha)}{\sin^2(\alpha)}} \Rightarrow \frac{1}{\sin^2(\alpha)} = 2 + 2\frac{x}{d} + \frac{x^2}{d^2} = 2\left(1 + \frac{y}{d}\right).$$

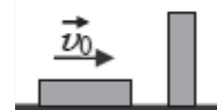
Следовательно,

$$n(y) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\left(1 + \frac{y}{d}\right)}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow n(y) = \sqrt{\frac{3}{2}\left(1 + \frac{y}{d}\right)}.$$

ОТВЕТ: $n(y) = \sqrt{\frac{3}{2}\left(1 + \frac{y}{d}\right)}.$

- А еще двое экспериментировали с упругими нецентрными ударами.
- Это более сложная задача! – согласился доктор Лэннинг.

3. Стержневой удар», 20 баллов) Гладкий однородный стержень длины L с квадратным поперечным сечением $a \times a$ установлен вертикально на гладкой горизонтальной поверхности. Второй такой же стержень скользит по этой поверхности со скоростью v_0 , направленной перпендикулярно одной из боковых граней первого, и сталкивается с первым так, что наносит своим торцом удар по этой грани. В каких направлениях и с какими угловыми скоростями будут вращаться стержни после удара? Известно, что $a = 2L/7$, деформации всех тел считайте упругими, причем деформации стержней очень малы, и при этом намного больше деформаций поверхности.



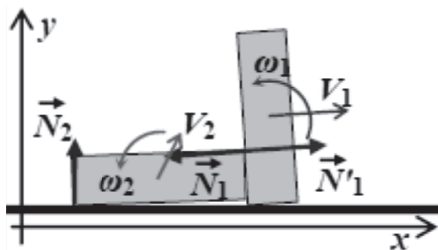
Указание: Момент инерции однородного параллелепипеда массой m с размерами $a \times b \times c$ относительно оси, проходящей через его центр масс перпендикулярно грани $b \times c$, равен $I_0 = \frac{1}{12} m(b^2 + c^2).$

Возможное решение:

Данная задача является задачей с «частично открытой» моделью, что традиционно для олимпиады «ПВГ!» по физике.

При анализе удара мы должны понимать, что «малость» деформаций означает и малость времени соударений, что позволяет пренебрегать действием на тела в процессе удара всех «конечных» сил. Таким образом, нам нужно учитывать только «очень большие» силы (то есть те, которые стремятся к

бесконечности в пределе нулевого времени соударения) – силы реакции. Учитывая условия гладкости все тел, приходим к выводу, что это силы нормальной реакции – между стержнями (N_1) и между горизонтальным стержнем и поверхностью (N_2). Характер движения вертикального стержня после удара позволяет утверждать, что сила реакции между ним и поверхностью остается «конечной». Силы нормальной реакции всегда перпендикулярны поверхностям соприкосновения тел, но их распределение по этим поверхностям могут изменяться в процессе удара для выполнения условий связи, возникающих при движении соприкасающихся тел. Конкретный вид условий связи сил реакции зависит от упругих свойств тел, а в предложенной задаче есть разные тела. Упругие свойства стержней, разумеется, одинаковы, а упругие свойства поверхности могут от них отличаться: единственная информация в условии, которая позволяет нам делать выводы о соотношении упругих свойств, содержится во фразе «деформации стержней очень малы, и при этом намного больше деформаций поверхности». С точки зрения методической комиссии олимпиады, это позволяет считать, что жесткость материала поверхности намного больше жесткости материала стержней, и поэтому процессы изменения силы N_2 намного быстрее, чем у N_1 . Тогда мы приходим к выводу, что в ходе удара изменение N_2 «подстраивается» под изменение N_1 таким образом, чтобы смещения точек поверхности можно было пренебрегать по сравнению с очень малыми смещениями точек горизонтального стержня. Поэтому в рамках нашей модели мы будем считать, что перед отрывом горизонтального стержня от поверхности вертикальная составляющая точки касания этого стержня и поверхности должна остаться равной нулю (хотя вертикальная составляющая скорости ЦМ этого стержня должна быть направлена вверх благодаря действию силы N_2).



На вертикальный стержень в процессе удара действует одна «очень большая» сила – сила нормальной реакции N'_1 со стороны горизонтального стержня. Из геометрии удара сразу становится ясно, что момент этой силы относительно ЦМ вертикального стержня ненулевой, и этот стержень после удара начнет вращаться против часовой стрелки (см. рисунок, на котором «пренебрежимо малые» смещения стержней в ходе удара для наглядности показаны конечными). В процессе старта такого вращения (перед началом поворота) силы нормальной реакции между стержнями должны перераспределиться по поверхности их соприкосновения таким образом, чтобы они были сосредоточены в точке контакта «верхнего» ребра горизонтального стержня с вертикальным. Поэтому, если N_1 – средняя величина силы взаимодействия стержней за время удара Δt , то скорость центра масс и угловая скорость вращения вертикального стержня после удара удовлетворяют соотношениям

$$\begin{cases} mV_1 = N_1 \cdot \Delta t \\ I\omega_1 = l \cdot N_1 \cdot \Delta t \end{cases}$$

Здесь m – масса каждого стержня, момент инерции каждого стержня относительно горизонтальной оси вращения, проходящей через ЦМ, $I =$

$\frac{1}{12}m(a^2 + L^2) = \frac{53}{48}ma^2$, а плечо силы реакции $l = \frac{L}{2} - a = \frac{3}{4}a$. Для горизонтального стержня

$$\begin{cases} mV_{2x} = mv_0 - N_1 \cdot \Delta t \\ mV_{2y} = N_2 \cdot \Delta t \\ I\omega_2 = \frac{a}{2} \cdot N_1 \cdot \Delta t - \frac{L}{2} \cdot N_2 \cdot \Delta t \end{cases}.$$

Как видно, условие связи для точки касания этого стержня с поверхностью

$$V_{2y} - \omega_2 \frac{L}{2} = \left[\frac{N_2}{m} - \frac{L}{2I} \left(\frac{a}{2} \cdot N_1 - \frac{L}{2} \cdot N_2 \right) \right] \cdot \Delta t = 0$$

может быть выполнено только при вращении горизонтального стержня после удара в направлении, показанном на рисунке, и оно дает нам связь «очень больших» сил реакции:

$$N_2 \left(1 + \frac{mL^2}{4I} \right) - N_1 \frac{maL}{4I} = 0 \Rightarrow N_2 = \frac{maL}{4I + mL^2} N_1 = \frac{3aL}{a^2 + 4L^2} N_1 \equiv \varepsilon N_1.$$

Подсчет дает, что $\varepsilon \equiv \frac{3aL}{a^2 + 4L^2} = 0,21$. С учетом этого условия связи мы можем выразить все конечные скорости и угловые скорости через скорость центра масс вертикального стержня после удара:

$$\omega_1 = \frac{ml}{I} V_1 = \frac{36}{53a} V_1, \quad V_{2x} = v_0 - V_1, \quad V_{2y} = \varepsilon V_1 = \frac{21}{100} V_1, \quad \omega_2 = \frac{2}{L} V_{2y} = \frac{4\varepsilon}{7a} V_1 = \frac{3}{25a} V_1.$$

Подставляя эти соотношения в закон сохранения энергии

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{m}{2} (V_1^2 + V_{2x}^2 + V_{2y}^2) + \frac{I}{2} (\omega_1^2 + \omega_2^2)$$

находим, что $V_1 = \frac{5300}{6809} v_0 \approx 0,778v_0$.

Таким образом, угловые скорости вращения стержней после удара

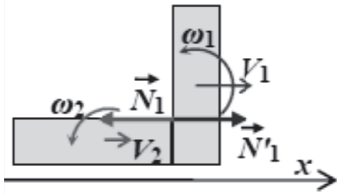
$$\omega_1 = \frac{3600}{6809} \frac{v_0}{a} \approx 0,529 \frac{v_0}{a}, \quad \omega_2 = \frac{636}{6809} \frac{v_0}{a} \approx 0,093 \frac{v_0}{a}.$$

ОТВЕТЫ: оба стержня после удара вращаются против часовой стрелки, величины угловых скоростей $\omega_1 = \frac{3600}{6809} \frac{v_0}{a}$ и $\omega_2 = \frac{636}{6809} \frac{v_0}{a}$.

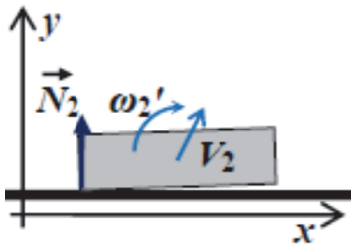
Примечание: Если ввести другие предположения об упругих свойствах тел, можно построить и другие модели удара, приводящие к другим связям между силами реакции. Жюри олимпиады при оценке альтернативных моделей будет исходить из оценки их корректности и «разумности» с точки зрения физики. В первую очередь могут считаться «разумными» модели, в которых явно указано, какие модельные предположения использованы, как они обоснованы в рамках условия задачи, и как они порождают соотношения между силами реакции. Модели, не удовлетворяющие этим требованиям, рассматриваются как «грубые», и максимальная оценка решения, построенная на основе таких моделей, не может превышать **9 баллов** (см. критерии).

Приведем некоторые примеры альтернативных моделей.

Пример 1: *Корректная модель, не согласующаяся с предложенным приближением.* Введем предположение, противоположное заданному в условии. Пусть деформации поверхности очень малы, но намного больше, чем деформации стержней. Теперь стержни значительно «жестче» поверхности, и их соударение происходит намного быстрее. Таким образом, в ходе соударения



стержней поверхность только начала деформироваться, и сила реакции N_2 осталась «конечной». Тогда при ударе стержней ее можно не учитывать, и в результате тройное соударение стержней и поверхности можно рассматривать как два последовательных парных: сначала, пренебрегая влиянием поверхности, мы рассматриваем удар стержней, а затем – соударение горизонтального стержня с поверхностью (при этом вертикальный уже начал движение, и больше не участвует в соударении). Первый удар описывается теми же соотношениями с $N_2 = 0$:



$$\left\{ \begin{array}{l} mV_1 = N_1 \cdot \Delta t \\ I\omega_1 = \frac{3}{4}a \cdot N_1 \cdot \Delta t \\ mV_{2x} = mv_0 - N_1 \cdot \Delta t \\ I\omega_2 = \frac{a}{2} \cdot N_1 \cdot \Delta t \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \omega_1 = \frac{36}{53} \frac{V_1}{a} \\ V_{2x} = v_0 - V_1 \\ \omega_2 = \frac{24}{53} \frac{V_1}{a} \end{array} \right.$$

и при этом $V_{2y} = 0$. В этом случае ЗСЭ дает $V_1 = \frac{106}{145}v_0$, и $\omega_1 = \frac{72}{145} \frac{v_0}{a}$, $V_{2x} = \frac{39}{145}v_0$, $\omega_2 = \frac{48}{145} \frac{v_0}{a}$. Скорости вертикального бруска больше не изменятся, а горизонтальному еще предстоит удар о поверхность, в ходе которого на него действует сила N_2 . Значит, V_{2x} тоже больше изменяться не будет, и при этом

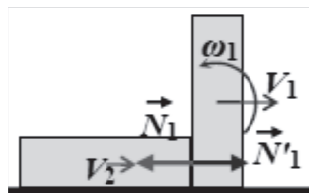
$$\left\{ \begin{array}{l} mV_{2y} = N_2 \cdot \Delta t' \\ I\omega'_2 = I\omega_2 - \frac{L}{2} \cdot N_2 \cdot \Delta t' \end{array} \right\} \Rightarrow \omega'_2 = \omega_2 - \frac{84}{53} \frac{V_{2y}}{a}.$$

ЗСЭ для второго удара $\frac{I}{2}\omega_2^2 = \frac{I}{2}\omega'^2_2 + \frac{m}{2}V_{2y}^2$ дает $V_{2y} = \frac{1113}{3625}v_0$, и $\omega'_2 = -\frac{564}{3625} \frac{v_0}{a}$. Как видно, изменились не только величины угловых скоростей, но и направление вращения горизонтального бруска после удара!

ОТВЕТЫ': вертикальный стержень после удара вращается против часовой стрелки с угловой скоростью $\omega_1 = \frac{72}{145} \frac{v_0}{a} \approx 0,497 \frac{v_0}{a}$, горизонтальный – по часовой стрелке с угловой скоростью $\omega_2 = \frac{564}{3625} \frac{v_0}{a} \approx 0,156 \frac{v_0}{a}$. При таком решении не засчитывается только пп. 1.2, а остальные пункты при правильном решении оцениваются полностью, так что за такое решение жюри выставяло 18 баллов.

Сопоставление полученных ответов приводит нас к важному выводу. Мы обнаружили, что характер движения вертикального стержня слабо зависит от модели – изменение предположения о соотношении характеристик, описывающих упругие свойства тел, на прямо противоположные изменяет лишь величину его скорости и угловой скорости, и в целом не очень существенно. Зато характер вращения горизонтального стержня после окончания удара очень существенно зависит от этого соотношения – вплоть до изменения знака. Интуитивно понятно, что при произвольном соотношении этих характеристик ответ для ω_2 должен быть «где-то между» этими «крайними» случаями. А это означает, что он может отличаться очень значительно для разных материалов. На самом деле ситуация еще более сложная: как мы видели, деформации тел в процессе нашего удара – это комбинация деформаций разного типа (то есть это не только деформации сжатия, но и деформации сдвига), для которых характеристики упругих свойств материалов (модули Юнга и модули сдвига) могут быть разными. Так что при произвольных упругих свойствах материалов стержней и поверхности решение задачи становится очень сложным: нам нужно иметь полную информацию о структуре материалов и провести сложный (и явно «нешкольный») расчет динамики деформаций. Можно сделать вывод: без предположений о соотношении деформаций тел решение задачи в предложенном виде невозможно. Поэтому в условие задачи такое предположение было включено, и методическая комиссия и жюри олимпиады считают очень важным при оценке решений участников исходить из того, как участник его использовал.

Пример 2: «Грубая» модель. Будем считать, что перераспределения сил реакции в процессе удара не происходит, и точкой приложения равнодействующей сил нормальной реакции брусков в ходе удара является центр площади соприкосновения. Сразу отметим: «грубость» этой модели по сравнению с разобранными выше состоит в том, что мы принимаем это предположение без какого-либо обоснования, то есть не анализируя его связь с упругими свойствами тел. Мы фактически предполагаем, что эти свойства таковы, чтобы обеспечить нам возможность максимально простого анализа удара. Действительно, в этом случае горизонтальный брусок не начинает вращаться, и сила реакции N_2 осталась «конечной» в течение всего соударения. В этом случае нам даже не нужно анализировать динамику соударения – достаточно системы законов сохранения, в которой к законам сохранения импульса и энергии добавляется закон сохранения момента импульса:



$$\left\{ \begin{array}{l} mV_1 + mV_2 = mv_0 \\ I\omega_1 + mV_2 \cdot \frac{5}{4}a = mv_0 \cdot \frac{5}{4}a \\ \frac{m}{2}v_0^2 = \frac{m}{2}(V_1^2 + V_2^2) + \frac{I}{2}\omega_1^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} V_2 = \frac{75}{181}v_0 \\ V_1 = \frac{106}{181}v_0 \\ \omega_1 = \frac{120}{181} \frac{v_0}{a} \approx 0,663 \frac{v_0}{a} \end{array} \right.$$

Ясно, что расчет на базе законов сохранения был возможен и в примере 1, только там их нужно было бы записать последовательно для первого и второго ударов.

Полезно обратить внимание, что в таком решении влияние поверхности на ответ вообще исчезло.

ОТВЕТЫ'': вертикальный стержень после удара вращается против часовой стрелки с угловой скоростью $\omega_1 = \frac{120}{181} \frac{v_0}{a} \approx 0,663 \frac{v_0}{a}$, горизонтальный – не вращается.

Отметим, что для ω_1 и здесь получается ответ, не слишком сильно отличающийся от ответа «авторской» модели, а ответ для ω_2 отличается радикально. Это решение, согласно критериям, при полностью правильном выполнении оценивалось в 9 баллов.

В кабинет вернулся ушедший было Грегори Пауэлл. Он обратился к Сьюзен Кэлвин:

– Ну вот, два Ваших «школьника» собрались на экскурсию в заповедник Истории. Они хотят облететь его за один день, а дирекция заповедника строго запрещает использование гипердвигателя! Они требуют использовать средство передвижения на реактивной тяге!

– Но это же очень шумно! – поморщилась та.

– А они говорят, что это поможет созданию правильной атмосферы. Хуже другое: таких уже давно не делают, и придется им срочно изготовить парочку двигателей.

– Ничего, справитесь! – улыбнулся доктор Лэннинг. – Пусть сами ученики Вам помогут.

4. («Скорость истечения», 22 балла) В реактивном двигателе в камеру сгорания поступают топливо и окислитель (пусть в нашем случае в качестве окислителя используется кислород воздуха), а потом продукты горения через сопло вырываются наружу, формируя реактивную струю. Одной из важных характеристик реактивного двигателя является *скорость истечения* реактивной струи из сопла. На самом деле она довольно сложным образом зависит от характеристик топлива, геометрии камеры сгорания и сопла, и даже от условий запуска двигателя. Но мы постараемся построить *полуэмпирическую модель* для ее вычисления для конкретного типа топлива и конкретной конструкции двигателя, работающего в определенных режимах. Вам предлагается в рамках этой модели использовать следующие предположения:

- Горение топлива происходит на определенной поверхности и является квазиравновесным процессом, и поэтому на этой *поверхности горения топлива* температура T и давление p будут связаны уравнением Клапейрона – Клаузиуса: $\frac{dp}{dT} = \frac{L}{T\Delta v}$, в котором L – молярная теплота испарения топлива, а Δv – изменение молярного объема при фазовом переходе, причем объемом жидкого топлива можно пренебрегать по сравнению с объемом образовавшихся газообразных продуктов горения. При этом для описания изучаемых нами режимов горения с удовлетворительной точностью можно

вместо переменной молярной теплоты испарения использовать некоторое среднее значение $L \approx 8,2$ кДж/моль.

- Зависимость массового расхода топлива $\frac{dm}{dt} \equiv \dot{m}$ на поверхности горения от температуры определяется *уравнением Аррениуса*, которое в нашем случае удобно записать в дифференциальной форме: $\frac{d\dot{m}}{dT} = \dot{m} \frac{E_a}{RT^2}$, и при этом *энергию активации* для используемого топлива можно считать примерно постоянной и равной $E_a \approx 20,5$ кДж/моль.

- Скорость истечения примерно равна скорости удаления газообразных продуктов реакции от поверхности горения. Эмпирическая «подгонка» модели осуществляется подбором зависимости *эффективной площади* поверхности горения от давления – мы будем моделировать эту зависимость линейной во всем интересующем нас диапазоне.

Пусть тестовые эксперименты показали, что в режиме, в котором давление вблизи поверхности горения равно $p_1 = 1,6$ МПа, скорость истечения $u_1 \approx 1,6$ км/с, а при $p_2 = 2,0$ МПа скорость истечения $u_2 \approx 3,1$ км/с.

