Типовые[1] задачи к зачету по квантовой теории.

Весна 2026 г.

1 Математическое введение

1. Вычислите
$$\exp(i\hat{\ell}_z\varphi)\log(2\hat{x}\hat{p}_x/\hbar + \hat{y}\hat{p}_y/\hbar + \hat{z}\hat{p}_z/\hbar)\exp(-i\hat{\ell}_z\varphi)$$

2. Для гармонического осциллятора вычислите
$$\exp\left(\frac{1}{2}\xi\hat{a}^2 + \frac{1}{2}\xi(\hat{a}^+)^2\right)\cos(\hat{a}\hat{a}^+)\exp\left(-\frac{1}{2}\xi\hat{a}^2 - \frac{1}{2}\xi(\hat{a}^+)^2\right)$$

3. Вычислите $\sigma_2^{1/2}$.

4. Вычислите $f(\hat{A})$, где
$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 0 & i\sqrt{2} & 0 \\ -i\sqrt{2} & 0 & -i\sqrt{2} \\ 0 & i\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}, \qquad f(x) = \begin{cases} -2\sqrt{2}i & x < 0 \\ 2 & x = 0 \\ 2\sqrt{2}i & x > 0 \end{cases}$$

5. Вычислите $f(\hat{A})$, где
$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad f(x) = \begin{cases} 4i & x < 0 \\ -6i & x \geq 0. \end{cases}$$

6. Вычислите $\exp\left(\frac{1}{2}\xi\vec{n}\cdot\vec{\sigma}\right)(x_0 + \vec{x}\cdot\vec{\sigma})\exp\left(\frac{1}{2}\xi\vec{n}\cdot\vec{\sigma}\right)$ (здесь $\vec{n}$ — единичный вектор). Вспомните специальную теорию относительности и сообразите, какой у ответа физический смысл.

7. Вычислите $\exp\left(i\frac{1}{2}\varphi\vec{n}\cdot\vec{\sigma}\right)(\vec{b}\cdot\vec{\sigma})\exp\left(-i\frac{1}{2}\varphi\vec{n}\cdot\vec{\sigma}\right)$ (здесь $\vec{n}$ — единичный вектор). Сообразите, какой у ответа физический смысл.

8. Найдите собственные вектора и собственные значения оператора:
$H_{n,n+1} = H_{n+1,n} = -V$ при $1 \leq n < N-1$, $H_{n,n} = 2V$ при $1 \leq n \leq N-1$,
остальные $H_{n,m} = 0$. Какую систему описывает такой оператор?

9. Найдите собственные вектора и собственные значения оператора:
$H_{n,n+1} = H_{n+1,n} = -V$ при $1 \leq n < N$, $H_{n,n} = 2V$ при $1 \leq n \leq N$, $H_{N,1} = H_{1,N} = -V$,
остальные $H_{n,m} = 0$. Какую систему описывает такой оператор?

[1] На зачете могут быть предложены *аналогичные* задачи.

2 Спин

10. Волновая функция спина 1/2 равна

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}$$

Найти вероятности попадания в верхний и нижний пучок в приборе Штерна-Герлаха с полем, ориентированным по оси $\vec{n}(\theta, \varphi)$. При каких θ, φ вероятность попадания в верхний пучок достигает максимума? Чему равна эта максимальная вероятность?

11. Волновая функция спина 1/2 равна

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \sqrt{1/8} + i\sqrt{1/8} \\ -i\sqrt{3/4} \end{pmatrix}$$

Чему равно среднее значение проекции спина на ось $\vec{n}(\theta, \varphi)$? При каких θ, φ это среднее достигает максимума? Чему равно это максимальное среднее?

12. Частица со спином 1/2 находится в состоянии

$$\rho = \begin{pmatrix} b & c^* \\ c & a \end{pmatrix}$$

Каким условиям должны удовлетворять a, b, c? Найдите вероятности попадания в верхний и нижний пучок в приборе Штерна-Герлаха с полем, ориентированным по оси $\vec{n}(\theta, \varphi)$. При каких θ, φ вероятность попадания в верхний пучок достигает максимума? Чему равна эта максимальная вероятность?

