Задача 1.1 Классические ортогональные полиномы: полиномы Чебышева 1-го рода.

Вычислить значения первых 20 полиномов Чебышева 1-го рода ($n = 0, \ldots, 19$), пользуясь формулой Родрига, рекуррентной формулой, производящей функцией и гипергеометрическим рядом. Сравнить полученные ответы (не вручную!). Сравнить эффективность (время работы) приведенных формул (showtime). Обменяйтесь опытом с коллегами.

$$T_n(x) = \frac{(-1)^n}{2^n f(1/2, n)} \sqrt{1 - x^2}\, \partial_x^n \Big[(1 - x^2)^{n-1/2} \Big]$$

$$T_{n+1} = 2xT_n - T_{n-1}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} T_n(x) z^n = 1/2 + \frac{1 - z^2}{2(1 - 2xz + z^2)}$$

$$T_n = F(-n, n, 1/2, \frac{1-x}{2})$$

здесь

$$F(a, b, c, x) = 1 + \frac{ab}{c} \frac{x^1}{1!} + \frac{f(a,2) f(b,2)}{f(c,2)} \frac{x^2}{2!} + \frac{f(a,3) f(b,3)}{f(c,3)} \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

где $f(a, n) = a(a+1)(a+2)\cdots(a+n-1)$. Учтите, что для полиномов гипергеометрический ряд, разумеется, обрывается на соответствующей степени.

Задача 1.2 Классические ортогональные полиномы.

Вычислить значения первых 20 полиномов Эрмита ($n = 0, \dots, 19$), пользуясь формулой Родрига, рекуррентной формулой, производящей функцией и гипергеометрическим рядом. Сравнить полученные ответы (не вручную!). Сравнить эффективность (время работы) приведенных формул (showtime). Обменяйтесь опытом с коллегами.

$$H_n(x) = (-1)^n \exp(x^2) \partial_x^n \Big[\exp(-x^2) \Big]$$

$$H_{n+1} = 2xH_n - 2nH_{n-1}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} z^n = \exp(2xz - z^2)$$

$$H_{2m} = \frac{(-1)^m (2m)!}{m!} \Phi(-m, 1/2, x^2),$$

$$H_{2m+1} = \frac{(-1)^m (2m+1)!}{m!} 2x\Phi(-m, 3/2, x^2)$$

здесь

$$\Phi(a, c, x) = 1 + \frac{a}{c}\frac{x^1}{1!} + \frac{f(a,2)}{f(c,2)}\frac{x^2}{2!} + \frac{f(a,3)}{f(c,3)}\frac{x^3}{3!} + \cdots$$

где $f(a, n) = a(a+1)(a+2) \cdots (a+n-1)$. Учтите, что для полиномов гипергеометрический ряд, разумеется, обрывается на соответствующей степени.

Задача 1.3 Классические ортогональные полиномы.

Вычислить значения первых 20 ($n = 0 \dots 19$) полиномов Якоби индексов $\alpha = 3/2, \beta = 0$, пользуясь формулой Родрига, рекуррентной формулой, производящей функцией и гипергеометрическим рядом. Для производящей функции ограничьтесь первыми 10 полиномами ($n = 0 \dots 9$). Сравнить полученные ответы (не вручную!). Сравнить эффективность (время работы) приведенных формул (showtime). Обменяйтесь опытом с коллегами.

$$P_n^{\alpha,\beta}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!}(1-x)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta}\partial_x^n\Big[(1-x)^{n+\alpha}(1+x)^{n+\beta}\Big]$$

$$2(n+1)(n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta)P_{n+1}^{\alpha,\beta} =$$
$$= (2n+\alpha+\beta+1)\{(2n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta+2)x+\alpha^2-\beta^2\}P_n^{\alpha,\beta} -$$
$$-2(n+\alpha)(n+\beta)(2n+\alpha+\beta+2)P_{n-1}^{\alpha,\beta}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n^{\alpha,\beta}(x)z^n = 2^{\alpha+\beta}(1-2xz+z^2)^{-1/2}(1-z+\sqrt{1-2xz+z^2})^{-\alpha}\times$$
$$\times(1+z+\sqrt{1-2xz+z^2})^{-\beta}$$

$$P_n^{\alpha,\beta}(x) = \frac{f(\alpha+1,n)}{n!}F(-n, n+\alpha+\beta+1, \alpha+1, \frac{1-x}{2})$$

здесь

$$F(a,b,c,x) = 1 + \frac{ab}{c}\frac{x^1}{1!} + \frac{f(a,2)f(b,2)}{f(c,2)}\frac{x^2}{2!} + \frac{f(a,3)f(b,3)}{f(c,3)}\frac{x^3}{3!} + \cdots$$

где $f(a,n) = a(a+1)(a+2)\cdots(a+n-1)$. Учтите, что для полиномов гипергеометрический ряд, разумеется, обрывается на соответствующей степени.

Задача 1.4 Классические ортогональные полиномы: полиномы Гегенбауэра.