Рабочее давление вблизи поверхности горения для этого двигателя равно $p = 2,3$ МПа. В рамках предлагаемой модели установите характер зависимости скорости истечения от давления и рассчитайте скорость истечения реактивной струи в рабочем режиме. Возможно ли в рамках этой модели провести анализ работы двигателя в режиме с давлением $p' = 3,75$ МПа на поверхности горения (ответ объяснить)?

Возможное решение:

В соответствии с условием, изменение молярного объема при испарении топлива на поверхности горения примерно равно молярному объему газообразных продуктов горения, для которых можно использовать уравнение Менделеева–Клапейрона, и поэтому

$$\Delta v \approx v_r = \frac{V}{\nu} = \frac{RT}{p} \Rightarrow \frac{dp}{dT} = \frac{L}{RT^2} p.$$

Комбинируя это соотношение с уравнением Аррениуса из условия, мы можем найти связь массового расхода топлива с давлением вблизи поверхности горения. Действительно, разделив их друг на друга, получаем после интегрирования:

$$\frac{d\dot{m}}{dp} = \frac{E_a}{L} \frac{\dot{m}}{p} \Rightarrow \frac{d\dot{m}}{\dot{m}} = k \frac{dp}{p} \Rightarrow \ln(\dot{m}) = \text{const} + \ln(p) \Rightarrow \dot{m} = \dot{m}_0 \cdot \left(\frac{p}{p_0}\right)^k.$$

Показатель степени в этом уравнении $k \equiv \frac{E_a}{L} \approx 2,5$. С другой стороны, в рамках предложенных приближений массовый расход можно связать с увеличением объема, скоростью истечения u и эффективной площадью поверхности горения S :

$$u \cdot S = \frac{\dot{m}}{\rho_r} = \frac{RT}{\mu p} \dot{m}.$$

Используем рекомендованное приближение, согласно которому эффективная площадь может быть записана как линейная функция давления $S = S_0 \left[1 + \gamma \frac{p - p_0}{p_0}\right]$ (зависимость выбрана так, что содержит параметр γ , который нужно подобрать из данных эксперимента, и дает значение S_0 в некоторой

«начальной» точке – при $p = p_0$). Кроме того, проинтегрируем уравнение Клапейрона–Клаузиуса, используя постоянство молярной теплоты испарения:

$$\frac{dp}{p} = \frac{L}{R} \frac{dT}{T^2} \Rightarrow \ln\left(\frac{p}{p_0}\right) = \frac{L}{R} \left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T}\right) \Rightarrow T(p) = \frac{T_0}{1 - \frac{RT_0}{L} \ln\left(\frac{p}{p_0}\right)}.$$

Объединяя полученные результаты, получаем *модельную зависимость* скорости истечения от давления:

$$u(p) = \frac{1}{S_0(1 + \gamma x)} \frac{RT}{\mu p} \dot{m} \equiv \frac{u_0}{(1 + \gamma x)[1 - \beta \cdot \ln(1 + x)]} (1 + x)^{\frac{3}{2}},$$

в которой введена безразмерная переменная $x \equiv \frac{p - p_0}{p_0}$ и введено обозначение $\beta \equiv \frac{RT_0}{L}$. Как видно, эта формула содержит три параметра, которые следует подбирать из экспериментальных данных (u_0 , β и γ), а в нашем распоряжении есть только два экспериментальных значения скорости истечения. Так что «прямолинейное» выполнение программы построения полуэмпирической формулы для нас оказалась недоступно. В такой ситуации возможны как минимум три пути дальнейших действий:

1) Из физических соображений выбрать еще одно значение давления, при котором нам будет известно разумное значение скорости истечения или одного из параметров.

2) Упростить модельную зависимость так, что она будет содержать только два параметра.

3) Выразить два параметра через третий и выбрать его так, чтобы ошибки в двух заданных точках были минимальны (например, минимизируя сумму квадратов отклонений – такой метод называют «методом наименьших квадратов»).

Продemonстрируем возможное использование первого пути. При низких температурах (в отсутствии горения) давление в камере должно быть равно атмосферному. Логарифмическая зависимость $T = \frac{T_0}{1 - \frac{RT_0}{L} \ln\left(\frac{p}{p_0}\right)}$, связывающая

температуру с давлением, изменяется довольно медленно, так что при оценочных вычислениях не так важно, какую конкретно «низкую» температуру мы сопоставим давлению 1 Атм. Например, если принять $T_0 \approx 273$ К при $p_0 \approx 101$ кПа, то $\beta \equiv \frac{RT_0}{L} \approx 0,277$. Используя два известных значения скорости истечения, находим содержащиеся в этой формуле параметры u_0 и γ .

$$\frac{u_2}{u_1} \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{3/2} \left[\frac{1 - \beta \cdot \ln(1 + x_2)}{1 - \beta \cdot \ln(1 + x_1)} \right] = \frac{1 + \gamma x_1}{1 + \gamma x_2} \approx 1,02186 \Rightarrow \gamma \approx -0,005$$

(здесь $x_1 \approx 14,84$ и $x_2 \approx 18,80$, и в промежуточных выкладках оставлено существенно больше знаков, чем должна обеспечивать точность приближения). После этого по любому из значений находим $u_0 \approx 5,55$ м/с. Таким образом, наша формула имеет вид

$$u(p) \approx \frac{5,55 \text{ м/с}}{(1 - 0,005 \cdot x)[1 - 0,277 \cdot \ln(1 + x)]} (1 + x)^{\frac{3}{2}}.$$

Для рабочего режима $x \approx 21,77$ и поэтому $u \approx 5,0$ км/с. При этом небольшие «разумные» вариации выбранной «реперной точки» (например, если положить $T_0 \approx 300$ К) не очень существенно изменяют ответ.

Отметим, что $\beta \cdot \ln(1 + x_1) \approx 0,765$, а $\beta \cdot \ln(1 + x_2) \approx 0,827$, и даже $\beta \cdot \ln(1 + x) \approx 0,866$. Как мы видим, множитель, содержащий логарифм, в исследованном интервале давлений действительно изменяется довольно медленно. Это означает, что в принципе можно было пойти и по пути 2: упростить модель, пренебрегая изменением этого множителя (то есть пренебрегая изменением температуры при заданном измерении давления, ссылаясь на медленность ее изменения). В таком подходе мы обошлись бы без предположения о том, что давление в камере равно атмосферному примерно при 0°C . В этом случае, как нетрудно заметить, мы должны были использовать модельную зависимость вида (здесь сразу учтено, что коэффициент при степенном множителе должен расти при росте x)

$$u(p) = \frac{\tilde{u}_0}{(1 - \alpha x)} (1 + x)^{\frac{3}{2}},$$

и тогда подбор по двум точкам дает $\alpha \approx 0,0344$ и $\tilde{u}_0 \approx 12,4$ м/с. В этом случае ответ для скорости истечения в рабочем режиме

$$u(p) = \frac{12,4 \text{ м/с}}{(1 - 0,0344 \cdot x)} (1 + x)^{\frac{3}{2}} \approx 5,365 \text{ км/с}.$$

Как видно, итоговое значение скорости истечения в рабочем режиме изменилось, но не очень существенно (примерно на 7%). Третий путь технически более сложен, но его корректное использование приводит к похожим ответам – в районе $u(p) \approx 6$ км/с.

Для значения давления $p' = 3,75$ МПа $x' \approx 36,13$ и в обеих формулах – более точной (с учетом изменения температуры на поверхности горения) и в более простой (без учета) – в знаменателе появляются отрицательные значения (то есть еще при меньших давлениях знаменатель обращался в ноль), что явно «нефизично» и указывает на то, что мы вышли за пределы применимости обеих моделей, так что ни одну из них использовать для просчета этого режима нельзя.

ОТВЕТЫ: зависимость скорости истечения от давления для этого типа топлива и конструкции двигателя описывается выражением $u(p) \approx \frac{5,55 \text{ м/с}}{(1 - 0,005 \cdot x)[1 - 0,277 \cdot \ln(1 + x)]} (1 + x)^{\frac{3}{2}}$, где $x \equiv \frac{p - p_0}{p_0}$, а $p_0 \approx 101$ кПа. Скорость истечения в рабочем режиме $u \approx 5,0$ км/с. Для анализа работы двигателя в режиме с давлением $p' = 3,75$ МПа на поверхности горения эту модель использовать нельзя.

ЗАДАНИЯ ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНОГО (ФИНАЛЬНОГО) ЭТАПА

ВОЗМОЖНЫЕ РЕШЕНИЯ И КРИТЕРИИ ПРОВЕРКИ

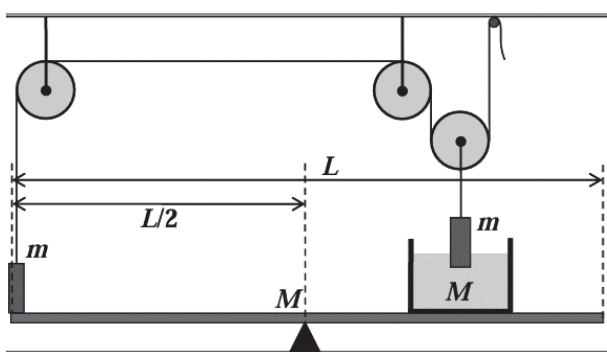
Теоретические вопросы: нет ответа – **0 баллов**, есть неверный ответ с частично правильной терминологией – **1 балл**, есть разумные соображения – **2 балла**, в основном все правильно, но есть заметные неточности или ответ неполон – **3 балла**, правильный ответ с мелкими недочетами или недостаточно обоснованный – **4 балла**, полный, правильный и обоснованный ответ – **5 баллов**.

БИЛЕТ № 07 (7, 8, 9 классы):

Задание 1:

Вопрос: Небольшой груз подвешен на легкой тонкой нити. Во сколько раз изменится сила натяжения этой нити, если груз опустить в сосуд с водой – так, что он целиком окажется под водой, но не будет касаться дна или стенок сосуда? Плотность материала груза в 5 раз больше плотности воды.

Задача: На длинном горизонтальном рычаге с точкой опоры точно посередине уравновешены небольшой груз массы m , поставленный на один из



концов рычага, и сосуд с водой. Масса сосуда (вместе с водой) M равна массе рычага. При этом груз с помощью невесомой нерастяжимой нити и системы легких блоков соединен с таким же грузом, который подвешен так, что немного опущен в воду (см. рисунок). Через специальный зажим плавно выдают нить, увеличивая ее общую длину, и глубина погружения

груза увеличивается, но рычаг остается в равновесии. Найдите отношение масс груза и рычага. На каком расстоянии (в единицах длины рычага) от точки опоры рычага расположен центр дна сосуда?

Ответ на вопрос: В воздухе сила Архимеда, действующая на груз с такой плотностью, пренебрежимо мала, и сила натяжения нити практически равна силе тяжести, то есть $T = mg$. В воде сила натяжения нити равна разности силы тяжести и силы Архимеда, поэтому

$$T' = mg - \rho_{\text{в}} V g = mg \left(1 - \frac{\rho_{\text{в}}}{\rho} \right) = \frac{4}{5} mg \Rightarrow \frac{T}{T'} = 1,25.$$

Значит, сила натяжения нити после опускания такого груза в воду уменьшится в 1,25 раза.

Решение задачи: Заметим, что рычаг сам по себе находится в равновесии, и условием его равновесия является равенство моментов сил, с которыми на рычаг действуют груз, стоящий на его конце (N_1), и сосуд с водой (N_2). Пусть x – расстояние от точки опоры рычага до центра дна сосуда. Тогда $N_1 \cdot L/2 = N_2 \cdot x$.

Груз на конце рычага находится в равновесии, и поэтому сила его взаимодействия с рычагом равна разности сил тяжести и натяжения нити: $N_1 = mg - T$. Аналогично $N_2 = Mg + F_A$, где сила, действующая на сосуд с водой со стороны груза, частично опущенного в воду, равна силе Архимеда, действующей на этот груз со стороны воды. Наконец, равновесие второго груза означает, что $2T = mg - F_A \Rightarrow T = \frac{1}{2}mg - \frac{1}{2}F_A$. Объединяя эти уравнения, получаем условие равновесия рычага в виде

$$\left(\frac{1}{2}mg + \frac{1}{2}F_A\right) \cdot \frac{L}{2} = (Mg + F_A) \cdot x,$$

причем равновесие не нарушается при изменении глубины погружения подвешенного груза (то есть при изменении величины силы Архимеда). Ясно, что это возможно, только если в нашем равенстве независимо равняются друг другу коэффициенты при F_A и слагаемые без F_A . Таким образом:

$$\begin{cases} \frac{1}{4}mg \cdot L = Mg \cdot x \\ \frac{1}{4}F_A \cdot L = F_A \cdot x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{L}{4}, \\ \frac{m}{M} = 1 \end{cases},$$

и все нужные ответы получены.

Ответ: Масса груза равна массе рычага, центр дна сосуда находится на расстоянии $\frac{L}{4}$ от точки опоры.

Критерии для задачи:

№	Действие	Балл
1	указано, что равновесие рычага соответствует равенству моментов сил, с которыми на рычаг действуют груз, стоящий на его конце (N_1), и сосуд с водой (N_2)	2
2	указано, что эти силы определяются из условия равновесия сил, приложенных к грузу и сосуду	2
3	указано, что сила, действующая со стороны подвешенного груза на сосуд с водой, равна силе Архимеда, действующей на этот груз	3
4	указано, что давление груза на рычаг уменьшается за счет силы натяжения нити	1
5	указано, что блок тянет подвешенный груз вверх с силой $2T$	2
6	правильно записано условие равновесия рычага $N_1 \cdot L/2 = N_2 \cdot x$	2
7	правильно записаны уравнения связи сил давления с F_A и T	$2 \times 2 = 4$
8	получен ответ $m = M$	2
9	получен ответ $x = \frac{L}{4}$	2
Всего		20

Задание 2:

Вопрос: Мокрый снег – смесь жидкой воды и ледяных кристаллов, находящихся в равновесии. Чему равна температура мокрого снега при нормальном атмосферном давлении по шкале Цельсия?

Задача: Калориметр наполовину заполнен водой с температурой 59°C . В него засыпают порцию мокрого снега, объем которой равен объему свободного от воды пространства, а потом ожидают наступления теплового равновесия. Так поступают до тех пор, когда очередная порция снега растает не полностью.

Известно, что у используемого снега объемная доля льда составляет 80 %. Сколько порций будет в итоге засыпано в калориметр? На сколько процентов будет заполнен объем калориметра после этого? Теплообменом содержимого калориметра с окружающей средой пренебречь. Плотность льда составляет 90 % от плотности жидкой воды, удельная теплоемкость воды 4,2 Дж/(г·°C), удельная теплота плавления льда 340 Дж/г.

Ответ на вопрос: Одной из реперных точек шкалы Цельсия, отвечающая 0°C, является температура, при которой лед и вода находятся в равновесии при нормальном атмосферном давлении. Это означает, что температура мокрого снега при таком давлении и есть 0°C.

Решение задачи: Пусть V – объем калориметра, а объем воды в термосе после n -досыпаний снега и установления равновесия равен $V_n \equiv x_n \cdot V$. Ясно, что объем досыпаемого в $(n+1)$ -й раз снега равен $\Delta V_n = (1 - x_n) \cdot V$, а его масса $\Delta m_n = (1 - x_n) \cdot [0,8 \cdot 0,9 + 0,2] \rho V = 0,92(1 - x_n) \rho V$. Таким образом, $x_{n+1} = x_n + 0,92 \cdot (1 - x_n) \Rightarrow 1 - x_{n+1} = 0,08 \cdot (1 - x_n)$. Как видно, мы имеем дело с геометрической прогрессией, то есть $(1 - x_n) = (1 - x_0)(0,08)^n = 0,5 \cdot (0,08)^n$, или

$$x_n = 1 - 0,5 \cdot (0,08)^n.$$

Запишем теперь условие установления равновесия после досыпания $(n+1)$ -ой порции снега: лед тает, и вода, полученная из снега, нагревается до конечной температуры – все за счет остывания имевшейся в калориметре воды до конечной температуры:

$$c\rho x_n V(t_n - t_{n+1}) = \lambda \cdot 0,8 \cdot 0,9 \rho V(1 - x_n) + c \cdot (0,8 \cdot 0,9 + 0,2) \rho V \cdot t_{n+1}.$$

Разделив это соотношение на $c\rho V$ и перегруппировав слагаемые, получаем

$$y_{n+1} = \frac{x_n y_n - 0,72(1 - x_n)}{0,92 + 0,08 \cdot x_n}$$

где $y_n \equiv \frac{ct_n}{\lambda}$. По условию $x_0 = 0,5$ и $y_0 = \frac{ct_0}{\lambda} = \frac{1239}{1700} \approx 0,7288$. Как видно из полученных формул, заполнение калориметра с ростом n очень быстро приближается к 100 %, а температура содержимого – к 0°C, так что итераций будет немного. Последней итерацией будет та, на которой в соответствии с полученной формулой $y < 0$ (так как это означает, что запаса теплоты у имевшейся воды не хватает на плавление всего льда и нагрев воды из снега до положительной температуры). Итак:

$$x_1 = 0,96, y_1 \approx 0,0045956.$$

$$x_2 = 0,9968, y_2 < 0.$$

Таким образом, в итоге в калориметр будет засыпано две порции мокрого снега, и после установления равновесия калориметр будет заполнен водой на 99,68 % своего объема.

Ответ: Две порции, на 99,68 % объема.

Примечание: Участники не должны выводить общие рекуррентные формулы. Можно использовать последовательное рассмотрение итераций – ясно, что таким путем тоже можно дойти до правильного ответа за не слишком большое время.

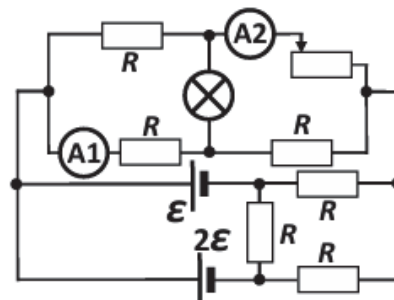
Критерии для задачи:

№	Действие	Балл
1	указано (используется в решении), что после таяния порции досыпанного снега калориметр заполнен не до конца	1
2	указано, что каждый раз в процессе установления равновесия лед тает, и вода, полученная из снега, нагревается до конечной температуры – все за счет остывания имевшейся в калориметре воды до конечной температуры	3×2=6
3	указано, что последней является итерация, на которой запаса теплоты у имевшейся воды не хватает на плавление всего льда и нагрев воды из снега до положительной температуры	3
4	для всех анализируемых итераций правильно вычислена масса добавляемого снега	2
5	правильно определено, как происходит рост занятого объема на 1-ой и второй итерациях	1+2=3
6	правильно определена температура воды после первой итерации	2
7	доказано, что вторая итерация является последней	3
Всего		20

Задание 3:

Вопрос: Реостат подключили к источнику постоянного напряжения через идеальный амперметр. При сопротивлении реостата 2 Ом сила тока через него равнялась 1,1 А, а при сопротивлении 4 Ом – 0,6 А. Найдите внутреннее сопротивление источника.