13. Матрица плотности спина 1/2 равна

$$\hat{\rho} = \begin{pmatrix} 1/3 & -\sqrt{3/8} - i\sqrt{3/8} \\ -\sqrt{3/8} + i\sqrt{3/8} & 2/3 \end{pmatrix}.$$

Чему равно среднее значение проекции спина на ось $\vec{n}(\theta, \varphi)$? При каких θ, φ это среднее достигает максимума? Чему равно это максимальное среднее?

14. Спин 1/2 в начальный момент времени направлен по оси $(1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2})$. Он помещен в однородное магнитное магнитное поле, направленное по оси y. Найдите волновую функцию и направление спина в произвольный момент времени t, решив задачу в представлении Шредингера.

15. Спин 1/2 в начальный момент времени находится в чистом состоянии $|\psi\rangle = \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}$. Он помещен в однородное магнитное магнитное поле, направленное по оси x. Найдите направление спина в произвольный момент времени t, решив задачу в представлении Гайзенберга.

16. Спин 1/2 в начальный момент времени находится в состоянии $\rho(t = 0) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\xi\vec{n}\vec{\sigma}$. Он помещен в однородное магнитное магнитное поле, ориентированное по оси x. Найдите матрицу плотности, направление и степень поляризации в произвольный момент времени t, решив задачу в представлении Гайзенберга.

17. Спин $1/2$ в начальный момент времени находится в состоянии

$$\hat{\rho} = \begin{pmatrix} 2/3 & i/\sqrt{12} \\ -i/\sqrt{12} & 1/3 \end{pmatrix}.$$

Он помещен в однородное магнитное магнитное поле, ориентированное по оси x. Найдите направление и степень поляризации в произвольный момент времени t, решив задачу в представлении Шредингера.

18. Спин $1/2$ помещен в магнитное поле $\vec{H}(t) = (H_1 \cos \Omega t, -H_1 \sin \Omega t, H_0)$. В момент времени $t = 0$ спин был ориентирован вверх. Найдите вероятность переворота спина в момент времени t. Как выглядит условие электронного парамагнитного резонанса? Какие две интерпретации оно допускает?

19. Спин $1/2$ помещен в магнитное поле $\vec{H}(t) = (H_1 \cos \Omega t, H_1 \sin \Omega t, 0)$. В момент времени $t = 0$ спин был ориентирован по оси x. Найдите направление спина в момент времени t. При каком условии на Ω эволюция будет адиабатической?

20. Пучок частиц со спином $1/2$, ориентированным по оси x, влетает в прибор Штерна-Герлаха с полем по оси y. На выходе из прибора нижний пучок пролетает область магнитного поля H_y, время пролета τ. После этого пучки сводят вместе и направляют в прибор Штерна-Герлаха с полем по оси x. Найдите отношение интенсивностей пятен.

21. Пучок частиц со спином $1/2$ в состоянии $\hat{\rho} = \begin{pmatrix} 1/2 & i/4 \\ -i/4 & 1/2 \end{pmatrix}$ влетает в прибор Штерна-Герлаха с полем по оси x. На выходе из прибора верхний пучок пролетает область магнитного поля H_x, время пролета τ. После этого пучки сводят вместе и направляют в прибор Штерна-Герлаха с полем по оси y. Найдите отношение интенсивностей пятен.

22. Спин единица находится в состоянии с $s_z = -1$. Он влетает в прибор Штерна-Герлаха с полем, ориентированным по оси $\vec{n}(\theta, \varphi)$. Найти вероятности попадания в каждое из пятен.

3 Гармонический осциллятор

23. Для гармонического осциллятора вычислите $\langle n|xpx|m\rangle$.

24. Для гармонического осциллятора вычислите $\langle n|xppx|n\rangle$.

25. Для гармонического осциллятора вычислите $\langle 0|x^{2026}|2024\rangle$.

26. Одномерный гармонический осциллятор. В импульсном представлении найти явный вид волновой функции для когерентного состояния $|\alpha\rangle$.

27. Вычислите $\langle\beta|\hat{p}\hat{x}\hat{p}|\alpha\rangle$ для двух когерентных состояний. Как матричный элемент зависит от $|\alpha - \beta|$?

28. Для гармонического осциллятора вычислите среднее значение и дисперсию импульса в состоянии $|\psi\rangle = (1/2)|\alpha\rangle + (i\sqrt{3}/2)|\beta\rangle$, полагая $|\alpha - \beta| \gg 1$. Какие результаты с какими вероятностями и какими неопределенностями будут получаться при измерении импульса в этом состоянии?

