

Задача 2.1

Найти основное состояние двумерного симметричного гармонического осциллятора

$$\Phi[\psi] = \frac{\int dx dy \left[\frac{1}{2} (\vec{\nabla} \psi(x, y))^2 + (1.01)^2 \frac{\vec{x}^2}{2} \psi^2(x, y) \right]}{\int dx dy \psi^2(x, y)}$$

методом конечных элементов. Используйте треугольные конечные элементы, соответствующие полному полиному 5-го порядка (21 параметр; в каждой вершине сама функция, ее градиент и гессиан, на серединах сторон — производная по нормали к стороне, итого $3 * (1 + 2 + 3) + 3 = 21$). Замостите квадрат $-10 < x < 10, -10 < y < 10$ одинаковыми равнобедренными прямоугольными треугольниками:

- Треугольники в количестве $2 \times 30 \times 30$ штук с катетом $20./30 = 0.6666666666666666$ — ошибка в энергии должна составить около $4 \cdot 10^{-8}$
- Треугольники в количестве $2 \times 40 \times 40$ штук с катетом $20./40 = 0.5$ — ошибка в энергии должна составить около $2 \cdot 10^{-9}$

Учтите, что $(x + x_0)^2 = x^2 + 2xx_0 + x_0^2$. При генерации матриц квадратичных форм для числителя и знаменателя целесообразно воспользоваться системой аналитических вычислений.

Задача 2.2

Найти основное состояние двумерного симметричного гармонического осциллятора

$$\Phi[\psi] = \frac{\int dx dy \left[\frac{1}{2} (\vec{\nabla} \psi(x, y))^2 + (1.02)^2 \frac{\vec{x}^2}{2} \psi^2(x, y) \right]}{\int dx dy \psi^2(x, y)}$$

методом конечных элементов. Используйте треугольные конечные элементы, соответствующие полному полиному 5-го порядка (21 параметр; в каждой вершине сама функция, ее градиент и гессиан, на серединах сторон — производная по нормали к стороне, итого $3 * (1 + 2 + 3) + 3 = 21$). Замостите квадрат $-10 < x < 10, -10 < y < 10$ одинаковыми равнобедренными прямоугольными треугольниками:

- Треугольники в количестве $2 \times 30 \times 30$ штук с катетом $20./30 = 0.6666666666666666$ — ошибка в энергии должна составить около $4 \cdot 10^{-8}$
- Треугольники в количестве $2 \times 40 \times 40$ штук с катетом $20./40 = 0.5$ — ошибка в энергии должна составить около $2 \cdot 10^{-9}$

Учтите, что $(x + x_0)^2 = x^2 + 2xx_0 + x_0^2$. При генерации матриц квадратичных форм для числителя и знаменателя целесообразно воспользоваться системой аналитических вычислений.

Задача 2.3

Найти основное состояние двумерного симметричного гармонического осциллятора

$$\Phi[\psi] = \frac{\int dx dy \left[\frac{1}{2} (\vec{\nabla}\psi(x, y))^2 + (1.03)^2 \frac{\vec{x}^2}{2} \psi^2(x, y) \right]}{\int dx dy \psi^2(x, y)}$$

методом конечных элементов. Используйте треугольные конечные элементы, соответствующие полному полиному 5-го порядка (21 параметр; в каждой вершине сама функция, ее градиент и гессиан, на серединах сторон — производная по нормали к стороне, итого $3 * (1 + 2 + 3) + 3 = 21$). Замостите квадрат $-10 < x < 10, -10 < y < 10$ одинаковыми равнобедренными прямоугольными треугольниками:

- Треугольники в количестве $2 \times 30 \times 30$ штук с катетом $20./30 = 0.6666666666666666$ — ошибка в энергии должна составить около $4 \cdot 10^{-8}$
- Треугольники в количестве $2 \times 40 \times 40$ штук с катетом $20./40 = 0.5$ — ошибка в энергии должна составить около $2 \cdot 10^{-9}$

Учтите, что $(x + x_0)^2 = x^2 + 2xx_0 + x_0^2$. При генерации матриц квадратичных форм для числителя и знаменателя целесообразно воспользоваться системой аналитических вычислений.

Задача 2.4

Найти основное состояние двумерного симметричного гармонического осциллятора

$$\Phi[\psi] = \frac{\int dx dy \left[\frac{1}{2} (\vec{\nabla}\psi(x, y))^2 + (1.04)^2 \frac{\vec{x}^2}{2} \psi^2(x, y) \right]}{\int dx dy \psi^2(x, y)}$$

методом конечных элементов. Используйте треугольные конечные элементы, соответствующие полному полиному 5-го порядка (21 параметр; в каждой вершине сама функция, ее градиент и гессиан, на серединах сторон — производная по нормали к стороне, итого $3 * (1 + 2 + 3) + 3 = 21$). Замостите квадрат $-10 < x < 10, -10 < y < 10$ одинаковыми равнобедренными прямоугольными треугольниками:

- Треугольники в количестве $2 \times 30 \times 30$ штук с катетом $20./30 = 0.6666666666666666$ — ошибка в энергии должна составить около $4 \cdot 10^{-8}$

- Треугольники в количестве $2 \times 40 \times 40$ штук с катетом $20./40 = 0.5$ — ошибка в энергии должна составить около $2 \cdot 10^{-9}$

Учтите, что $(x + x_0)^2 = x^2 + 2xx_0 + x_0^2$. При генерации матриц квадратичных форм для числителя и знаменателя целесообразно воспользоваться системой аналитических вычислений.

Задача 2.5

Найти основное состояние двумерного симметричного гармонического осциллятора

$$\Phi[\psi] = \frac{\int dx dy \left[\frac{1}{2} (\vec{\nabla} \psi(x, y))^2 + (1.05)^2 \frac{\vec{x}^2}{2} \psi^2(x, y) \right]}{\int dx dy \psi^2(x, y)}$$

методом конечных элементов. Используйте треугольные конечные элементы, соответствующие полному полиному 5-го порядка (21 параметр; в каждой вершине сама функция, ее градиент и гессиан, на серединах сторон — производная по нормали к стороне, итого $3 * (1 + 2 + 3) + 3 = 21$). Замостите квадрат $-10 < x < 10, -10 < y < 10$ одинаковыми равнобедренными прямоугольными треугольниками:

- Треугольники в количестве $2 \times 30 \times 30$ штук с катетом $20./30 = 0.6666666666666666$ — ошибка в энергии должна составить около $4 \cdot 10^{-8}$
- Треугольники в количестве $2 \times 40 \times 40$ штук с катетом $20./40 = 0.5$ — ошибка в энергии должна составить около $2 \cdot 10^{-9}$

Учтите, что $(x + x_0)^2 = x^2 + 2xx_0 + x_0^2$. При генерации матриц квадратичных форм для числителя и знаменателя целесообразно воспользоваться системой аналитических вычислений.