Задача: Из нескольких одинаковых резисторов, двух аккумуляторов, двух идеальных амперметров и реостата собрали цепь по схеме, изображенной на рисунке. Сопротивление реостата прямо пропорционально координате его движка по размещенной на реостате шкале. Когда движок находился в положении с координатой x , показания амперметров были $I_1 = 5,7$ А и $I_2 = 1,1$ А. Движок переместили в положение с координатой $x' = 3 \cdot x$, и показания А1 изменились – теперь стали $I'_1 = 5,6$ А. Каковы теперь показания А2?



Ответ на вопрос: Сопротивление идеального амперметра равно нулю, поэтому ЭДС источника в первом случае равно $\mathcal{E} = 1,1 \text{ А} \cdot (r + 2 \text{ Ом})$, где r – внутреннее сопротивление источника. Во втором случае $\mathcal{E} = 0,6 \text{ А} \cdot (r + 4 \text{ Ом})$. Вычитая эти уравнения находим, что $0 = 0,5 \text{ А} \cdot r - 0,2 \text{ В}$, из которого ясно, что $r = 0,4 \text{ Ом}$.

Решение задачи: Обозначим силы тока через амперметры I_1 и I_2 , а силы параллельных им токов через резисторы – I_3 и I_4 соответственно. Тогда из непрерывности тока следует, что $I_1 + I_3 = I_2 + I_4$. Сопротивление реостата в первом случае можно записать как $\tilde{R} = \beta R \cdot x$ (где, согласно условию, величина β – некоторая постоянная), и тогда, вычисляя напряжение на концах «мостового» участка схемы двумя способами, получаем:

$$R \cdot I_3 + \beta R x \cdot I_2 = R \cdot I_1 + R \cdot I_4 \Rightarrow I_3 + \beta x \cdot I_2 = I_1 + I_4.$$

Вычитая из этого уравнения уравнение непрерывности, приходим к соотношению

$$(\beta x + 1) \cdot I_2 = 2I_1 \Rightarrow \beta x = \frac{2I_1 - I_2}{I_2} = \frac{103}{11}.$$

Аналогичные вычисления для второго случая дают:

$$\left\{ \begin{array}{l} I'_1 + I'_3 = I'_2 + I'_4 \\ R \cdot I'_3 + 3\beta R x \cdot I'_2 = R \cdot I'_1 + R \cdot I'_4 \end{array} \right\} \Rightarrow (3\beta x + 1) \cdot I'_2 = 2I'_1 \Rightarrow I'_2 = \frac{I'_1 I_2}{3I_1 - I_2} = 0,385 \text{ A}.$$

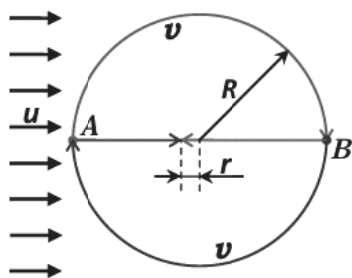
Ответ: $I'_2 = \frac{I'_1 I_2}{3I_1 - I_2} = 0,385 \text{ A}.$

Критерии для задачи:

№	Действие	Балл
1	указано (используется в решении), что соотношение сил токов через амперметры можно найти по уравнениям баланса напряжений в «мостовой» части схемы и уравнения непрерывности токи в ней же	2×4=8
2	в решении явно используется линейность связи сопротивления реостата с положением его движка	2
3	правильно записана система уравнений, позволяющая найти соотношение сил токов через амперметры	3
4	явно и правильно выражен коэффициент пропорциональности линейной связи (βx или эквивалентная величина)	2
5	получена явная связь сил токов, эквивалентная $I'_2 = \frac{I'_1 I_2}{3I_1 - I_2}$	3
6	получен правильный численный ответ	2
Всего		20

Задание 4:

Вопрос: Пловец пересек прямолинейный участок реки шириной 25 м, двигаясь всегда под углом 30° к берегу, а затем вернулся обратно по тому же пути. Какое время он потратил, если скорость течения была равна 2 м/с, а скорость пловца относительно воды – 3 м/с?



Задача: Два вертолета стартовали одновременно с площадок A и B . Каждый из них сначала пролетел половину окружности радиусом $R = 16$ км (долетев точно до второй площадки), а затем возвращался назад по ее диаметру. В этот день ветер дул от A к B со скоростью, которая была в 8 раз меньше скорости движения каждого из вертолетов относительно воздуха. На каком расстоянии от центра окружности произошла встреча вертолетов?

При перемещении пловца со скоростью v относительно воды, движущейся относительно берега со скоростью u , скорость его перемещения относительно берега $\vec{v}' = \vec{v} + \vec{u}$. Чтобы удержаться на заданном курсе относительно берега (под углом α), пловец должен направлять свою скорость под некоторым углом упреждения β к курсу. Если курс таков, что течение «попутное», то

Ответ на вопрос: При перемещении пловца со скоростью v относительно воды, движущейся относительно берега со скоростью u , скорость его перемещения относительно берега $\vec{v}' = \vec{v} + \vec{u}$. Чтобы удержаться на заданном курсе относительно берега (под углом α), пловец должен направлять свою скорость под некоторым углом упреждения β к курсу. Если курс таков, что течение «попутное», то

$$\left\{ \begin{array}{l} v \cdot \sin(\beta) = u \cdot \sin(\alpha) \\ v' = v \cdot \cos(\beta) + u \cdot \cos(\alpha) \end{array} \right\} \Rightarrow v' = \sqrt{v^2 - u^2 \sin^2(\alpha)} + u \cdot \cos(\alpha).$$

Эту величину иногда называют «курсовой скоростью», или скоростью продвижения по заданному курсу относительно берега. Аналогично для «встречного» течения $v' = \sqrt{v^2 - u^2 \sin^2(\alpha)} - u \cdot \cos(\alpha)$. Поэтому время переправы «туда и обратно»

$$t = \frac{D}{\sin(\alpha) \left[\sqrt{v^2 - u^2 \sin^2(\alpha)} + u \cdot \cos(\alpha) \right]} + \frac{D}{\sin(\alpha) \left[\sqrt{v^2 - u^2 \sin^2(\alpha)} - u \cdot \cos(\alpha) \right]} = \frac{2D \sqrt{v^2 - u^2 \sin^2(\alpha)}}{\sin(\alpha)(v^2 - u^2)} \approx 56,6 \text{ с.}$$

Решение задачи: Рассмотрим полет первого вертолета от А до В. Скорость его продвижения по полуокружности все время изменяется из-за изменения угла между направлением движения и направлением ветра. Вычислим время, за которое он пролетает маленький участок этой окружности с угловым размером $\Delta\alpha$, касательная к которому направлена под углом α к линии АВ (см. рисунок). Воспользовавшись выражением для курсовой скорости, находим, что

$$\Delta t_1 = \frac{R \cdot \Delta\alpha}{\sqrt{v^2 - u^2 \sin^2(\alpha)} + u \cdot \cos(\alpha)}.$$

Полное время полета первого вертолета от А до В равно сумме всех таких времен для всех участков полуокружности. Время полета второго вертолета от В до А по своей полуокружности – это сумма выражений вида

$$\Delta t_2 = \frac{R \cdot \Delta\alpha}{\sqrt{v^2 - u^2 \sin^2(\alpha)} - u \cdot \cos(\alpha)}.$$

Ясно, что $t_2 > t_1$, а их разность

$$t_2 - t_1 = \sum \left[\frac{R \cdot \Delta\alpha}{\sqrt{v^2 - u^2 \sin^2(\alpha)} - u \cdot \cos(\alpha)} - \frac{R \cdot \Delta\alpha}{\sqrt{v^2 - u^2 \sin^2(\alpha)} + u \cdot \cos(\alpha)} \right] = \frac{2u}{v^2 - u^2} \sum R \cdot \Delta\alpha \cdot \cos(\alpha).$$

Теперь можно заметить, что последняя сумма есть сумма проекций участков полуокружностей на линию АВ, то есть она равна

$$\sum R \cdot \Delta\alpha \cdot \cos(\alpha) = \sum \Delta l \cdot \cos(\alpha) = |AB| = 2R.$$

Тогда ясно, что

$$t_2 - t_1 = \frac{4uR}{v^2 - u^2}.$$

Если мы вычислим разность времен, которые потратят первый и второй вертолет на полеты по прямой (от В до А и от А до В соответственно), то тут мы обнаружим, что дольше летит (против ветра) первый вертолет, и при этом

$$t'_1 - t'_2 = \frac{2R}{v - u} - \frac{2R}{v + u} = \frac{4uR}{v^2 - u^2}.$$

Таким образом, полный маршрут оба вертолета пролетают за одинаковое время (в конечные пункты они прилетают одновременно). Так как в точке встречи они тоже, естественно, находятся одновременно, то время полета

первого вертолета от точки встречи до А и время полета второго от точки встречи до В равны, то есть

$$\frac{R-r}{v-u} = \frac{R+r}{v+u} \Rightarrow r = \frac{u}{v}R = \frac{1}{8}R = 2 \text{ км.}$$

Ответ: На расстоянии $r = \frac{u}{v}R = \frac{1}{8}R = 2 \text{ км.}$

Критерии для задачи:

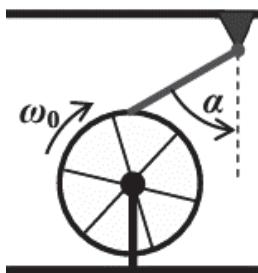
№	Действие	Балл
1	в решении используется правильная формула для курсовой скорости или правильные эквивалентные выражения	2
2	время полета по полуокружности корректно вычисляется как сумма времен прохождения ее малых участков	5
3	в решении указано, что полное время полета вертолетов одинаково	3
4	записаны явные правильные выражения для t_1 и t_2	2
5	правильно вычислена их разность	1+2=3
6	в решении доказано, что полное время полета вертолетов одинаково	2
7	получен аналитический ответ в виде $r = \frac{u}{v}R = \frac{1}{8}R$	2
8	получен правильный численный ответ	1
Всего		20

БИЛЕТ № 06 (10 класс):

Задание 1:

Вопрос: Однородный тонкостенный цилиндр скатывается без проскальзывания с высоты H в поле тяжести g . Найдите скорость его оси в конце скатывания.

Задача: Вертикальное колесо с тонкостенным ободом массой M (масса спиц и втулки колеса пренебрежимо мала) и радиусом R может вращаться без трения вокруг закрепленной горизонтальной оси, проходящей через его центр. Его раскрутили до угловой скорости ω_0 в направлении, показанном на рисунке, а затем аккуратно опустили на него конец стержня массой m , подвешенного шарнирно за другой конец. Стержень опирается на верхнюю точку обода, трения в шарнире нет, и в этом положении стержень составляет угол $\alpha = 60^\circ$ с вертикалью. Колесо совершило ровно 160 оборотов до полной остановки. Затем опыт повторили, но на этот раз колесо раскрутили до той же угловой скорости в противоположном направлении. Сколько оборотов оно совершит до полной остановки на этот раз? Сопротивлением воздуха пренебречь. Коэффициент трения между концом стержня и поверхностью обода $\mu = \frac{1}{\sqrt{3}}$.



Ответ на вопрос: При скатывании без проскальзывания работа силы трения равна нулю, и убыль потенциальной энергии цилиндра в поле тяжести равна его приобретенной кинетической энергии. По теореме Кенига кинетическая энергия цилиндра складывается из энергий поступательного и вращательного движений.

В отсутствие проскальзывания скорость движения оси цилиндра радиуса R относительно поверхности связана с угловой скоростью его вращения вокруг оси симметрии, проходящей через центр масс, соотношением $v = \omega \cdot R$. В тонкостенном цилиндре все его массивные элементы находятся на расстоянии R от оси вращения, и во вращательном движении имеют точно такие же скорости, как и в поступательном. Поэтому учет энергии вращения у такого цилиндра сводится к удвоению кинетической энергии. Следовательно:

$$mgH = 2 \cdot \frac{mv^2}{2} = mv^2 \Rightarrow v = \sqrt{gH}.$$

Решение задачи: Вращение колеса тормозится силой трения со стороны стержня. Сам стержень при этом находится в равновесии под действием силы тяжести, силы реакции шарнира, силы нормальной реакции колеса и «ответной» силы трения. Последняя до самой остановки является силой трения скольжения, и ее величина равна μN . Обозначим длину стержня L , и для первого опыта запишем для него условие равновесия моментов сил относительно оси шарнира:

$$mg \frac{L}{2} \sin(\alpha) - NL \cdot \sin(\alpha) + \mu NL \cdot \cos(\alpha) = 0 \Rightarrow F_{mp} = \frac{\mu mg}{2} \frac{\operatorname{tg}(\alpha)}{\operatorname{tg}(\alpha) - \mu}.$$

Колесо остановится, когда работа этой силы заберет у колеса с массой M всю его кинетическую энергию, то есть

$$F_{mp} \cdot 2\pi R \cdot n_1 = \frac{MR^2}{2} \omega_0^2 \Rightarrow n_1 = \frac{MR\omega_0^2}{2\pi\mu mg} \frac{\operatorname{tg}(\alpha) - \mu}{\operatorname{tg}(\alpha)}.$$

Во втором опыте (при изменении направления начального вращения) направления сил трения между колесом и стержнем изменяются на противоположные, и в этих уравнениях изменяется только знак слагаемого с μ . Поэтому в этом случае число оборотов колеса до остановки

$$n_2 = \frac{MR\omega_0^2}{2\pi\mu mg} \frac{\operatorname{tg}(\alpha) + \mu}{\operatorname{tg}(\alpha)} = \frac{\operatorname{tg}(\alpha) + \mu}{\operatorname{tg}(\alpha) - \mu} n_1 = 320.$$

Ответ: Во втором опыте колесо совершит $n_2 = \frac{\operatorname{tg}(\alpha) + \mu}{\operatorname{tg}(\alpha) - \mu} n_1 = 320$ оборотов.

Критерии для задачи:

№	Действие	Балл
1	указано, что колесо тормозится силой трения о стержень	1
2	указано, что вплоть до остановки это сила трения скольжения	1
3	используются правильные условия равновесия стержня	3
4	правильно описан процесс торможения (записано правильное уравнение ЗСЭ или правильный закон равнозамедленного вращательного движения колеса)	3
5	правильно описаны различия в условиях остановки при разном направлении вращения	2
6	правильно найдена величина силы трения стержня и колеса (через массу, коэффициент трения и угол)	3
7	получено правильное выражение для числа оборотов до остановки в обоих опытах	2×2=4
8	получен правильный аналитический ответ	2
9	получен правильный численный ответ	1
Всего		20

Задание 2:

Вопрос: Постоянное количество гелия сначала участвует в изохорном процессе 1-2, в котором его давление увеличивается на 10% от давления в точке 2, а затем в изотермическом процессе 2-3, в котором давление уменьшается ровно на ту же величину. В процессе 1-2 к газу подводится количество теплоты $Q_{12} = 333$ Дж. Какое количество теплоты подводится к газу в процессе 2-3?

Задача: Допустим, что у нас есть серия тепловых машин, работающих по циклу, состоящему из двух изохор и двух изотерм (рабочее вещество у всех этих машин – один и тот же идеальный газ). Отметим, что у всех машин серии одинаково отношение количества теплоты, подводимого в процессе изохорного нагревания, к работе за цикл. У одной из машин, у которой максимальная температура в цикле в $n_1 = 1,5$ раза больше минимальной, КПД цикла равно 20%. У другой машины это отношение равно $n_2 = 1,8$. Найдите КПД ее цикла.

Ответ на вопрос: При изохорном нагревании работа не совершается, и подводимое тепло равно увеличению внутренней энергии. Поскольку гелий можно считать одноатомным идеальным газом, то $Q_{12} = \frac{3}{2}(p_2V_2 - p_1V_1) = \frac{3}{20}p_2V_1$, или $p_2V_1 = \frac{20}{3}Q_{12}$. В изотермическом процессе внутренняя энергия гелия не изменяется, и подведенное тепло равно работе, которая может быть найдена как площадь криволинейной трапеции. Объем в этом процессе увеличивается во столько же раз (10/9), во сколько уменьшается давление и, если, учитывая относительную малость изменений, приблизить площадь криволинейной трапеции площадью обычной трапеции, то

$$Q_{23} \approx \frac{p_2 + 0,9p_2}{2} \left(\frac{10}{9}V_1 - V_1 \right) = \frac{19}{180}p_2V_1 = \frac{19}{27}Q_{12} \approx 234 \text{ Дж.}$$

Примечание: Можно было использовать формулу для вычисления работы в изотермическом процессе, но тогда ответ получается в форме

$$Q_{23} = p_2V_1 \cdot \ln\left(\frac{V_3}{V_1}\right) = \frac{20}{3}Q_{12} \cdot \ln\left(\frac{10}{9}\right),$$

и аналогичную точность вычисления без калькулятора здесь обеспечить сложнее: например, если воспользоваться приближенной формулой $\ln\left(1 + \frac{1}{9}\right) \approx \frac{1}{9}$, то получится $Q_{23} \approx 247$ Дж. Точное значение $Q_{23} = \frac{20}{3}Q_{12} \cdot \ln\left(\frac{10}{9}\right) \approx 233,9$ Дж. Поэтому ответ с логарифмом без вычисления или с «грубой» его оценкой (с ошибкой более 3%) оценивался в 4 балла.

Решение задачи: В описанном цикле теплота подводится к рабочему телу в процессах изохорного нагревания (будем его считать процессом 12) и изотермического расширения (процесс 23). Значит, количество теплоты нагревателя $Q_H = Q_{12} + Q_{23}$. Заметим, что по условию Q_{12} для всех машин связан с полной работой в цикле: $Q_{12} = k \cdot A$, где k – неизвестная константа. С другой стороны, работа в этом цикле совершается только в изотермических процессах, и A равно разности количеств тепла, подведенного в изотермическом расширении и отведенного в изотермическом сжатии. Но работа (и количество тепла) в изотермическом процессе прямо пропорциональна абсолютной температуре, и поэтому $A = Q_{23} + Q_{41} = Q_{23} \left(1 - \frac{1}{n}\right)$, где n – отношение

максимальной и минимальной температур. Таким образом, величина, обратная КПД

$$\eta^{-1} = \frac{Q_H}{A} = \frac{Q_{12}}{A} + \frac{Q_{23}}{A} = k + \frac{n}{n-1}.$$

Подставляя в эту формулу известное значение, находим, что $5 = k + 3$, то есть $k = 2$. Следовательно, для всех машин нашей серии $\eta = \frac{n-1}{3n-2}$. В частности, при $n_2 = 1,8$ получаем $\eta_2 = \frac{4}{17} \approx 23,5 \%$.

Ответ: $\eta_2 = \frac{n_2-1}{3n_2-2} = \frac{4}{17} \approx 23,5 \%$.