29. Матрица плотности осциллятора имеет вид

$$\hat{\rho} = (1/2)|0\rangle\langle 0| + (1/3)|0\rangle\langle 1| + (1/3)|1\rangle\langle 0| + (1/2)|1\rangle\langle 1|.$$

Найдите среднее значение и дисперсию координаты.

30. Матрица плотности осциллятора имеет вид

$$\hat{\rho} = \sum_{n=0}^{\infty} (1 - \exp(-\gamma)) \cdot \exp(-\gamma n)\ |n\rangle\langle n|$$

(здесь $\gamma = \hbar\omega/kT$). Найдите среднее значение и дисперсию энергии, среднее значение координаты.

31. Гармонический осциллятор. В начальный момент времени волновая функция равна $\sqrt{\frac{2}{3}}|11\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}}|12\rangle$. Найдите среднее значение и дисперсию импульса в момент времени t, решая задачу в представлении Шредингера.

32. Гармонический осциллятор. В начальный момент времени волновая функция равна $\sqrt{\frac{1}{3}}|23\rangle + i\sqrt{\frac{2}{3}}|24\rangle$. Найдите среднее значение и дисперсию координаты в момент времени t, решая задачу в представлении Гайзенберга.

33. Гармонический осциллятор. В начальный момент времени волновая функция равна $\sqrt{\frac{1}{2}}|0\rangle + i\sqrt{\frac{1}{2}}|\alpha\rangle$ (здесь $|\alpha| \gg 1$). Найдите среднее значение и дисперсию координаты в момент времени t, решая задачу в представлении Шредингера.

34. Гармонический осциллятор. В начальный момент времени волновая функция равна $\sqrt{\frac{1}{2}}|0\rangle + \sqrt{\frac{1}{2}}|\alpha\rangle$ (здесь $|\alpha| \gg 1$). Найдите среднее значение и дисперсию импульса в момент времени t, решая задачу в представлении Гайзенберга.

35. Одномерный гармонический осциллятор в момент времени $t = 0$ находится в основном состоянии. Затем он на интервале $0 < t < t_0$ подвергается воздействию классической силы $f(t) = f_0 \sin(\omega t)$ (здесь $\omega = \sqrt{k/m}$). Найдите волновую функцию и вероятность обнаружить его на n-ом уровне в произвольный момент времени $t > t_0$. Чему при этом равна дисперсия координаты?

36. Одномерный гармонический осциллятор в момент времени $t = 0$ находился в когерентном состоянии $|\alpha\rangle$. На него действует классическая сила $f(t) = f_0\delta(t)$. Найдите волновую функцию и вероятность обнаружить его на n-ом уровне в произвольный момент времени $t > 0$. Чему при этом равна дисперсия импульса?

37. Найдите уровни энергии и волновые функции системы $H = p_x^2/(2m) + p_y^2/(2m) + kx^2/2 + qy^2/2 + \alpha xy$.

38. Найдите среднее значение и дисперсию оператора $\hat{p}_y$ для двух состояний двумерного симметричного гармонического осциллятора: $|\alpha_x\beta_y\rangle$ и $\sqrt{\frac{1}{2}}|\alpha_x 0_y\rangle + \sqrt{\frac{1}{2}}|0_x\beta_y\rangle$ (здесь $|\alpha| \gg 1$ и $|\beta| \gg 1$). Каков физический смысл полученных ответов?

39. Симметричный двумерный гармонический осциллятор в начальный момент времени находится в состоянии

$$|\psi(t=0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}|10\rangle - \frac{1}{\sqrt{3}}|01\rangle + \frac{i}{\sqrt{3}}|11\rangle$$

Найдите волновую функцию $|\psi(t)\rangle$, среднее значение и дисперсию операторов y и p_x в произвольный момент времени t.

40. Гамильтониан системы 7 частиц (одномерное движение) имеет вид

$$H = \sum_{n=1}^{7} \frac{p_n^2}{2m} + \sum_{n=1}^{7} k\frac{x_n^2}{2} + \sum_{m>n} q\frac{(x_m - x_n)^2}{2}$$

Найдите уровни энергии и волновые функции системы.