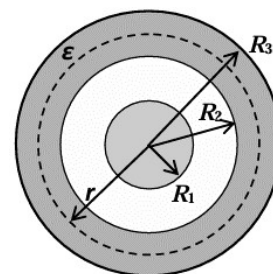
Критерии для задачи:

№	Действие	Балл
1	указана (используется в решении) правильная классификация процессов в цикле по направлению теплообмена рабочего тела с окружающими телами	2
2	указано, что работа совершается только в изотермических процессах	2
3	используется правильная связь КПД цикла с двумя из трех величин Q_H , Q_X или A	2
4	КПД ищется в виде функции от отношения температур n с неизвестной константой	2
5	константа в зависимости КПД от n определяется по известному значению КПД	2
6	в решении использована связь $Q_{12} = k \cdot A$	2
7	получена правильная связь Q_{23} с A и n	3
8	получено правильное выражение для КПД через n	3
9	получен правильный численный ответ	2
Всего		20

Задание 3:

Вопрос: На металлическую сферу радиусом R нанесен заряд $+q$, а на сферу радиусом $2R$ – заряд $-q$. Пространство между сферами заполнено диэлектриком с диэлектрической проницаемостью ϵ . Чему равен потенциал (относительно бесконечности) точки, находящейся на расстоянии $3R/2$ от общего центра сфер?

Задача: Металлический шар радиусом $R_1 = 20$ см зарядили с помощью источника с ЭДС 120 В (включив источник между «землей» и шаром). Затем его окружили слоем диэлектрика с проницаемостью $\epsilon = 4$, внутренний радиус которого был равен $R_2 = 40$ см, а внешний – $R_3 = 60$ см. Какую минимальную работу нужно совершить, чтобы удалить диэлектрик из области между $r = 50$ см и R_3 на большое расстояние от шара? Считайте, что работа по разделению этого слоя на мелкие «кусочки» пренебрежимо мала по сравнению с работой по перемещению этих кусочков на большое расстояние.



Ответ на вопрос: Вне большей сферы напряженность поля равна нулю (это сферически-симметричное поле нулевого заряда). Поэтому ее потенциал равен потенциалу бесконечности, то есть нулю в предложенной калибровке. Поле между сферами создается зарядом внутренней сферы, и оно совпадает с полем

точечного заряда $+q$ в однородном диэлектрике. Значит, его потенциал может отличаться от потенциала точечного заряда в однородном диэлектрике только на постоянную величину: $\varphi(r) = C + \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon r}$ при $R \leq r \leq 2R$. С учетом того, что $\varphi(2R) = C + \frac{q}{8\pi\epsilon_0\epsilon R} = 0$, находим $C = -\frac{q}{8\pi\epsilon_0\epsilon R}$. В итоге получаем, что $\varphi(3R/2) = \frac{q}{6\pi\epsilon_0\epsilon R} - \frac{q}{8\pi\epsilon_0\epsilon R} = +\frac{q}{24\pi\epsilon_0\epsilon R}$.

Решение задачи: На базе рассуждений, использованных в ответе на вопрос, мы можем получить и формулу емкости произвольного сферического конденсатора с радиусами обкладок a и b , пространство между которыми заполнено диэлектриком. В самом деле, потенциал внешней обкладки относительно бесконечности равен нулю, и напряжение на конденсаторе равно потенциалу внутренней обкладки $U = \varphi(a) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon a} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon b} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \frac{b-a}{ab}$. Тогда емкость такого конденсатора $C = 4\pi\epsilon_0\epsilon \frac{ab}{b-a}$, и его энергия

$$W_C = \frac{q^2}{2C} = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0\epsilon} \frac{b-a}{ab}.$$

Теперь получим выражение для энергии поля системы из заряженного металлического шара с зарядом Q и слоя диэлектрика. Для этого мысленно вставим на радиусах R_1 и R_2 пары бесконечно тонких и близких сфер с противоположными зарядами $-Q$ и $+Q$. Поскольку мы вставили всюду нулевые заряды, поле не поменялось. Но теперь эту систему можно считать системой трех сферических конденсаторов – образованных шаром и внутренним «вставленным» слоем, вторым и третьим «вставленными» слоями, а также четвертым слоем и бесконечностью. Таким образом,

$$W = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0} \frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2} + \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0\epsilon} \frac{R_3 - R_2}{R_2 R_3} + \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0} \frac{1}{R_3} = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0\epsilon} \left[\frac{\epsilon}{R_1} - (\epsilon - 1) \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_3} \right) \right].$$

Теперь ясно, что минимальная возможная работа по удалению диэлектрика в рамках установленных в условиях приближений равна разности энергий конечной и начальной конфигураций. Поскольку

$$W = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0\epsilon} \left[\frac{\epsilon}{R_1} - (\epsilon - 1) \left(\frac{1}{2R_1} - \frac{1}{3R_1} \right) \right] = \frac{(5\epsilon + 1)Q^2}{48\pi\epsilon_0\epsilon R_1}.$$

и

$$W' = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0\epsilon} \left[\frac{\epsilon}{R_1} - (\epsilon - 1) \left(\frac{1}{2R_1} - \frac{2}{5R_1} \right) \right] = \frac{(9\epsilon + 1)Q^2}{80\pi\epsilon_0\epsilon R_1}.$$

то

$$A_{min} = W' - W = \frac{(\epsilon - 1)Q^2}{120\pi\epsilon_0\epsilon R_1} = \frac{Q^2}{160\pi\epsilon_0 R_1}.$$

Остается заметить, что заряд шара, заряженного от источника с заданной ЭДС $Q = 4\pi\epsilon_0 R_1 \mathcal{E}$. Поэтому $A_{min} = \frac{1}{10} \pi\epsilon_0 R_1 \mathcal{E}^2$.

Если принять, что $4\pi\epsilon_0 = \frac{1}{9} \cdot 10^{-9}$ Кл²·с/(кг·м³), то можно получить численный ответ $A_{min} = 8$ нДж.

Ответ: $A_{min} = \frac{1}{10} \pi \varepsilon_0 R_1 \mathcal{E}^2$, или $A_{min} = 8$ нДж, или другое правильное аналитическое выражение.

Критерии для задачи:

№	Действие	Балл
1	в решении используется правильный способ расчета энергии сферической системы зарядов и слоев диэлектрика (как системы сферических конденсаторов или через энергии самодействия и взаимодействия тел, или через интегрирование плотности энергии)	4
2	минимальная работа вычисляется как разность энергий конечной и начальной конфигураций	3
3	записана (используется в решении) правильная связь заряда шара и ЭДС источника	3
4	получено правильное выражение (через величины радиусов или один радиус и их соотношения, заряд шара или ЭДС источника) для энергии начальной конфигурации	4
5	получено правильное выражение (через величины радиусов или один радиус и их соотношения, заряд шара или ЭДС источника) для энергии конечной конфигурации	4
6	записан правильный аналитический ответ через те же величины или правильный численный ответ	2
Всего		20

Задание 4:

Вопрос: Определим поперечное увеличение для линз как отношение поперечных по отношению к ГОО (главной оптической оси линзы) размеров изображения и предмета, взятое со знаком «+», если изображение является прямым, и со знаком «-», если перевернутым. Можно ли в этом случае по значению поперечного увеличения определить тип линзы?

Задача: При изучении изображения светящегося шарика диаметром 2 мм, полученного с помощью тонкой линзы, было обнаружено, что расстояние между центрами шарика и изображения равно $L = 85$ см, причем соединяющий их отрезок не пересекает плоскости линзы и наклонен к ГОО линзы под углом $\alpha = \arcsin\left(\frac{13}{85}\right) \approx 8,8^\circ$, а максимальный поперечный размер изображения равен 1,2 мм. Определите тип линзы (собирающая или рассеивающая) и найдите величину ее фокусного расстояния.

Ответ на вопрос: Как легко понять из построения, изображения светящихся предметов (точки которых являются действительными источниками) в рассеивающих линзах всегда прямые и уменьшенные, и для рассеивающих линз введенная алгебраическая величина поперечного увеличения Γ изменяется от 0 до +1 (+1 соответствует предмету, «прижатому» к линзе). У собирающих линз прямыми бывают только мнимые изображения предметов, и они всегда увеличенные $\Gamma > +1$ (за исключением случая прижатого предмета, когда $\Gamma = +1$). Действительные изображения предметов в собирающих линзах всегда перевернутые, и для них $\Gamma < 0$. Таким образом, по этой величине почти всегда можно определить тип линзы: $\Gamma < 0$ и $\Gamma > +1$ отвечают собирающим линзам

(отметим, что сюда формально входят случаи $\Gamma = \pm\infty$, отвечающие приближению предмета к фокальной плоскости линзы, хотя наблюдать изображение в этих случаях невозможно), а $0 < \Gamma < +1$ отвечают рассеивающим линзам. Единственно исключение – это значение $\Gamma = +1$, когда предмет прижат к линзе и она фактически «не работает».

Решение задачи: Как видно из условия, изображение является мнимым (действительный источник и его изображение находятся по одну сторону от линзы) и уменьшенным, а такая комбинация возможна только у рассеивающей линзы. Таким образом, у нас именно рассеивающая линза. Если обозначить a и b расстояния от центра шарика и центра изображения до плоскости линзы, то, в соответствии с данными задачи,

$$\left\{ \begin{array}{l} a - b = L \cdot \cos(\alpha) = \frac{84}{85}L \\ \frac{a}{b} = \frac{h}{h'} = \frac{5}{3} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = \frac{h}{h - h'} L \cdot \cos(\alpha) = \frac{42}{17}L \\ b = \frac{h'}{h - h'} L \cdot \cos(\alpha) = \frac{126}{85}L \end{array} \right.$$

Отметим, что заданный угол достаточно мал, и луч, идущий вдоль прямой, соединяющей центр шарика с центром изображения, можно считать параксиальным, и поэтому мы считаем, что он проходит через оптический центр линзы, и действует характерная для тонких линз связь поперечного увеличения с расстояниями до источника и изображения (второе уравнение). В соответствии с формулой линзы ее оптическая сила

$$D \approx \frac{1}{a} - \frac{1}{b} = -\frac{(h - h')^2}{hh'L \cdot \cos(\alpha)} = -\frac{17}{63L}.$$

Следовательно, величина фокусного расстояния нашей линзы

$$|F| \approx \frac{hh'L \cdot \cos(\alpha)}{(h - h')^2} = \frac{63}{17}L = 315 \text{ см.}$$

Ответ: Это рассеивающая линза, величина фокусного расстояния $|F| \approx \frac{hh'L \cdot \cos(\alpha)}{(h - h')^2} = \frac{63}{17}L = 315 \text{ см.}$

Критерии для задачи:

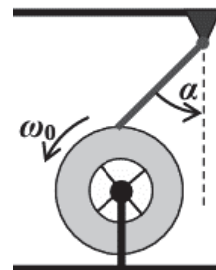
№	Действие	Балл
1	явно указано, что наблюдаемое изображение является мнимым (2 балла) и уменьшенным	2×2=4
2	сделан вывод, что линза является рассеивающей	5
3	явно указано на значение малости угла α	1
4	правильно записано уравнение для расстояний от центра шарика и центра изображения до плоскости линзы (если без проецирования на направление оптической оси – 1 балл)	2
5	правильно записано уравнение для связи отношения этих расстояний с отношением поперечных размеров (если в решении нет различия между расстояниями вдоль соединяющей прямой и расстояниями вдоль оптической оси – 2 балла)	3
6	правильно используется формула линзы для нахождения оптической силы или фокусного расстояния	2
7	получен правильный аналитический ответ через данные задачи	2
8	получен правильный численный ответ	1
Всего		20

БИЛЕТ № 04 (11 класс): возможные решения и критерии проверки

Задание 1:

Вопрос: Однородный цилиндр скатывается без проскальзывания с высоты H в поле тяжести g . Найдите скорость его оси в конце скатывания.

Задача: Вертикальное однородное колесо – полый цилиндр массой M с внешним радиусом R и внутренним $R/2$ (масса спиц и втулки пренебрежимо малы) – может вращаться без трения вокруг закрепленной горизонтальной оси, проходящей через его центр. Его раскрутили до угловой скорости ω_0 в направлении, показанном на рисунке, а затем аккуратно опустили на него конец стержня массой m , подвешенного шарнирно за другой конец. Стержень опирается на верхнюю точку диска, трения в шарнире нет, и в этом положении стержень составляет угол $\alpha = 45^\circ$ с вертикалью. Диск совершил ровно 65 оборотов до полной остановки. Затем опыт повторили, но на этот раз диск раскрутили до той же угловой скорости в противоположном направлении. Сколько оборотов совершит до полной остановки диск на этот раз? Сопротивлением воздуха пренебречь. Коэффициент трения между концом стержня и боковой поверхностью диска $\mu = 0,3$.



Ответ на вопрос: При скатывании без проскальзывания работа силы трения равна нулю, и убыль потенциальной энергии цилиндра в поле тяжести равна его приобретенной кинетической энергии. По теореме Кенига кинетическая энергия цилиндра складывается из энергий поступательного и вращательного движений. В отсутствие проскальзывания скорость движения оси цилиндра радиуса R относительно поверхности связана с угловой скоростью его вращения вокруг оси симметрии, проходящей через центр масс, соотношением $v = \omega \cdot R$. Следовательно:

$$mgH = \frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2} = \frac{3}{4}mv^2 \Rightarrow v = 2\sqrt{\frac{gH}{3}}.$$

Здесь учтено, что момент инерции однородного цилиндра $I = \frac{1}{2}mR^2$.

Решение задачи: Вращение колеса тормозится силой трения со стороны стержня. Сам стержень при этом находится в равновесии под действием силы тяжести, силы реакции шарнира, силы нормальной реакции колеса и «ответной» силы трения. Последняя до самой остановки является силой трения скольжения, и ее величина равна μN . Обозначим длину стержня L , и для первого опыта запишем для него условие равновесия моментов сил относительно оси шарнира:

$$mg\frac{L}{2}\sin(\alpha) - NL \cdot \sin(\alpha) - \mu NL \cdot \cos(\alpha) = 0 \Rightarrow F_{mp} = \frac{\mu mg}{2} \frac{\operatorname{tg}(\alpha)}{\operatorname{tg}(\alpha) + \mu}.$$

Колесо остановится, когда работа этой силы заберет у колеса всю его кинетическую энергию, то есть

$$F_{mp} \cdot 2\pi R \cdot n_1 = \frac{I}{2}\omega_0^2 \Rightarrow n_1 = \frac{I\omega_0^2}{2\pi\mu mgR} \frac{\operatorname{tg}(\alpha) + \mu}{\operatorname{tg}(\alpha)}.$$

Здесь I – момент инерции колеса относительно оси симметрии. Во втором опыте (при изменении направления начального вращения) направления сил

трения между колесом и стержнем изменяются на противоположные, и в этих уравнениях изменяется только знак слагаемого с μ . Поэтому в этом случае число оборотов колеса до остановки

$$n_2 = \frac{I\omega_0^2}{2\pi\mu mgR} \frac{\operatorname{tg}(\alpha) - \mu}{\operatorname{tg}(\alpha)} = \frac{\operatorname{tg}(\alpha) - \mu}{\operatorname{tg}(\alpha) + \mu} n_1 = 35.$$

Ответ: Во втором опыте колесо совершит $n_2 = \frac{\operatorname{tg}(\alpha) - \mu}{\operatorname{tg}(\alpha) + \mu} n_1 = 35$ оборотов.

Критерии для задачи:

№	Действие	Балл
1	указано, что колесо тормозится силой трения о стержень	1
2	указано, что вплоть до остановки это сила трения скольжения	1
3	используются правильные условия равновесия стержня	3
4	правильно описан процесс торможения (записано правильное уравнение ЗСЭ или правильный закон равнозамедленного вращательного движения колеса)	3
5	правильно описаны различия в условиях остановки при разном направлении вращения	2
6	правильно найдена величина силы трения стержня и колеса (через массу, коэффициент трения и угол)	3
7	получено правильное выражение для числа оборотов до остановки в обоих опытах	2×2=4
8	получен правильный аналитический ответ	2
9	получен правильный численный ответ	1
Всего		20

Задание 2:

Вопрос: Тонкий стеклянный капилляр опустили в вертикальном положении одним концом в широкий резервуар с жидкостью, почти идеально смачивающей стекло. Уровень жидкости в капилляре оказался на 4 мм выше, чем в остальной части резервуара. Потом точно такой же капилляр (и тоже вертикально) опустили в другой широкий резервуар, в котором находилась жидкость, практически полностью не смачивающая стекло. Коэффициент поверхностного натяжения у этой жидкости в 4 раза больше, чем у первой, а плотность в 8 раз больше. Что будет с уровнем жидкости в капилляре на этот раз?

Задача: Две вертикальные стеклянные пластины, составляющие малый двугранный угол α , опущены в широкий резервуар с полностью смачивающую их жидкостью. Плотность жидкости ρ , коэффициент поверхностного натяжения σ . Найдите высоту подъема жидкости между пластинами над уровнем в резервуаре в зависимости от расстояния x от ребра двугранного угла. Считайте, что $x \gg \sqrt{\frac{2\sigma}{\rho g}}$, но много меньше размеров пластин, и при этом сечение поверхности жидкости плоскостью, перпендикулярной биссектрисе двугранного угла, имеет форму дуги окружности.

Ответ на вопрос: В тонкой трубке («капилляре»), действие сил поверхностного натяжения приводит к смещению поверхности жидкости в капилляре по отношению к уровню ее в широкой части сосуда. Высоту подъема

жидкости в капилляре можно найти из условия равновесия столба жидкости в капилляре. Например, для капилляра с сечением в виде круга радиуса r :

$$\sigma \cdot 2\pi r \cos \theta = mg = \rho \pi r^2 h g \Rightarrow h = \frac{2\sigma \cos \theta}{\rho g r}.$$

В первом случае $\theta \approx 0$, и $h = +\frac{2\sigma}{\rho g r}$. Во втором $\theta \approx \pi$, и теперь $h' = -\frac{8\sigma}{8\rho g r} = -\frac{h}{2}$. Таким образом, во втором резервуаре уровень жидкости в капилляре будет на 2 мм ниже, чем в остальной части резервуара.

Решение задачи: Пусть $y(x)$ – профиль «средней линии» поверхности жидкости в «клиновидном» промежутке между пластинами. Так как угол при вершине клина мал, то радиус кривизны этой линии на расстоянии x от ребра двугранного угла значительно больше радиуса кривизны в поперечном сечении, который примерно равен половине расстояния между пластинами (угол смачивания считаем равным нулю, и в соответствии с условием этом сечении профиль поверхности жидкости – половина окружности): $r_{\perp} \approx x \cdot \operatorname{tg}(\alpha/2) \approx \alpha x/2$. Следовательно, лапласовское давление

$$p_{\text{л}}(x) = -\rho g \cdot y(x) = -\sigma \left[\frac{1}{r_{\perp}} + \frac{1}{r_{\parallel}} \right] \approx -\frac{\sigma}{r_{\perp}} \approx -\frac{2\sigma}{\alpha} \frac{1}{x} \Rightarrow y(x) \approx \frac{2\sigma}{\alpha \rho g} \frac{1}{x}.$$

Таким образом, средняя линия поверхности жидкости в узком клиновидном зазоре близка к гиперболе. Важно понимать, что использованное нами приближение $r_{\perp} \ll r_{\parallel}$ означает, что полученная формула справедлива при $y \ll x$, то есть при $x \gg \sqrt{\frac{2\sigma}{\alpha \rho g}}$.

Ответ: Зависимость высоты подъема жидкости между пластинами над уровнем в резервуаре y в зависимости от расстояния x от ребра двугранного угла $y(x) \approx \frac{2\sigma}{\alpha \rho g} \frac{1}{x}$ при $x \gg \sqrt{\frac{2\sigma}{\alpha \rho g}}$.

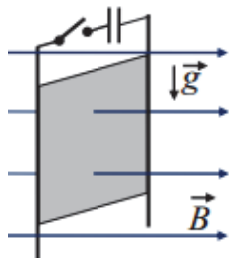
Критерии для задачи:

№	действие	балл
1	явно указано, что угол смачивания равен нулю	1
2	явно указано, что сечение поверхности жидкости плоскостью, перпендикулярной биссектрисе угла - полуокружность	3
3	явно указано, что $r_{\perp} \ll r_{\parallel}$	3
4	правильно записано условие баланса давлений под поверхностью жидкости	3
5	правильно найден радиус кривизны поверхности жидкости	2
6	использовано правильное выражение для лапласовского давления	3
7	получено правильное уравнение зависимости $y(x)$	5
Всего		20

Задание 3:

Вопрос: К двум точкам металлического кольца радиуса R , находящегося в перпендикулярном его плоскости однородном магнитном поле с постоянной скоростью изменения модуля индукции β , подключили идеальный вольтметр. Каковы его показания?

Задача: Квадратная «заслонка» размером $l \times l$ с толщиной d изготовлена из материала с удельным сопротивлением ρ и плотностью τ . Она может



скользить без трения по вертикальным направляющим (см. рисунок). Для регулировки величины ускорения заслонки в области ее движения создали горизонтальное магнитное поле с индукцией \vec{B} , перпендикулярное поверхности заслонки, а направляющие сверху соединили, используя ключ и конденсатор. Изначально заслонку удерживают, ключ разомкнут. Заслонку отпускают одновременно с замыканием

ключа. Параметры и начальное состояние системы подобраны таким образом, чтобы ток зарядки конденсатора после этого был постоянен и равным $I = \frac{\tau l d}{2B} g$,

где g – ускорение свободного падения. Определите емкость конденсатора и найдите закон движения заслонки. Сопротивление направляющих и используемых проводов, а также сопротивление контактов ключа намного меньше сопротивления заслонки, ЭДС самоиндукции пренебречь.

Ответ на вопрос: С учетом симметрии системы понятно, что в квазистационарном приближении кольцо можно рассматривать как контур, в котором ЭДС в каждой из двух его частей (по разные стороны от вольтметра) пропорционально длине соответствующего участка кольца. Сила тока в этом контуре равна полной ЭДС, поделенной на полное сопротивление. Поскольку сопротивление каждого из участков тоже пропорционально их длинам, то, в соответствии с законом Ома для участка цепи с ЭДС $U_1 = \mathcal{E}_1 - I r_1 = \mathcal{E}_1 - \frac{\mathcal{E}}{r} r_1 = 0$. Итак, вольтметр покажет нулевое напряжение.

Решение задачи: При замкнутом ключе и движении заслонки будет изменяться площадь контура, содержащего конденсатор и заслонку, что приведет к изменению магнитного потока и появлению в контуре ЭДС индукции

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt} = -Bl \frac{dx}{dt} = -Blv. \text{ Здесь ось } x \text{ направлена вниз, а } v \text{ – скорость падения}$$

заслонки. Будем далее считать «положительным» заряд q конденсатора, создаваемый индукционным током. Тогда ток зарядки конденсатора

$$I = \frac{dq}{dt} = \frac{\mathcal{E}_i - U_C}{R} = \frac{Blv}{R} - \frac{q}{CR} \text{ (ясно, что в отсутствие ЭДС индукции заряженный}$$

конденсатор будет разряжаться). Как видно из условия, сопротивление контура

можно считать равным сопротивлению заслонки $R \approx \rho \frac{l}{ld} = \frac{\rho}{d}$. Поэтому

$$\frac{dq}{dt} = \frac{Bld}{\rho} v - \frac{d}{\rho C} q. \text{ Исходя из правила Ленца ясно, что сила Ампера, действующая}$$

на индукционные токи, текущие через заслонку, должна тормозить ее движение. Кроме того, малость сопротивления направляющих позволяет считать, что ток I распределен в заслонке равномерно по высоте, и $F_{Ax} = -IBl$. Уравнение

$$\text{движения заслонки } m \frac{dv}{dt} = mg - IBl \text{ с учетом того, что ее масса } m = \tau l^2 d,$$

приводится к виду $\frac{dv}{dt} = g - \frac{B}{\tau d} \frac{dq}{dt}$. Согласно условию, от самого начала

движения заслонка (которая до этого покоилась) движется с постоянным ускорением, и из этого уравнения находим, что $\frac{dv}{dt} = g - \frac{B}{\tau l d} I = \frac{g}{2}$, то есть $v(t) = \frac{g}{2}t$. Соответствующий закон движения заслонки $x(t) = \frac{g}{4}t^2$. Кроме того, по значению силы тока находим, что $q(t) = q_0 + It = q_0 + \frac{\tau l d g}{2B}t$. При подстановке законов изменения скорости заслонки и заряда конденсатора в уравнение для силы тока в цепи должно получаться тождество, то есть для любого момента времени

$$\frac{\tau l d g}{2B} = \frac{B l d g}{2\rho}t - \frac{d}{\rho C} \left(q_0 + \frac{\tau l d g}{2B}t \right) \Rightarrow \begin{cases} q_0 = -\frac{\rho \tau l C g}{2B} \\ C = \frac{d\tau}{B^2} \end{cases}.$$

Как видно, необходимым условием существования указанного в условии режима движения заслонки являются наличие у конденсатора начального заряда

$$q_0 = -\frac{\rho l d g \tau^2}{2B^3},$$

который должен быть противоположен по знаку тому, что создает индукционный ток. Отметим, что нахождение этого заряда не было необходимым для получения ответа, однако его нахождение фактически является проверкой корректности условия. Кроме того, мы находим связь емкости конденсатора с другими параметрами системы $C = \frac{d\tau}{B^2}$.

Ответ: $C = \frac{d\tau}{B^2}$, $x(t) = \frac{g}{4}t^2$., условие корректно, если в начальном состоянии заряд конденсатора противоположен по знаку тому, что создает индукционный ток и равен $q_0 = -\frac{\rho l d g \tau^2}{2B^3}$.

Критерии для задачи:

№	Действие	Балл
1	правильно понята роль ЭДС индукции (используется правильный знак в уравнении для силы тока)	1
2	понята возможность (и даже необходимость) необходимость наличия у конденсатора начального заряда	2
3	в уравнении движения использован правильный знак у силы Ампера	1
4	явно используется (подставляется в уравнения) заданная в условии величина силы тока	2
5	в полученном тождестве независимо приравниваются коэффициенты при нулевой и первой степени t	3
6	правильно записано выражение для ЭДС индукции	1
7	получено правильное уравнение для силы тока в цепи	2
8	записано правильное выражение для силы Ампера через ток в цепи	1
9	правильно записан закон изменения заряда конденсатора	2
10	получена правильная формула для емкости конденсатора	3
11	получен правильный закон движения заслонки	2
Всего		20

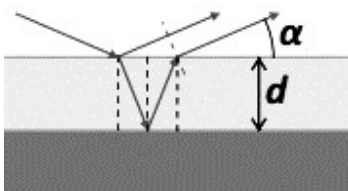
Задание 4:

Вопрос: На экран падают две монохроматические световые волны. Опишите условия, обеспечивающие в некоторой точке этого экрана наблюдение минимума интерференционной картины.

Задача: Широкий резервуар с водой, установленный в лаборатории, покоится, и волн на поверхности воды нет. При этом на поверхности есть масляная пленка, которую освещают рассеянным светом с длиной волны $\lambda = 500$ нм. Интенсивность отраженного света измеряется фотодатчиком, ось входного окуляра которого направлена под углом 60° к нормали к поверхности воды. Известно, что масло прозрачное, и его показатель преломления равен $n = 1,5$. Наблюдения показали, что в течение некоторого времени интенсивность изменяется периодически, причем период почти точно равен $T = 15$ минут. Определите скорость испарения (то есть скорость уменьшения толщины) масляной пленки.

Ответ на вопрос: Во-первых, для создания интерференционной картины эти волны должны быть когерентны во всей области наблюдения интерференции, то есть должны иметь одинаковую частоту и постоянный сдвиг фаз. Во-вторых, для наблюдения минимума эта разность фаз должна быть равна нечетному кратному π . Это условие будет выполнено, если в данной точке складываются волны, испущенные из одной точки (где они были синфазны), у которых оптическая разность хода до точки наблюдения была равна нечетному числу длин полуволн.

Решение задачи: По условию освещение поверхности воды рассеянное (лучи падают со всех возможных направлений), а сама поверхность ровная и горизонтальная. Лучи, попадающие от поверхности в окуляр, наклонены по отношению к горизонту на некоторый угол $\alpha = 30^\circ$. Ясно, что луч, образовавший эти лучи, тоже падал на поверхность под этим углом к горизонту (см. рисунок). Как видно из построения, в интерференции участвуют лучи, отраженные от двух



сторон масляной пленки толщиной d . Подсчитаем оптическую разность хода пары лучей от точки падения, в которой они были синфазны. Расстояние между точками «входа» и «выхода» луча в пленку $D = 2d \cdot \operatorname{tg}(\beta)$, где угол преломления

β находится из закона Снелла: $\sin \beta = \frac{1}{n} \cos \alpha$, $\cos \beta = \sqrt{1 - \frac{1}{n^2} \cos^2 \alpha}$ и

$\operatorname{tg} \beta = \frac{\cos \alpha}{\sqrt{n^2 - \cos^2 \alpha}}$. Поэтому $D = \frac{2d \cos \alpha}{\sqrt{n^2 - \cos^2 \alpha}}$. Следовательно, путь

отраженного луча до общей поверхности волнового фронта со вторым лучом

$s_1 = D \cdot \cos \alpha = d \frac{2 \cos^2 \alpha}{\sqrt{n^2 - \cos^2 \alpha}}$. Оптическая длина хода луча, прошедшего через

слой масла, $s_2 = n \cdot 2 \frac{d}{\cos \beta} = d \frac{2n^2}{\sqrt{n^2 - \cos^2 \alpha}}$. Первый луч испытывает отражение

от оптически более плотной среды, и к его длине хода нужно добавить половину длины волны. Про второй мы этого наверняка не знаем – скорее всего,

показатель преломления воды меньше 1,5, и тогда второй луч отражается от менее плотной среды. Поскольку это точно не известно, запишем оптическую разность хода лучей так:

$$\Delta s = s_2 - s_1 - k \frac{\lambda}{2} = 2d\sqrt{n^2 - \cos^2(\alpha)} - k \frac{\lambda}{2},$$

где $k = 0$, если показатель преломления воды в луже больше 1,5, и $k = 1$, если меньше. В процессе испарения толщина пленки уменьшается, и максимумы наблюдаемой интенсивности отвечают моментам времени, когда Δs равна целому числу длин волн. Значит, промежуток времени между этими максимумами определяется из условия

$$\begin{aligned} \lambda &= \Delta d \cdot 2\sqrt{n^2 - \cos^2(\alpha)} = vT \cdot 2\sqrt{n^2 - \cos^2(\alpha)} \Rightarrow v = \\ &= \frac{\lambda}{2T\sqrt{n^2 - \cos^2(\alpha)}} = \frac{\lambda}{T\sqrt{6}} \approx 0,227 \frac{\text{нм}}{\text{с}}. \end{aligned}$$

Ответ: скорость уменьшения толщины масляной пленки

$$v = \frac{\lambda}{2T\sqrt{n^2 - \cos^2(\alpha)}} \approx 0,23 \frac{\text{нм}}{\text{с}} \approx 0,82 \frac{\text{мкм}}{\text{час}}.$$

Критерии для задачи:

№	Действие	Балл
1	явно указано, что изменение интенсивности связано с интерференцией	1
2	явно указано, что это интерференция лучей, отраженных от разных сторон масляной пленки	2
3	в решении есть правильное построение хода когерентных лучей от точки их разделения	2
4	указано и обосновано, что период изменения интенсивности равен времени, за которое разность хода изменяется на длину волны	3
5	в решении показано, что результат не зависит от показателя преломления воды	2
6	получено правильное выражение для оптической длины пути (от точки разделения до общего волнового фронта) луча, отраженного от внешней поверхности масла	1
7	получено правильное выражение для оптической длины пути луча, проходящего через масло	1
8	правильно записано выражение для полной разности хода лучей	2
9	записано правильное уравнение для скорости испарения	3
10	получен правильный аналитический ответ	2
11	получен правильный численный ответ	1
Всего		20



ЗАДАНИЯ ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНОГО ТУРА

ИЗБРАННЫЕ ЗАДАЧИ:

УСЛОВИЯ, ВОЗМОЖНЫЕ РЕШЕНИЯ И КРИТЕРИИ ПРОВЕРКИ.

9 класс

1. Часы PSR B1937+21 (5 баллов)

Бычков А.И.

В современной метрологии эталонным прибором для измерения времени являются атомные часы. Перспективной альтернативой атомным часам могут стать пульсары — быстро вращающиеся нейтронные звезды. Некоторые пульсары обладают поразительной стабильностью вращения, испуская при каждом обороте звезды (через равные промежутки времени) радиосигналы, которые могут быть зарегистрированы на Земле. Пульсар PSR B1937+21 – яркий тому пример.

Период вращения пульсара PSR B1937+21 равен $T = 1,557806449$ мс, начальная погрешность измерения этого значения равна $\Delta T_0 = 5 \cdot 10^{-12}$ с. Скорость вращения пульсара может немного изменяться из-за внутренних процессов в звезде. Для учёта этого фактора будем считать, что погрешность периода пульсара увеличивается линейно со временем: $\Delta T(t) = \Delta T_0 + \alpha t$, где $\alpha = 7 \cdot 10^{-21}$ – скорость изменения погрешности. Предположим, что часы на основе пульсара используются для измерения большого промежутка времени t . При каком значении t накопленная погрешность измерения станет равна 1 секунде? Считайте, что среднее значение периода вращения пульсара постоянно и равно T . Ответ выразите в годах.

Решение

Поскольку погрешность измерения периода пульсара линейно возрастает со временем, к моменту времени t средняя погрешность измерения одного периода составляет $\Delta \bar{T} = \Delta T_0 + \frac{\alpha t}{2}$. Число оборотов пульсара за время t равно $N = \frac{t}{T}$. Следовательно, накопленная погрешность δt за N оборотов равна:

$$\delta t = N \Delta \bar{T} = \frac{t}{T} \left(\Delta T_0 + \frac{\alpha t}{2} \right).$$

Подставим известные числовые значения $\delta t = 1$ с, $T = 1557806449 \cdot 10^{-12}$ с, $\alpha = 7 \cdot 10^{-21}$ и получим квадратное уравнение для t :

$$3,5 \cdot 10^{-9} t^2 + 5t - 1557806449 = 0.$$

Положительный корень этого уравнения равен $t \approx 2,63 \cdot 10^8$ с = 8,34 лет.

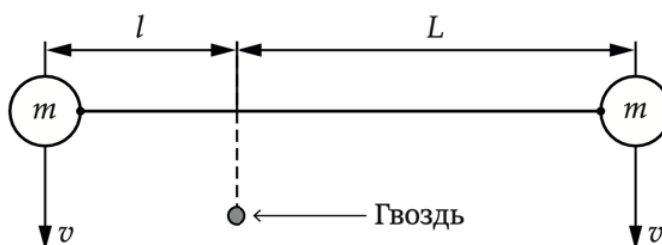
Критерии оценивания

№	Критерий	Балл
1.1	Высказана мысль о том, что к моменту времени t средняя погрешность измерения одного периода составляет $\Delta \bar{T} = \Delta T_0 + \frac{at}{2}$.	2,0
1.2	Указано, что число оборотов пульсара за время t равно $N = \frac{t}{T}$.	1,0
1.3	Получено квадратное уравнение для времени t .	1,0
1.4	Найдено верное числовое значение времени t .	1,0

2. Нецентральный удар (7 баллов)

Черников Ю.А.

Две одинаковые шайбы массой m , связанные нерастяжимой лёгкой нитью, движутся по горизонтальной гладкой поверхности со скоростью v , как показано на рисунке, представленном ниже.



Нить не провисает, но и не натянута. В процессе движения нить налетает на гвоздь. Длины отрезков нити между шайбами и гвоздём равны l и L . Трение между нитью и гвоздём отсутствует.

а) (5 баллов) Найдите силу натяжения нити сразу после того, как нить коснётся гвоздя, а также ускорение точки нити, соприкасающейся с гвоздём в этот момент времени.

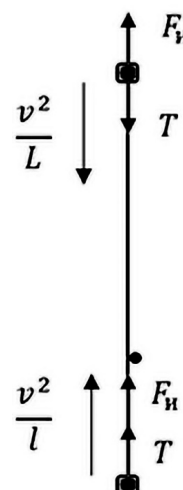
б) (2 балла) Определите радиусы кривизны траекторий шайб в момент, когда нить коснётся гвоздя.

Решение

Решение задачи может быть получено переходом в неинерциальную систему отсчёта (НИСО), связанную с точкой соприкосновения нити и гвоздя. В этой системе грузы движутся по окружностям радиусами L и l . Помимо сил натяжения нити, на грузы действуют силы инерции, пропорциональные массам грузов и ускорению НИСО относительно инерциальной системы отсчёта, связанной с Землёй. Силы натяжения нити в этом случае одинаковы, поскольку трением нити о гвоздь пренебрегаем.

Запишем второй закон Ньютона для двух грузов в этой системе отсчёта:

$$\begin{cases} m \frac{v^2}{L} = T - F_{\text{и}} = T - ma \\ m \frac{v^2}{l} = T + F_{\text{и}} = T + ma \end{cases}.$$



Силы, действующие на грузы, и их ускорения грузов в НИСО точки соприкосновения нити с гвоздем.

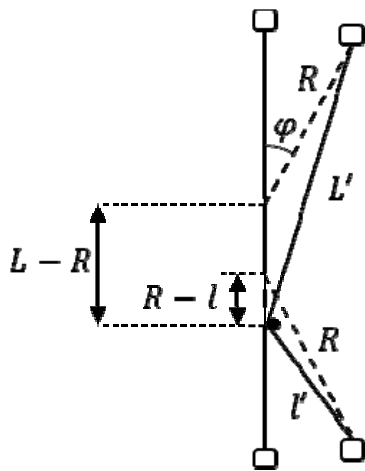
Решим систему и получим ответы на два вопроса в задаче:

$$\begin{cases} T = mv^2 \frac{L+l}{2Ll} \\ a = v^2 \frac{L-l}{2Ll} \end{cases}$$

Ускорение точки соприкосновения нити с гвоздем направлено вниз.