41. Гамильтониан системы 13 частиц (одномерное движение) имеет вид

$$H = \sum_{n=1}^{13} \frac{p_n^2}{2m} + \sum_{n=1}^{13} k\frac{x_n^2}{2} + \sum_{n=1}^{13} q\frac{(x_{n+1} - x_n)^2}{2}$$

(здесь $x_{14} \equiv x_1$). Найдите уровни энергии и волновые функции системы.

4 Одномерный кусочно-постоянный потенциал, периодический потенциал

42. Найдите уровни энергии в потенциале $V(|x| < a) = +V_0\delta(x - a) + V_0\delta(x + a) - U_0$, $V(|x| > a) = 0$.

43. Найдите уровни энергии в потенциале $V(|x| > a) = \infty$, $V(b < |x| < a) = 0$, $V(|x| < b) = U_0$.

44. Найдите уровни энергии в потенциале $V(x) = V_0\delta(x - a) + V_0\delta(x + a) - U_0\delta(x)$. Как их количество зависит от параметров задачи?

45. Найдите коэффициенты отражения и прохождения для потенциала $V(x < 0) = 0$, $V(x > 0) = -U_0 + V_0\delta(x)$.

46. Известно, что коэффициент прохождения на потенциале $V(|x| > a) = 0$, $V(|x| < a) = U_0 - V_0\delta(x)$ для частицы с энергией $E < U_0$ равен 1. Чему равно V_0 ? Считать барьер достаточно широким.

47. Найдите расположение разрешенных и запрещенных зон для одномерной решетки Дирака

$$V(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} V_0\delta(x - na)$$

48. Найдите расположение нижней разрешенной зоны для одномерной решетки Дирака

$$V(x) = -\sum_{n=-\infty}^{\infty} V_0\delta(x - na)$$

49. Найдите приповерхностные (Таммовские) уровни в потенциале

$$V(x > 0) = \sum_{n=1}^{\infty} V_0\delta(x - na), \qquad V(x < 0) = U_0.$$

50. Найдите коэффициент отражения на потенциале $\sum_{n=0}^{N-1} V_0\delta(x - na)$.

5 Квазиклассическое приближение

51. Найдите зависимость времени жизни α-активного ядра от энергии вылетающей α-частицы.

52. Найдите зависимость тока холодной эмиссии от величины приложенного электрического поля.

53. В квазиклассическом приближении найдите уровни энергии в потенциале $V(x<0)=\infty$, $V(0<x<a)=\epsilon x$, $V(x>a)=\infty$, полагая ϵ малым.

54. В ВКБ-приближении найдите уровни энергии в потенциале $V(x<0)=\infty$, $V(x>0)=\alpha x$

55. В ВКБ-приближении найдите уровни энергии в потенциале $V(x<0)=\infty$, $V(x>0)=kx^2/2$. Сравните с точным решением.

6 Теория момента

56. Вычислите $\langle \ell' m'|\ell_x \ell_y|\ell m\rangle$, $\langle \ell' m'|\ell_y \ell_x|\ell m\rangle$.

57. Даны волновые функции $|\psi\rangle = \exp(i\varphi \ell_y)|lm\rangle$, $|\chi\rangle = \exp(i\varphi \ell_y)|lm-2\rangle$. Найдите $\langle\chi|\ell_x\ell_z|\psi\rangle$.

58. Система двух спинов 1/2 находится в состоянии $|\psi\rangle = \exp(i\varphi S_y)|\uparrow\uparrow\rangle$. Чему равны вероятности $P_{S=1,S_z=1}$, $P_{S=1,S_z=0}$, $P_{S=1,S_z=-1}$, $P_{S=0,S_z=0}$?

59. Система двух спинов 1/2 находится в состоянии $S=0$. Оба спина пропускают сквозь прибор Штерна-Герлаха с полем, ориентированным по оси $\vec{n}(\theta,\varphi)$. Найдите вероятности всех 4 возможных результатов (вв,вн,нв,нн).

60. Волновая функция системы двух спинов имеет вид
$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}|\uparrow\uparrow\rangle - \frac{i}{\sqrt{3}}|\uparrow\downarrow\rangle - \frac{1}{\sqrt{3}}|\downarrow\uparrow\rangle$$
Найдите матрицы плотности первого и второго спинов и вероятность того, что полный спин равен 0.