Для определения радиусов кривизны траекторий грузов необходимо записать для них второй закон Ньютона в инерциальной системе отсчёта, связанной с Землёй: $m \frac{v^2}{R} = T$.

Грузы имеют одинаковую массу и скорости, а также на них действует одинаковая сила, поэтому грузы сразу после удара будут двигаться по траекториям с одинаковым радиусом кривизны:



$$R = \frac{mv^2}{T} = \frac{2Ll}{L+l}.$$

Заметим, что для поиска радиуса кривизны траектории также можно воспользоваться геометрическими соображениями. Пусть прошло малое время Δt после удара, за которое грузы сместились по окружностям с радиусом R на малый угол φ . При этом длина верхней части нити стала равной L' , а нижней l' .

Запишем теорему косинусов для треугольников, образованных исходными и текущими положениями нитей, а также положениями текущих радиусов окружностей, по которым движутся грузы:

$$\begin{cases} L' = \sqrt{R^2 + (L-R)^2 + 2R(L-R)\cos\varphi} \\ l' = \sqrt{R^2 + (R-l)^2 + 2R(R-l)\cos\varphi} \end{cases}$$

Так как угол поворота грузов малый, то можно воспользоваться приближённой формулой для косинуса угла:

$$\cos\varphi \approx 1 - \frac{\varphi^2}{2}.$$

Тогда записанная система уравнений преобразуется к виду:

$$\begin{cases} L' \approx \sqrt{R^2 + (L-R)^2 + 2R(L-R) - R(L-R)\varphi^2} = \sqrt{L^2 - R(L-R)\varphi^2} \\ l' \approx \sqrt{R^2 + (R-l)^2 + 2R(R-l) - R(R-l)\varphi^2} = \sqrt{l^2 - R(R-l)\varphi^2} \end{cases}$$

Также к полученным выражениям можно применить формулу Бернулли:

$$(1+x)^n \approx 1+nx, \text{ при } x \ll 1.$$

$$\begin{cases} L' \approx L \sqrt{1 - \frac{R(L-R)}{L^2} \varphi^2} \approx L \left(1 - \frac{R(L-R)}{2L^2} \varphi^2 \right) \\ l' \approx l \sqrt{1 - \frac{R(l-R)}{l^2} \varphi^2} \approx l \left(1 - \frac{R(l-R)}{2l^2} \varphi^2 \right) \end{cases}.$$

Так как общая длина нити не изменяется, то:

$$L + l = L' + l' = L + l - \frac{R(L-R)}{2L} \varphi^2 - \frac{R(l-R)}{2l} \varphi^2.$$

Отсюда для связи радиуса кривизны траектории грузов и длин частей нити получаем:

$$\frac{L-R}{L} = \frac{R-l}{l}.$$

Решая полученное уравнение, получаем для радиуса кривизны выражение, совпадающее с полученным ранее:

$$R = \frac{2Ll}{L+l}.$$

Заметим, что таким способом можно получить ответ и для ускорения точки соприкосновения нити с гвоздем. Для этого достаточно записать выражение для угла поворота нитей:

$$\varphi = \frac{v\Delta t}{R},$$

Тогда изменение длины верхней части нити составит:

$$L - L' = \frac{a\Delta t^2}{2} = \frac{R(L-R)}{2L} \varphi^2 = \frac{R(L-R)}{2L} \left(\frac{v\Delta t}{R} \right)^2$$

Подставляя полученное ранее выражение для радиуса кривизны траектории грузов, получаем:

$$a = v^2 \frac{L-l}{2Ll}.$$

Критерии оценивания (решение 1)

№	Критерий	Балл
2а.1	Предложен переход в НИСО, связанной с точкой касания нити и гвоздя.	1,0
2а.2	Указаны радиусы кривизны траекторий шайб в этой системе отсчета.	1,0
2а.3	Записаны законы Ньютона для шайб с учетом силы инерции.	1,0
2а.4	Получен верный ответ для силы натяжения нити $T = mv^2 \frac{L+l}{2Ll}$.	1,0
2а.5	Получен верный ответ для ускорения точки касания нити и гвоздя $a = v^2 \frac{L-l}{2Ll}$.	1,0
2б.1	Указано, что радиусы кривизны траекторий шайб в лабораторной системе отсчета одинаковы.	1,0
2б.2	Получено выражение для радиуса кривизны шайб в лабораторной системе отсчета $R = \frac{2Ll}{L+l}$.	1,0

Критерии оценивания (решение 2)

№	Критерий	Балл
26.1	Указано, что радиусы кривизны траекторий шайб в лабораторной системе отсчета одинаковы.	1,0
26.2	Условие нерастяжимости нити.	1,0
26.3	Указано, что для поиска ответа для радиуса кривизны необходимо пользоваться приближенными формулами.	1,0
26.4	Получен верный ответ для радиуса кривизны траектории в лабораторной СО: $R = \frac{2Ll}{L+l}.$	1,0
2а.1	Получен верный ответ для ускорения точки касания нити и гвоздя $a = v^2 \frac{L-l}{2Ll}.$	1,0
2а.2	Записан второй закон Ньютона для шайб в лабораторной СО.	1,0
2а.3	Найдена сила натяжения нити: $T = mv^2 \frac{L+l}{2Ll}.$	1,0

10 класс

1. В погоне за нулём (5 баллов)

Бычков А.И.

Колесо радиусом $R = 50$ см движется без проскальзывания по горизонтальной поверхности, при этом его ось движется с ускорением $a = 1$ м/с². Спустя какое время после начала движения колеса ускорение некоторой его точки, находящейся на расстоянии $r = 25$ см от оси, будет равно нулю?

Решение

Решение задачи упрощается, если рассматривать движение произвольной точки диска в системе отсчёта, связанной с центром колеса. В этой системе отсчёта любая точка диска движется по окружности с постоянным тангенциальным ускорением. При этом, если ускорение центра диска равно a , то тангенциальное ускорение a_τ точки, находящейся на расстоянии r , равно

$$a_\tau = a \frac{r}{R} = \frac{a}{2}.$$

Это соотношение следует из условия качения без проскальзывания. Кроме тангенциального, у точек диска будет и нормальное ускорение a_n , направленное к центру диска.

Полное ускорение \vec{a}' точки на диске в подвижной системе равно $\vec{a}' = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n$. Ускорение \vec{A} этой же точки в лабораторной системе отсчёта выражается суммой $\vec{A} = \vec{a}' + \vec{a}$. Следовательно, ускорение точки на колесе равно нулю, если геометрическая сумма её тангенциального и нормального ускорений равна по модулю и противоположна по направлению ускорению центра колеса \vec{a} (см. рис.).

В этом случае нормальное ускорение равно:

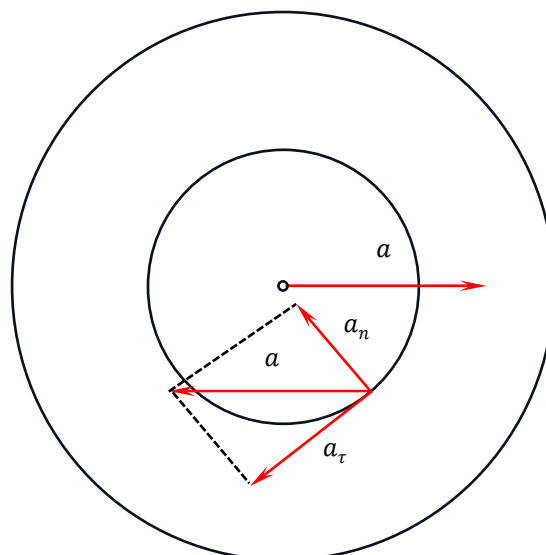
$$a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2} = \frac{\sqrt{3}}{2} a.$$

С другой стороны,

$$a_n = \frac{v^2}{r} = \frac{(a_\tau t)^2}{r} = \frac{(at)^2}{4r}.$$

Откуда окончательно находим

$$t = \frac{\sqrt{4ra_n}}{a} = \sqrt{\frac{2\sqrt{3}r}{a}} = 0,93 \text{ с.}$$



Критерии оценивания

№	Критерий	Балл
1.1	Найдено тангенциальное ускорение точки, находящейся на расстоянии r , в системе отсчёта, связанной с осью колеса: $a_\tau = \frac{a}{2}$.	1,5
1.2	Написано выражение для нормального ускорения точки в системе отсчёта, связанной с осью колеса: $a_n = \frac{(a_\tau t)^2}{r}$.	1,0
1.3	Высказана мысль о том, что ускорение точки на колесе равно нулю, если геометрическая сумма её тангенциального и нормального ускорений (в подвижной системе отсчёта) равна по модулю и противоположна по направлению ускорению центра колеса \vec{a} (в лабораторной системе отсчёта).	1,5
1.4	Найдено искомое время.	1,0

2. Оболочка на весах (8 баллов)

Варламов С.Д.

Оболочку с тонкими и плохо проводящими тепло стенками из нерастяжимого гибкого полиэтилена взвесили, когда в ней не было воздуха, получилось значение массы $M = 5$ г. Затем с помощью насоса через трубку с небольшим сечением $S = 0,2 \text{ см}^2$ за весьма короткое время $\tau = 5$ с оболочку заполнили до объёма $V = 10$ литров воздухом, который брался снаружи, и сразу же взвесили получившийся мешок с воздухом на тех же весах. Получили значение $0,95M$. Через большое время, когда установилось тепловое равновесие, результат взвешивания для оболочки с воздухом снова оказался M . Давление воздуха внутри оболочки и вне её всегда равно

Решение

Масса воздуха внутри оболочки после её заполнения остаётся фиксированной. Сразу после заполнения оболочки температура воздуха внутри больше температуры окружающего воздуха. Поэтому действие сил Архимеда проявилось в том, что показания весов стали меньше. Согласно условию,

скорость поступления воздуха в оболочку можно оценить величиной $v = \frac{V}{S\tau} = 100$ м/с. Поступивший в оболочку воздух с некоторой массой m принёс с собой свою внутреннюю энергию и ещё кинетическую энергию упорядоченного движения.

При этом внешние силы совершили работу: $-p_0(V_1 - V_0) + \frac{mv^2}{2}$. Поэтому его температура T_1 в оболочке стала больше:

$$\frac{5}{2} \frac{m}{\mu} RT_0 + \frac{mv^2}{2} - p_0(V_1 - V_0) = \frac{5}{2} \frac{m}{\mu} RT_1.$$

$$\frac{7}{2} \frac{m}{\mu} RT_0 + \frac{mv^2}{2} = \frac{7}{2} \frac{m}{\mu} RT_1.$$

$$T_0 + \frac{\mu v^2}{7R} = T_1. \quad (1)$$

Давление равно p_0 , поэтому выполняется соотношение:

$$p_0 V = \frac{m}{\mu} RT_1. \quad (2)$$

Давление внутри и снаружи оболочки одинаковые, поэтому разница сил Архимеда при взвешивании оболочки с нагретым воздухом и при взвешивании оболочки с остывшим воздухом равна: $gm \left(\frac{T_1}{T_0} - 1 \right)$. То есть разница показаний весов соответствует соотношению:

$$m \left(\frac{T_1}{T_0} - 1 \right) = \frac{M}{20}. \quad (3)$$

Три полученных уравнения содержат три неизвестных величины T_1 , T_0 , m . Исключив величины T_1 и m , получим «квадратное» уравнение для T_0 :

$$T_0^2 + 2T_0 \cdot \frac{\mu v^2}{14R} = \frac{20p_0 V}{7M} \left(\frac{\mu v}{R} \right)^2.$$

Подставляем численные значения:

$$T_0^2 + 2T_0 \cdot 2,49 \text{ К} = 69591 \text{ К}^2.$$

В итоге получается значение $T_0 = 261,3 \text{ К}$.

Критерии оценивания

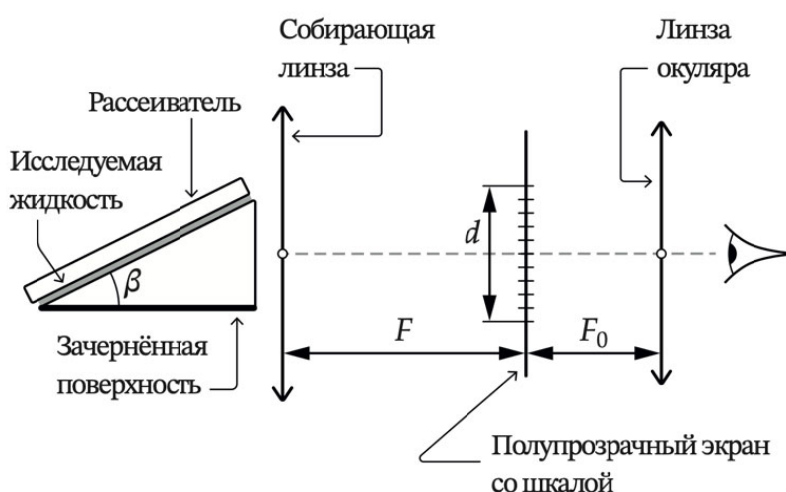
№	Критерий	Балл
3.1	Найдена скорость поступления воздуха в оболочку через отверстие.	1,0
3.2	Записан закон сохранения энергии: сумма начальной внутренней энергии и приобретённой газом энергии упорядоченного движения равна сумме конечной внутренней энергии и работе сил газа против сил внешнего давления.	2,0
3.3	Записано уравнение состояния газа внутри оболочки.	1,0
3.4	Установлена связь между массой газа внутри оболочки и разницей показаний весов.	2,0
3.5	Получено квадратное уравнение для температуры.	1,0
3.6	Найдено верное числовое значение температуры.	1,0

5. Рефрактометр (10 баллов)**Черников Ю.А.**

Рефрактометрия — один из наиболее удобных способов определения концентрации примесей в жидкости путём измерения её показателя преломления.

**Рис. 1**

Простейший рефрактометр представляет собой тубус (см. рис. 1), на одном конце которого расположена призма с полированной скошенной гранью. На эту грань наносится капля исследуемой жидкости, которая затем прижимается к поверхности рассеивателем. Рассеиватель обеспечивает освещение жидкости под всеми углами. На другом конце тубуса находится окуляр. При наблюдении через окуляр при направлении яркого света на рассеиватель, видна шкала, часть которой освещена, а часть — нет. Граница между освещённой и неосвещённой областями определяет показатель преломления жидкости, однозначно связанный с концентрацией примесей. Принципиальная оптическая схема рефрактометра показана на рис. 2, представленном ниже.

**Рис. 2**

За призмой, внутри тубуса, расположена собирающая линза. В её фокальной плоскости находится полупрозрачный матовый экран со шкалой, рассматриваемый через окуляр. В простейшем варианте окуляр представляет собой одну линзу, а экран расположен в её фокальной плоскости.

Предполагается отсутствие отражения света от зачернённой поверхности призмы.

Предположим, что необходимо спроектировать рефрактометр для измерения объёмной концентрации спирта в воде с пределом измерения 60%. Призма рефрактометра изготовлена из стекла с показателем преломления $n = 1,500$.

а) (3 балла) Какова величина угла β при вершине призмы, если при помещении на скошенную грань призмы 30%-ного раствора спирта с показателем преломления $n_{30} = 1,350$ граница освещённой области на экране пересекается с оптической осью линзы?

б) (4 балла) Рассчитайте длину шкалы d (см. рис. 2) на полупрозрачном экране. Фокусное расстояние линзы $F = 10$ см. Показатель преломления чистой воды $n = 1,333$, 60%-ного раствора спирта – $n_{60} = 1,362$.

в) (3 балла) Шкала рефрактометра должна иметь цену деления 1%. Будем считать, что человеческому глазу комфортно различать предметы на далеком расстоянии, если угловое расстояние между ними не менее $\varphi = 15'$ (15 угловых минут). Рассчитайте максимально возможное фокусное расстояние окуляра F_{\max} .

Решение

На каждую точку скошенной грани призмы свет падает во всех направлениях и преломляется. После преломления свет от каждой точки будет распространяться внутри конуса с углом раствора $2\alpha_{\text{кр}}$, где

$$\alpha_{\text{кр}} = \arcsin\left(\frac{n}{n_c}\right).$$

Далее свет попадает на выходную грань призмы и после преломления собирается линзой в фокальной плоскости. Все лучи, идущие из призмы под одинаковыми углами, попадают в одну точку фокальной плоскости. Таким образом граница теневой области определяется крайним лучом, идущим внутри призмы под углом $\alpha_{\text{кр}}$ к перпендикуляру к скошенной грани.

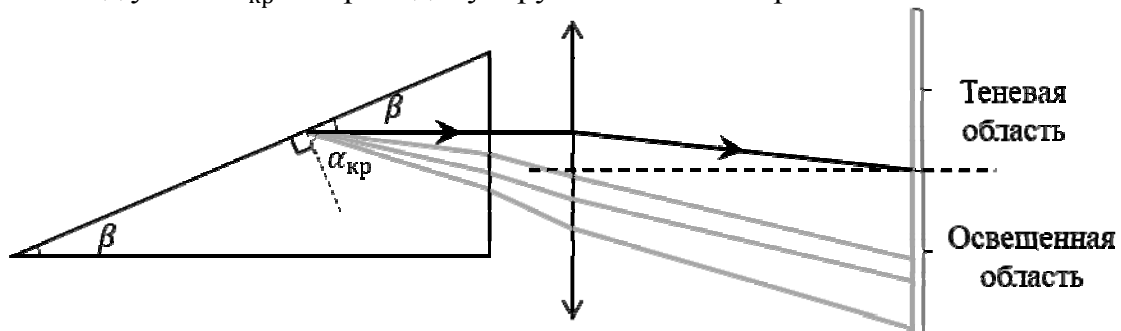


Рис. 3. Ход лучей в рефрактометре при измерении 30% раствора спирта.

Если граница теневой области совпадает с местом пересечения экрана и оптической оси линзы, то крайний луч выходит из призмы параллельно оптической оси призмы. Такой луч не испытывает преломления на выходной грани призмы, то есть и внутри призмы идет параллельно оптической оси. Легко заметить, что в этом случае сумма критического угла и угла при вершине призмы должна давать 90 градусов. Отсюда угол при вершине призмы должен составлять:

$$\beta = 90^\circ - \alpha_{\text{кр}} = 90^\circ - \arcsin\left(\frac{n_{30}}{n_c}\right) = 25,8^\circ.$$

При других показателях преломления жидкости крайние лучи в призме будут отклоняться от горизонтали на малый угол $\gamma = 90^\circ - \alpha_{\text{кр}} - \beta$.

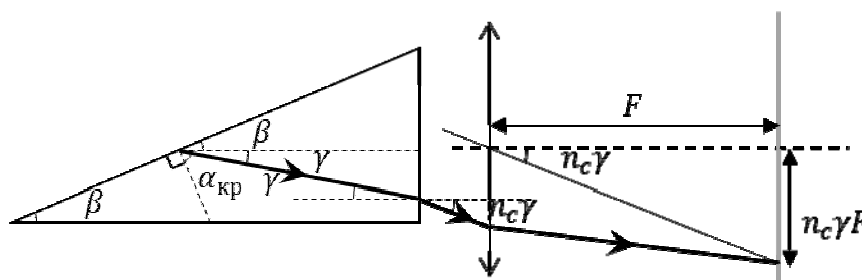


Рис. 4. Ход лучей в рефрактометре при измерении показателя преломления раствора с произвольной концентрацией спирта.

Эти лучи после преломления на выходной грани призмы будут иметь угол $n_c \gamma$ с оптической осью линзы. После прохождения линзы лучи сфокусируются в одной точке экрана на расстоянии $n_c \gamma F$ от его пересечения с оптической осью. Расстояние между двумя положениями границы теневой области, соответствующими крайним показателям преломления, может быть рассчитано как:

$$d = n_c F |\gamma_{60} - \gamma_0| = n_c F \left| \arcsin \left(\frac{n_{60}}{n_c} \right) - \arcsin \left(\frac{n_0}{n_c} \right) \right| = 6,6 \text{ мм.}$$

Расстояние между соседними делениями шкалы должно составлять:

$$\Delta d = \frac{d}{60} = 0,11 \text{ мм.}$$

Так как шкала расположена в фокусной плоскости окуляра, то изображение шкалы окуляр перемещает вдаль от наблюдателя. Угловой размер шкалы при этом будет равен отношению ее линейного размера и фокусного расстояния линзы окуляра. Угловое расстояние между соседними делениями должно быть не меньше φ :

$$\frac{\Delta d}{F_o} \geq \varphi.$$

Отсюда максимальное фокусное расстояние:

$$F_{\text{max}} = \frac{\Delta d}{\varphi} = 25,2 \text{ мм.}$$

Критерии оценивания

№	Критерий	Балл
5a.1	Высказана мысль о том, что границу освещенной области определяют лучи, идущие под критическим углом в призме.	0,5
5a.2	Записано верное выражение для поиска критического угла.	1,0
5a.3	Указано, что лучи, попадающие в точки пересечения экрана и главной оптической оси линзы, не преломляются на выходной грани призмы.	0,5
5a.4.	Найден угол скоса призмы.	1,0
5б.1	Рассмотрено преломление на выходной грани призмы.	1,0
5б.2	Записана связь между углом преломления луча на выходной грани призмы и положением его пересечения экрана призмы.	1,0
5б.3	Найдено буквенное выражение для ширины шкалы.	1,0

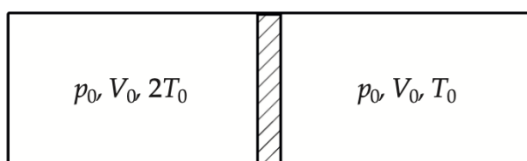
5б.4	Найдено числовое значение для ширины шкалы.	1,0
5в.1	Указана связь линейный размеров объектов на шкале и их угловых размеров при наблюдении через окуляр.	1,0
5в.2	Найдено выражение для максимального фокусного расстояния.	2,0

11 класс

1. Установление равновесия (6 баллов)

Бычков А.И.

В теплоизолированном цилиндре, расположенном горизонтально, лёгкий, хорошо проводящий тепло поршень делит объём на две равные части, каждая объёмом V_0 . В обеих частях находится один и тот же одноатомный идеальный газ при начальном давлении p_0 и температурах $2T_0$ и T_0 (см. рисунок).



Теплоёмкостью поршня можно пренебречь.

Мощность теплообмена между частями цилиндра пропорциональна разности температур: $P = \alpha(T_1 - T_2)$, где α – коэффициент теплопередачи, T_1 –

температура в левой части, T_2 – в правой. В процессе установления равновесия поршень медленно перемещается без трения о стенки цилиндра.

а) (2 балла) Найдите конечную температуру, содержимого цилиндра.

б) (2 балла) Найдите время, в течение которого разность температур между частями цилиндра уменьшается в e раз по сравнению с начальной разностью температур T_0 .

в) (2 балла) Найдите зависимость объёма левой части цилиндра от времени $V_1(t)$.

Решение.

а) Запишем уравнения состояния для начального момента времени:

$$p_0 V_0 = \nu_1 R \cdot 2T_0, \quad p_0 V_0 = \nu_2 R \cdot T_0.$$

Отсюда получаем, что $\nu_2 = 2\nu_1$.

Пусть в некоторый момент времени t температура в левой части цилиндра равна T_1 , а в правой – T_2 . Согласно первому началу термодинамики

$$\frac{3}{2} \nu_1 R (2T_0 - T_1) = \frac{3}{2} \cdot \nu_2 R (T_2 - T_0), \quad (1)$$

где T_1 и T_2 – температуры в левой и правой частях цилиндра в момент времени t соответственно.

В конце процесса теплообмена температуры в левой и правой частях уравниваются. Тогда $2T_0 - T = 2T - 2T_0$. Откуда получаем ответ на пункт

а): $T = \frac{4}{3} T_0$.

б) По условию задачи тепло передаётся медленно, значит, давления на поршень с двух сторон практически равны, то есть в любой момент времени $p_1 = p_2$. Перепишем уравнение (1), воспользовавшись уравнением состояния:

$$p_0 V_0 - p_1 V_1 = p_2 V_2 - p_0 V_0 \Rightarrow p_1 = p_2 = p_0.$$

То есть процесс теплопередачи происходит изобарически, и молярная теплоёмкость равна $c_p = \frac{5}{2}R$.

Пусть за малое время dt температуры частей цилиндра изменились на величины dT_1 и dT_2 . Тогда

$$\frac{5}{2}v_1RdT_1 = \alpha(T_2 - T_1)dt, \quad \frac{5}{2}v_2RdT_2 = \alpha(T_1 - T_2)dt \Rightarrow \frac{dT_1}{dt} = \frac{2\alpha(T_2 - T_1)}{5v_1R},$$

$$\frac{dT_2}{dt} = \frac{2\alpha(T_1 - T_2)}{5v_2R}.$$

Введём обозначение $\Delta T = T_1 - T_2$. Вычтем из первого уравнения второе:

$$\frac{d\Delta T}{dt} = -\frac{2\alpha}{5R}\left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}\right)\Delta T = -\frac{6\alpha T_0}{5p_0V_0}\Delta T.$$

Решая это дифференциальное уравнение, получаем: $\Delta T = T_0 e^{-\lambda t}$, где $\lambda = \frac{6\alpha T_0}{5p_0V_0}$. Значит, время, в течение которого разность температур между частями цилиндра уменьшается в e раз по сравнению с начальной разностью температур T_0 , равно $\frac{5p_0V_0}{6\alpha T_0}$.

в) Из уравнения $T_1 - T_2 = T_0 e^{-\lambda t}$ и уравнения (1) следует:

$$T_1(t) = \frac{4}{3}T_0 + \frac{2}{3}T_0 e^{-\lambda t}, \quad T_2(t) = \frac{4}{3}T_0 - \frac{1}{3}T_0 e^{-\lambda t}.$$

Так как процесс изобарический, следовательно, $\frac{V_1(t)}{T_1(t)} = \frac{v_1 R}{p_0}$. Откуда получаем окончательный ответ:

$$V_1(t) = \frac{v_1 R}{p_0} \left(\frac{4}{3}T_0 + \frac{2}{3}T_0 e^{-\lambda t} \right) = \frac{2}{3}V_0 + \frac{1}{3}V_0 e^{-\lambda t}.$$

Критерии оценивания.

№	Критерий	Балл
1а.1	Записаны уравнения состояния для начального момента времени	0,5
1а.2	Записано первое начало термодинамики для начального и промежуточного состояний.	1,0
1а.3	Найдена конечная температура $T = \frac{4}{3}T_0$.	0,5
1б.1	Установлено, что процесс изобарический.	0,5
1б.2	Записаны уравнения $\frac{5}{2}v_1RdT_1 = \alpha(T_2 - T_1)dt, \quad \frac{5}{2}v_2RdT_2 = \alpha(T_1 - T_2)dt$	1,0
1б.3	Найдено время, в течение которого разность температур между частями цилиндра уменьшается в e раз по сравнению с начальной разностью температур T_0 : $\tau = \frac{5p_0V_0}{6\alpha T_0}$.	0,5
1в.1	Получена зависимость температуры левого отсека от времени: $T_1(t) = \frac{4}{3}T_0 + \frac{2}{3}T_0 e^{-\lambda t}$, где $\lambda = \frac{6\alpha T_0}{5p_0V_0}$.	1,0
1в.2	Найдена зависимость объёма левой части цилиндра от времени $V_1(t)$: $V_1(t) = \frac{2}{3}V_0 + \frac{1}{3}V_0 e^{-\lambda t}$	1,0

3. Поле в центре (5 баллов)

Бычков А.И.

В этой задаче рассматриваются плоские конструкции, изготовленные из однородной проволоки постоянного сечения, единица длины которой имеет сопротивление ρ . Требуется определить индукцию магнитного поля, порождаемую токами, текущими по проволоке.

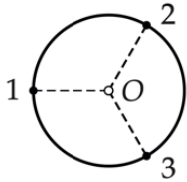


Рис. 1

а) (2 балла) Проволочной конструкцией, рассматриваемой в этом пункте, является кольцо радиусом r . В точках 1, 2 и 3, находящихся на равных расстояниях друг от друга (см. рис. 1), к кольцу подключены источники ЭДС, так что если положить потенциал точки 3 равным нулю, то потенциалы точек 1 и 2 окажутся равными φ_1 и φ_2 соответственно. Определите индукцию магнитного поля, создаваемого участком 1-2 в центре кольца.

б) (3 балла) В этом пункте рассматривается плоская конструкция, изображённая на рис. 2. Она состоит из двух concentric rings, двух радиальных перемычек и двух длинных, прямолинейных проводников. Точками чёрного цвета обозначены точки спаивания. В точке A контакта между проволоками нет. Радиусы concentric rings равны r и $2r$, углы между прямолинейными проволочными участками равны α , как показано на рисунке. Определите индукцию магнитного поля в общем центре колец, в точке O.

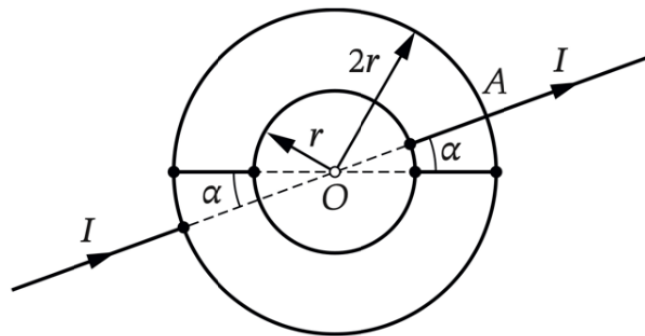


Рис. 2

Решение

а) Выберем ось z перпендикулярную плоскости рисунка направленную на нас. Из закона Био-Савара-Лапласа следует, что вектор индукции поля, создаваемого участком 1-2, перпендикулярен плоскости рисунка. Его проекция на ось z равна:

$$B_z = \frac{\mu_0 I_{21} L}{4\pi r^2} = \frac{\mu_0 I_{21} \rho L}{4\pi \rho r^2} = \frac{\mu_0 \varphi_2 - \varphi_1}{4\pi \rho r^2},$$

где I_{21} – алгебраическое значение протекающего через участок 1-2 (положителен, когда ток течёт от точки 2 к точке 1, и отрицателен, когда наоборот), L – длина участка 1-2.

б) Радиальные перемычки и прямолинейные провода в точке O магнитного поля не создают, так как лежат на прямых, проходящих через точку O. Кольцо

(как малое, так и большое) тоже не создают поля в точке O , поскольку сумма $\sum_i \frac{\mu_0 \varphi_{i+1} - \varphi_i}{4\pi \rho r^2}$ равна нулю при обходе по замкнутому контуру, который не содержит батареек. Таким образом, индукция магнитного поля в точке O равна нулю.

Критерии оценивания

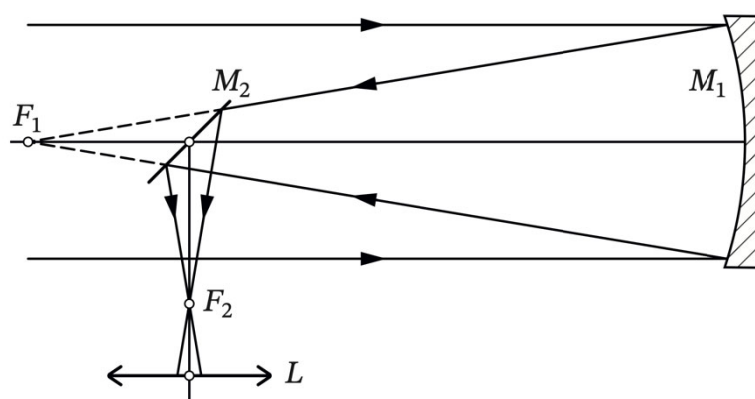
№	Критерий	Балл
3а.1	Найден модуль вектора магнитной индукции в точке O .	1,0
3а.2	Указано, направление вектора магнитной индукции в точке O .	1,0
3б.1	Указано, что радиальные перемычки и прямолинейные провода в точке O магнитного поля не создают.	0,5
4б.2	Доказано, что каждое из колец по-отдельности не создают магнитного поля в точке O .	2,5

Если в основе решения пункта б) лежат законы Кирхгофа, то в случае получения правильного результата выставляется полный балл (3 балла). Если же в ходе решения были правильно записаны часть уравнений и/или высказаны соображения симметрии, но были допущены ошибки, которые привели к неверному результату, то за этот пункт выставляется не более 1 балла.

4. Телескоп-рефлектор Ньютона (10 баллов)

Крюков С.П., Дергачёв А.А.

Рефлектор Ньютона – это зеркальный аналог зрительной трубы Кеплера. Вогнутое сферическое зеркало M_1 (см. рисунок, расположенный ниже по тексту), представляющее собой объектив телескопа-рефлектора, формирует в фокальной плоскости действительное изображение небесного светила. Это изображение рассматривается через окуляр L , роль которого играет собирающая линза. На рисунке, также можно видеть плоское поворотное зеркало M_2 .



Зеркало отклоняет сходящийся отражённый (от вогнутого зеркала) пучок света в сторону. На рисунке схематично показан ход лучей.

а) (4 балла) Пусть радиус сферического зеркала равен R , а фокусное расстояние линзы равно F . Чему равно угловое увеличение прибора?

Указание. Угловым увеличением γ оптических приборов, предназначенных для наблюдения удалённых объектов, называется отношение $\gamma = \frac{\alpha'}{\alpha}$, где α' –

угол, под которым рассматриваемый объект виден в окуляр, α – угол зрения невооружённым глазом с того же расстояния.

б) (3 балла) Один из крупнейших в мире телескоп Специальной астрофизической обсерватории РАН (сделанный по схеме Ньютона) имеет фокусное расстояние объектива $F = 300$ м. Каков максимально допустимый угол φ_{\max} качания телескопа, обусловленный вибрациями фундамента обсерватории, при котором ещё полностью используется разрешающая способность фотоплёнки $\delta = 50$ линий/мм при фотографировании астрономических объектов? При фотографировании плёнка помещается в фокальную плоскость объектива, используется длительная выдержка до нескольких минут.

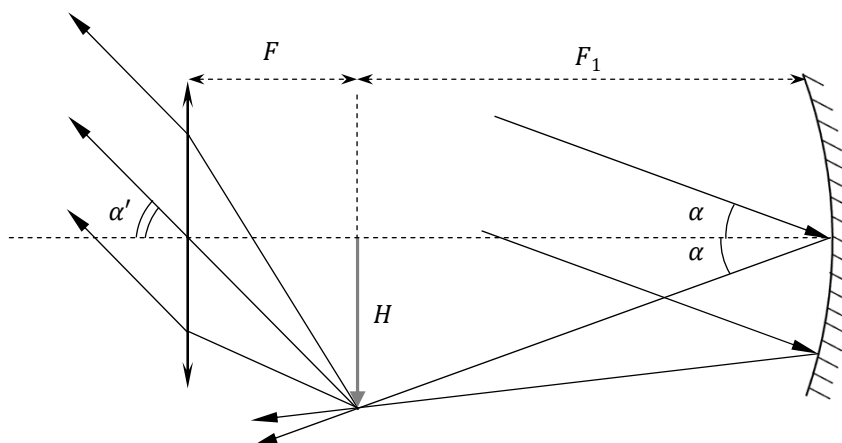
в) (3 балла) Пусть из-за проходящих рядом с обсерваторией строительных работ телескоп колеблется с амплитудой 10^{-6} рад. Чему будет равен размер изображения на плёнке, если угловой размер источника 10^{-7} рад?

Решение.

а) При наблюдении удалённого предмета объектив формирует его действительное изображение в своей фокальной плоскости. Это изображение рассматривается в окуляр, как в лупу. Если фокальные плоскости объектива и окуляра совпадают, то параллельный входящий пучок переходит в параллельный выходящий, но идущий, вообще говоря, под другим углом к главной оптической оси системы. В этом случае наблюдение ведётся ненапряжённым глазом и угловое увеличение телескопа легко находится из рисунка

$$\gamma = \frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{H/F}{H/F_1} = \frac{F_1}{F} = \frac{R}{2F},$$

где H – размер изображения в совмещённых фокальных плоскостях объектива и окуляра, $F_1 = \frac{R}{2}$ – фокусное расстояние окуляра.



б) При повороте зеркала из-за тряски фундамента на угол φ его главная оптическая ось поворачивается тоже на угол φ , а изображение точки астрономического объекта, находящееся в фокальной плоскости, сместится, как нетрудно понять, на $2F\varphi$ (на φ возрастёт угол падения и на столько же – угол отражения). Но та же тряска фундамента вызовет смещение самой плёнки на $F\varphi$

(ибо «всё» вместе с фундаментом повернётся на угол φ), так что относительно плёнки изображение сместится только на $F\varphi$. Очевидно, что эта величина не должна быть больше $1/\delta$, откуда

$$\varphi_{\max} = \frac{1}{F\delta} \approx 6,7 \cdot 10^{-8} \text{ рад.}$$

в) Обозначим угловой размер источника $\alpha = 10^{-7}$. В идеальных условиях размер его изображения на плёнке будет равен $\Delta_0 = \alpha F$, так что на плёнке получится круг указанного диаметра. Однако вследствие вибраций обсерватории центр изображения Плутона при съёмке будет хаотически смещаться с амплитудой $d = \varphi F$. Размах колебаний центра (расстояние между крайними положениями) будет вдвое больше амплитуды, а полный размер изображения, полученного с длительной выдержкой, составит $\Delta = \Delta_0 + 2d = F(\alpha + 2\varphi) = 0,63 \text{ мм.}$

Критерии оценивания.