61. Гамильтониан системы двух спинов 1/2 имеет вид
$$\hat{H} = -2\mu_1 s_z^{(1)} H_z - 2\mu_2 s_z^{(2)} H_z + \alpha \vec{s}^{(1)}\cdot\vec{s}^{(2)}$$
Найдите уровни энергии и соответствующие волновые функции.

62. Гамильтониан системы 3 спинов имеет вид $H=\alpha(\vec{s}_1\vec{s}_2+\vec{s}_2\vec{s}_3+\vec{s}_3\vec{s}_1)$. Найдите уровни энергии и соответствующие волновые функции.

63. Система трех спинов. Первые два находятся в состоянии
$$\frac{1}{\sqrt{2}}|\uparrow\uparrow\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|\downarrow\downarrow\rangle, \qquad \text{третий — в состоянии} \qquad |\psi\rangle = \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}.$$
В каком состоянии находится первый спин, если второй и третий находятся в состоянии
$$\frac{1}{\sqrt{2}}|\uparrow\downarrow\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|\downarrow\uparrow\rangle?$$

64. Система трех спинов. Первые два находятся в состоянии

$$\frac{1}{\sqrt{2}}|\uparrow\uparrow\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|\downarrow\downarrow\rangle, \qquad \text{третий — в состоянии} \quad |\psi\rangle = \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}.$$

В каком состоянии находится первый спин, если второй и третий находятся в одном из двух состояний:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}|\uparrow\downarrow\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|\downarrow\uparrow\rangle \quad \text{или} \quad \frac{1}{\sqrt{2}}|\uparrow\uparrow\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|\downarrow\downarrow\rangle?$$

При каком условии состояние первого спина окажется чистым?

65. Сложение двух спинов 1/2. Вычислите

$$\langle S=0, S_z=0|s_x^{(1)}|S=1, S_z=-1\rangle$$
$$\langle S=1, S_z=1|s_y^{(1)}|S=1, S_z=0\rangle$$
$$\langle S=0, S_z=0|s_z^{(2)}|S=1, S_z=0\rangle$$

66. Сложение орбитального момента и спина. Вычислите

$$\langle j=\ell+1/2, m_j=m+1/2|\ell_x|j=\ell+1/2, m_j=m-1/2\rangle$$
$$\langle j=\ell-1/2, m_j=m-1/2|\ell_y|j=\ell+1/2, m_j=m+1/2\rangle$$
$$\langle j=\ell+1/2, m_j=m+1/2|\ell_z|j=\ell-1/2, m_j=m+1/2\rangle$$

67. Частица со спином 1/2 находится в состоянии $|j\ell s m_j\rangle$. Найдите направление спина $\vec{n}(\tilde{\theta}, \tilde{\varphi})$ в точке с координатами (r, θ, φ).

68. Сложение моментов $l_1 = 2$ и $l_2 = 2$. Найдите $|L=2, M=2\rangle$, $|L=2, M=1\rangle$, $|L=2, M=0\rangle$.

69. Сложение моментов $l_1 = 5/2$ и $l_2 = 3/2$. Найдите $|L=1, M=1\rangle$, $|L=1, M=0\rangle$.

70. Сложение моментов $l_1 = \ell$ и $l_2 = 1$. Найдите $|j=\ell-1, m_j\rangle$

71. Гамильтониан системы двух спинов равен

$$H = -2\mu_1 s_x^{(1)} H_x - 2\mu_2 s_x^{(2)} H_x$$

В начальный момент времени спины обеих частиц направлены по оси “y”. Найдите $|\psi(t)\rangle$ и $P_{S=0}(t)$.

7 Центрально-симметричный потенциал

72. Найдите уровни энергии в центрально-симметричном потенциале $V(0<r<b)=0$, $V(b<r<a)=U_0$, $V(r>a)=\infty$.

73. Найдите уровни энергии в центрально-симметричном потенциале $V(r) = -V_0\delta(r-a)$. Сколько их штук? Как это согласуется с оценкой Баргмана?

74. Найдите уровни энергии в центрально-симметричном потенциале $V(r<a) = -U_0$, $V(r>a) = A/r^2$.

75. Найдите среднее значение кинетической энергии, потенциальной энергии, центробежного потенциала и величины $1/r^3$ для атома водорода, который находится в состоянии $|\psi_{nlm}\rangle$.