№	Критерий	Балл
4а.1	Приведён схематичный рисунок хода лучей, «проходящих» через объектив и окуляр телескопа.	1,0
4а.2	Указано, что фокусное расстояние объектива равно $\frac{R}{2}$.	1,0
4а.3	Найдено угловое увеличение телескопа: $\gamma = \frac{R}{2F_2}$.	2,0
4б.1	Высказана мысль о том, что из-за вибрации фундамента на угол φ , изображение точки астрономического объекта, находящееся в фокальной плоскости, сместится на $2F\varphi$.	0,5
4б.2	Высказана мысль о том, что та же вибрация фундамента вызовет смещение самой плёнки на $F\varphi$.	1,0
4б.3	Получен правильный числовой ответ: $\varphi_{\max} \approx 6,7 \cdot 10^{-8} \text{ рад.}$	1,5
4в.1	Указывается, что изображение на плёнке в случае отсутствия колебаний телескопа будет представлять собой круг диаметром $\Delta_0 = \alpha F$.	1,0
4в.2	Высказана мысль о том, что вследствие вибраций обсерватории центр изображения источника при съёмке будет хаотически смещаться с амплитудой $d = \varphi F$.	1,0
4в.3	Получен верный ответ $\Delta = 0,63 \text{ мм.}$ Если вместо Δ верно вычислен угловой размер изображения, баллы не снимаются.	1,0

5. Пизанская башня (12 баллов)

Черников Ю.А.

Согнутую в виде спирали металлическую полосу можно использовать в качестве пружины кручения, то есть пружины, препятствующей повороту механизмов (см. рис. 1). При попытке распрямить или скрутить такую пружина она развивает возвращающий момент сил M , пропорциональный углу поворота α : $M = \gamma\alpha$, где γ – постоянный коэффициент жёсткости кручения пружины. Нижний конец лёгкого жёсткого вертикального стержня длиной l жёстко скреплён со свободным концом пружины кручения. Внутренний конец

пружины закреплён. К верхнему концу стержня прикладывается сила F , направленная вертикально вниз.

а) (3 балла) При какой максимальной силе F_{\max} вертикальное положение равновесия стержня ещё будет оставаться устойчивым?

б) (2 балла) Каким будет угол отклонения, если сила воздействия будет равна $F = 1,01F_{\max}$?

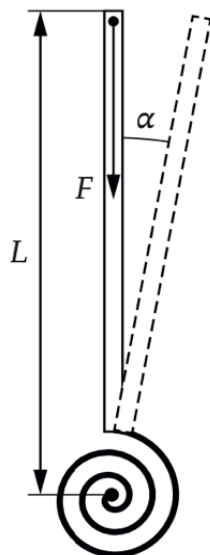


Рис. 1

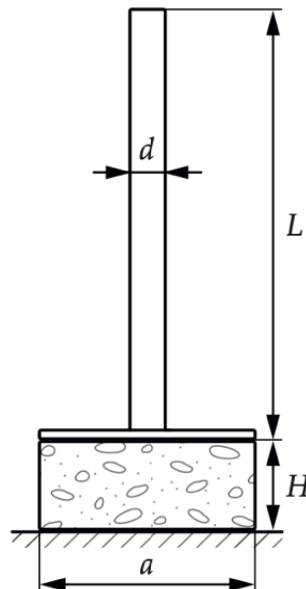


Рис. 2

Пизанская башня – один из известнейших памятников архитектуры. Башня отличается тем, что её ось отклонена на некоторый угол от вертикали из-за мягкости грунта под её основанием. Рассмотрим модель башни, стоящей на грунте. Башня представляет собой однородный цилиндр, высотой L и диаметром d (рис. 2), масса единицы длины башни равна λ . Башня поставлена по центру на жёсткое невесомое квадратное основание со стороной a , к которому снизу приклеена поролоновая подушка того же сечения. Высота подушки, после установки на неё башни составляет H . Вся конструкция установлена на жёстком столе. Масса распределена по башне однородно. Модуль Юнга поролона равен E . Коэффициент трения между башней и основанием можно считать достаточно большим, так что башня не проскальзывает относительно основания.

в) (4 балла) При какой минимальной высоте башни L_1 она займёт устойчивое наклонное положение?

г) (3 балла) При какой минимальной высоте башни L_2 она опрокинется? Выразите ответ через L_1 и d , считая $d \ll L_1$.

Указание 1. При малой относительной деформации $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$ растяжения/сжатия стержня с площадью поперечного сечения S сила упругости, возникающая в нём, может быть рассчитана по формуле $F = E\varepsilon S$, где E – модуль Юнга материала стержня.

Указание 2. При ответе на вопросы разных пунктов задачи могут оказаться очень полезными приближённые формулы, справедливые для малых значений α ($\alpha \ll 1$):

$$\sin \alpha \approx \alpha - \frac{\alpha^3}{6}, \quad \operatorname{tg} \alpha \approx \alpha + \frac{\alpha^3}{3}.$$

Решение.

а) Пусть рычаг отклонился от вертикали и находится в состоянии равновесия (рис. 3). Тогда сумма моментов сил, действующих на рычаг, будет равна нулю:

$$Fl \sin \alpha = \gamma a.$$

Посмотрим на графическое решение этого уравнения. Нарисуем графики зависимости момента сил скручивающего пружину и момента сил упругости от угла α . Возможно две ситуации, изображенные на рис. 4 (а, б).

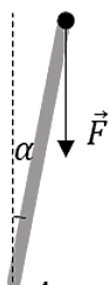


Рис. 3. Наклоненный стержень.

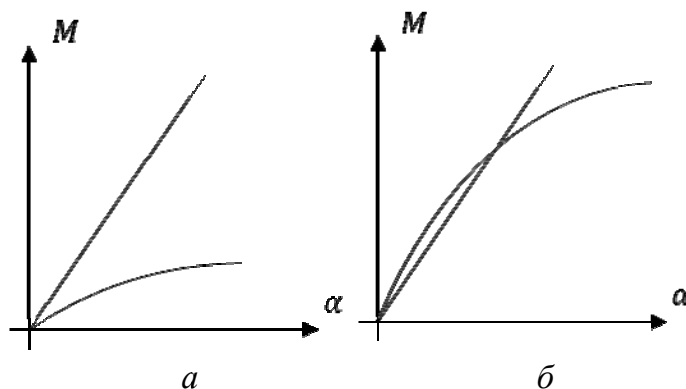


Рис. 4. Графическое решение уравнения равновесия рычага.

Видно, что в случае малой приложенной силы график синуса лежит ниже прямой и уравнение имеет только одно решение, соответствующее вертикальному положению рычага. При превышении некоторого предела, решений уравнения становится два. При этом вертикальное положение оказывается неустойчивым. Действительно, при малом отклонении от положения равновесия возвращающий момент сил оказывается меньше момента сил, увеличивающего отклонение. Таким образом, при преодолении критической силы положение равновесия окажется наклоненным. Критическую силу легко рассчитать, рассмотрев переходную от рис. 4 а к рис. 4 б ситуацию. В ней угловой коэффициент обоих графиков в нулевом положении должен совпадать, то есть:

$$F_{\max} l = \gamma \Rightarrow F_{\max} = \frac{\gamma}{l}.$$

б) Для нахождения нового положения равновесия можем воспользоваться формулой приближенного исчисления синуса угла:

$$Fl \left(\alpha - \frac{\alpha^3}{6} \right) = \gamma \alpha.$$

Сократим выражение на α , так как нулевой корень уравнения нас не интересует и решим квадратное уравнение:

$$Fl \left(1 - \frac{\alpha^2}{6} \right) = \gamma.$$

Два корня уравнения соответствуют двум возможным положениям отклонения рычага:

$$\alpha = \pm \sqrt{6 \left(1 - \frac{\gamma}{Fl}\right)} = \pm \sqrt{6 \left(1 - \frac{1}{1,01}\right)} = 0,24 \approx 14^\circ.$$

в) Рассмотрим теперь модель Пизанской башни, установленной на упругой опоре. Пусть основание башни наклонилось на угол φ (рис. 5). Тогда за счет сил упругости возникнет возвращающий момент сил. Рассчитаем его.

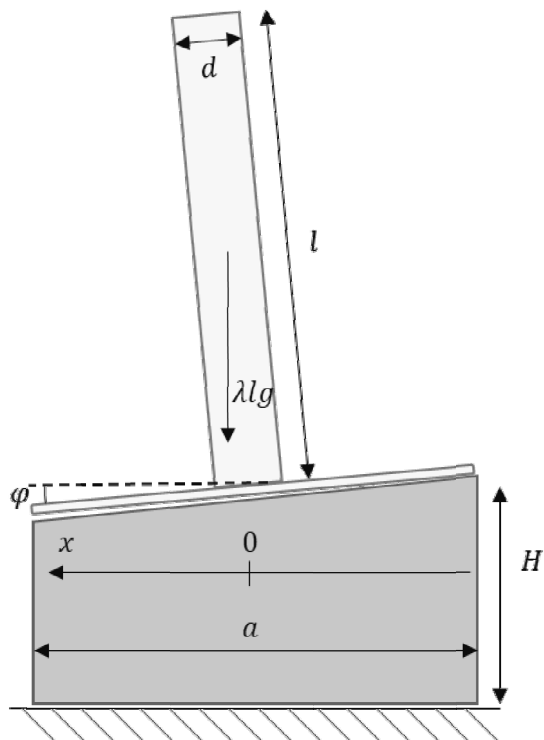


Рис. 5. Наклоненная башня.

На расстоянии x от осевой линии поролон сожмется на $x \cdot \operatorname{tg} \varphi$. Тогда в сечении поролона площадью $ds = a dx$ возникнет сила в соответствии с законом Гука:

$$dF = Eds\varepsilon = Ea \frac{x \cdot \operatorname{tg} \varphi}{H} dx.$$

Эта сила будет носить вклад в суммарный возвращающий момент сил:

$$dM = x dF = Ea \frac{x^2 \cdot \operatorname{tg} \varphi}{H} dx.$$

Тогда суммарный момент сил может быть рассчитан как:

$$M = 2 \int_0^{a/2} Ea \frac{\operatorname{tg} \varphi \cdot x^2}{H} dx = \frac{Ea^4 \cdot \operatorname{tg} \varphi}{12H}.$$

То есть для малых углов крутильная жесткость подставки составит:

$$\gamma' = \frac{Ea^4}{12H}.$$

На наклоненную башню действует момент силы тяжести равный:

$$M_6 = \lambda \frac{L^2}{2} g \sin \varphi.$$

Аналогично пункту а) башня выйдет из вертикального положения в случае равенства коэффициента пропорциональности между синусом моментом силы и крутильной жесткости опоры:

$$\frac{Ea^4}{12H} = \lambda \frac{L_1^2}{2} g,$$

$$L_1 = \sqrt{\frac{Ea^4}{6\lambda gH}}.$$

Рассмотрим наклонное равновесие башни:

$$\frac{Ea^4 \cdot \operatorname{tg} \varphi}{12H} = \lambda \frac{L^2}{2} g \sin \varphi.$$

С учётом приближенных формул:

$$\left(1 + \frac{\varphi^2}{3}\right) = \frac{L^2}{L_1^2} \left(1 - \frac{\varphi^2}{6}\right).$$

Предельный угол отклонения башни, прежде чем она опрокинется, определяется её высотой и диаметром:

$$\varphi_{\text{кр}} = \frac{d}{L}.$$

Тогда для расчета критической высоты башни запишем:

$$\left(1 + \frac{d^2}{3L_2^2}\right) = \frac{L_2^2}{L_1^2} \left(1 - \frac{d^2}{6L_2^2}\right).$$

Преобразуем уравнение к виду биквадратного:

$$\frac{L_2^4}{L_1^2} - L_2^2 \left(1 + \frac{d^2}{6L_1^2}\right) - \frac{d^2}{3} = 0.$$

Рассчитаем дискриминант:

$$D = \left(1 + \frac{d^2}{6L_1^2}\right)^2 + 4 \frac{d^2}{3L_1^2}.$$

С учетом указанного в условии приближения:

$$D = 1 + \frac{5d^2}{3L_1^2}.$$

Тогда выберем положительный корень уравнения:

$$L_2^2 = \frac{L_1^2}{2} \left(1 + \frac{d^2}{6L_1^2} + \sqrt{1 + \frac{5d^2}{3L_1^2}}\right) \approx \frac{L_1^2}{2} \left(1 + \frac{d^2}{6L_1^2} + 1 + \frac{5d^2}{6L_1^2}\right) = L_1^2 \left(1 + \frac{d^2}{2L_1^2}\right).$$

И окончательно для длины l_2 с учётом приближений:

$$L_2 = L_1 \sqrt{\left(1 + \frac{d^2}{2L_1^2}\right)} \approx L_1 \left(1 + \frac{d^2}{4L_1^2}\right)$$

Критерии оценивания

№	Критерий	Балл
5а.1	Составлено уравнение моментов для отклоненного от вертикали стержня.	1,0
5а.2	Проведён анализ уравнения моментов для различных углов отклонения стержня от вертикали.	1,0
5а.3	Получен ответ $F_{\max} = \frac{\gamma}{l}$	1,0
5б.1	Записано уравнение моментов с учётом приближённой формулы для синуса малого угла	1,0
5б.2	Найден угол отклонения стержня $\alpha \approx 0,24$ рад.	1,0
5в.1	Записано выражение для силы упругости в сечении поролоновой подушки площадью $ds = adx$, при наклонном положении основания, как функция координаты x на горизонтальной оси.	0,5
5в.2	Рассчитан суммарный момент сил, действующих на основание со стороны поролоновой подушки: $M = \frac{Ea^4 \cdot \operatorname{tg} \varphi}{12H}$, где φ – угол наклона основания относительно горизонта.	1,5
5в.3	Записано выражение для момента силы тяжести башни.	0,5
5в.4	Найдена высота башни L_1 : $L_1 = \sqrt{\frac{Ea^4}{6\lambda gH}}$.	1,5
5г.1	Составлено уравнение моментов для отклонённой от вертикали башни.	0,5
5г.2	Написано выражение для предельного угла отклонения башни от вертикали, прежде чем она опрокинется: $\varphi_{\text{кр}} = \frac{d}{L}$.	1,0
5г.3	Найдена высота башни L_2 : $L_2 = L_1 \sqrt{\left(1 + \frac{d^2}{2L_1^2}\right)} \approx L_1 \left(1 + \frac{d^2}{4L_1^2}\right)$.	1,5

Список рекомендуемой литературы

Ниже приведен список пособий и ресурсов сети «Интернет», которые могут быть полезны при подготовке к олимпиадам по физике. Также очень полезно познакомиться с публикациями в журнале «Квант», в особенности – со статьями и задачами, опубликованными в рубриках «Задачник "Кванта"», «Физический факультатив», «Практикум абитуриента», «Варианты вступительных испытаний» и «Олимпиады».

1. Зубов В. Г., Шальнов В. П. Задачи по физике. – М.: Гостехиздат, 1952. – 320 с. (и все последующие издания до 11-го, М.: Новая волна, 2000).
2. Бендриков Г. А., Буховцев Б. Б., Керженцев В. В., Мякишев Г. Я. Задачи по физике для поступающих в вузы. – М.: Наука, 1980. – 384 с. (и все последующие издания до 10-го, М.: Физматлит, 2003).
3. Буховцев Б. Б., Кривченков В. Д., Мякишев Г. Я., Сараева И. М. Сборник задач по элементарной физике: Пособие для самообразования. – М.: Наука, 1964. – 440 с. (и все последующие издания до 7-го, М.: УНЦ ДО МГУ, 2004).
4. Буздин А. И., Ильин В. А., Кривченков И. В., Кротов С. С., Свешников Н. А. Задачи московских физических олимпиад / Под ред. С. С. Кротова. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. – 192 с. – (Библиотечка «Квант». Вып. 60.) % 1968-1985 гг.
5. Варламов С.Д., Зинковский В.И., Семёнов М.В., Старокуров Ю.В., Шведов О.Ю., Якута А.А. Задачи Московских городских олимпиад по физике. 1986 – 2005. Приложение: олимпиады 2006 и 2007. (изд. 2-е, испр. и доп.) / Под ред. Семёнова М.В., Якуты А.А. – М.: Изд-во МЦНМО, 2007. – 696 с.
6. Буздин А. И., Зильберман А. Р., Кротов С. С. Раз задача, два задача... – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990. – 240 с. – (Библиотечка «Квант». Вып. 81.)
7. Слободецкий И. Ш., Асламазов Л. Г. Задачи по физике. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1980. – 176 с. – (Библиотечка «Квант». Вып. 5). А также 2-е изд. – М.: Бюро Квантум, 2001. – 160 с. (Библиотечка «Квант». Вып. 86).
8. Балаш В. А. Задачи по физике и методы их решения. – М.: Просвещение, 1964 (и все последующие издания до 4-го, М.: Просвещение, 1983).
9. Задачи по физике: Учебное пособие / Под ред. О. Я. Савченко. – 4-е изд., испр. – СПб.: Лань, 2001. – 368 с.
10. Лукашик В. И. Физическая олимпиада в 6--7 классах средней школы: Пособие для учащихся. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Просвещение, 1987. – 192 с.
11. Гольдфарб Н. И. Физика. Задачник. 10--11 кл.: пособие для общеобразовательных учреждений. – М.: Дрофа, 2006. – 398 с. (и все предыдущие издания).
12. Страница Московской физической олимпиады на сервере Кафедры общей физики Физического факультета МГУ: <http://genphys.phys.msu.ru/ol/>
13. Веб-сайт «Олимпиады для школьников»: <http://info.olimpiada.ru/>
14. Материалы журнала «Квант» в интернете: <http://kvant.mccme.ru/>
15. Архив материалов газеты «Физика» (Издательский дом «Первое сентября»): <http://fiz.1september.ru>

16. Интернет-библиотека МЦНМО: <http://ilib.mccme.ru/>
17. IPhO – International Physics Olympiads. Материалы международных физических олимпиад (на английском языке). <http://ipho.phy.ntnu.edu.tw/> /
18. Задачи вступительных испытаний и олимпиад по физике в МГУ (сборники за 2001–2017 гг.). – М.: Физический ф-т МГУ.
19. Драбович К.Н., Макаров В.А., Чесноков С.С. Физика. Практический курс для поступающих в университеты. – М.: Физматлит, 2006. – 544 с.
20. Драбович К.Н., Макаров В.А., Чесноков С.С. Подготовка к вступительным испытаниям в МГУ. Физика. 770 задач с подробными решениями. – М.: «Макс пресс», 2009. – 456 с.
21. Вишнякова Е.А., Макаров В.А., Семенов М.В., Черепецкая Е.Б., Чесноков С.С., Якута А.А. Отличник ЕГЭ. Физика. Решение сложных задач. / Под ред. В.А. Макарова, М.В. Семёнова, А.А. Якуты; ФИПИ. – М.: Интеллект–Центр, 2010. – 368 с.
22. Всероссийские олимпиады по физике. 1992--2004 / Под ред. С. М. Козела, В. П. Слободянина. – 2-е изд., доп. – М.: Вербум-М, 2005. – 534 с.

**ОЛИМПИАДЫ «Покори Воробьёвы Горы»
и «Московская олимпиада школьников»
ФИЗИКА
2025**

Подписано в печать 8.11.2025 г.
Объем 4,5 п.л. Тираж 1000 экз
Заказ

Физический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова
119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1, стр. 2

Отпечатано в отделе оперативной печати
физического факультета МГУ