Вычислить значения первых 20 ($n = 0 \ldots 19$) полиномов Гегенбауэра индекса $\lambda = 5/3$, пользуясь формулой Родрига, рекуррентной формулой, производящей функцией и гипергеометрическим рядом. Сравнить полученные ответы (не вручную!). Сравнить эффективность (время работы) приведенных формул (showtime). Обменяйтесь опытом с коллегами.

$$G_n^\lambda(x) = \frac{(-1)^n f(2\lambda, n)}{2^n n! f(\lambda + 1/2, n)} (1-x^2)^{1/2-\lambda} \partial_x^n \Big[(1-x^2)^{n+\lambda-1/2}\Big]$$

$$(n+1)G_{n+1}^\lambda = 2(n+\lambda)xG_n^\lambda - (n+2\lambda-1)G_{n-1}^\lambda$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} G_n^\lambda(x) z^n = (1-2xz+z^2)^{-\lambda}$$

$$G_n^\lambda = \frac{f(2\lambda, n)}{n!} F(-n, n+2\lambda, \lambda+1/2, \frac{1-x}{2})$$

здесь

$$F(a,b,c,x) = 1 + \frac{ab}{c}\frac{x^1}{1!} + \frac{f(a,2)f(b,2)}{f(c,2)}\frac{x^2}{2!} + \frac{f(a,3)f(b,3)}{f(c,3)}\frac{x^3}{3!} + \cdots$$

где $f(a,n) = a(a+1)(a+2)\cdots(a+n-1)$. Учтите, что для полиномов гипергеометрический ряд, разумеется, обрывается на соответствующей степени.

Задача 1.5 Классические ортогональные полиномы.

Вычислить значения первых 20 обобщенных полиномов Лягерра индекса $\alpha = 7/5$ ($n = 0, \ldots, 19$), пользуясь формулой Родрига, рекуррентной формулой, производящей функцией и гипергеометрическим рядом. Для производящей функции ограничьтесь первыми 15 полиномами ($n = 0 \ldots 14$). Сравнить полученные ответы (не вручную!). Сравнить эффективность (время работы) приведенных формул (showtime). Обменяйтесь опытом с коллегами.

$$L_n^\alpha(x) = \frac{1}{n!}\exp(x)x^{-\alpha}\partial_x^n\Big[\exp(-x)x^{n+\alpha}\Big]$$

$$(n+1)L_{n+1}^\alpha = (\alpha + 2n + 1 - x)L_n^\alpha - (n+\alpha)L_{n-1}^\alpha$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_n(x)^\alpha z^n = \frac{\exp(xz/(z-1))}{(1-z)^{\alpha+1}}$$

$$L_n^\alpha = \frac{f(\alpha+1,n)}{n!}\Phi(-n,\alpha+1,x)$$

здесь

$$\Phi(a,c,x) = 1 + \frac{a}{c}\frac{x^1}{1!} + \frac{f(a,2)}{f(c,2)}\frac{x^2}{2!} + \frac{f(a,3)}{f(c,3)}\frac{x^3}{3!} + \cdots$$

где $f(a,n) = a(a+1)(a+2)\cdots(a+n-1)$. Учтите, что для полиномов гипергеометрический ряд, разумеется, обрывается на соответствующей степени.

Задача 1.6 Классические ортогональные полиномы.

Вычислить значения первых 20 ($n = 0 \dots 19$) полиномов Якоби индексов $\alpha = 0$, $\beta = 3/2$, пользуясь формулой Родрига, рекуррентной формулой, производящей функцией и гипергеометрическим рядом. Для производящей функции ограничьтесь первыми 9 полиномами ($n = 0 \dots 8$). Сравнить полученные ответы (не вручную!). Сравнить эффективность (время работы) приведенных формул (showtime). Обменяйтесь опытом с коллегами.

$$P_n^{\alpha,\beta}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!}(1-x)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta}\partial_x^n\Big[(1-x)^{n+\alpha}(1+x)^{n+\beta}\Big]$$

$$2(n+1)(n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta)P_{n+1}^{\alpha,\beta} =$$

$$= (2n+\alpha+\beta+1)\{(2n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta+2)x+\alpha^2-\beta^2\}P_n^{\alpha,\beta} -$$

$$-2(n+\alpha)(n+\beta)(2n+\alpha+\beta+2)P_{n-1}^{\alpha,\beta}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n^{\alpha,\beta}(x)z^n = 2^{\alpha+\beta}(1-2xz+z^2)^{-1/2}(1-z+\sqrt{1-2xz+z^2})^{-\alpha}\times$$

$$\times(1+z+\sqrt{1-2xz+z^2})^{-\beta}$$

$$P_n^{\alpha,\beta}(x) = \frac{f(\alpha+1,n)}{n!}F(-n, n+\alpha+\beta+1, \alpha+1, \frac{1-x}{2})$$

здесь

$$F(a,b,c,x) = 1 + \frac{ab}{c}\frac{x^1}{1!} + \frac{f(a,2)f(b,2)}{f(c,2)}\frac{x^2}{2!} + \frac{f(a,3)f(b,3)}{f(c,3)}\frac{x^3}{3!} + \cdots$$

где $f(a,n) = a(a+1)(a+2)\cdots(a+n-1)$. Учтите, что для полиномов гипергеометрический ряд, разумеется, обрывается на соответствующей степени.

Задача 1.7 Классические ортогональные полиномы: полиномы Чебышева 2-го рода.

Вычислить значения первых 20 полиномов Чебышева 2-го рода ($n = 0, \ldots, 19$), пользуясь формулой Родрига, рекуррентной формулой, производящей функцией и гипергеометрическим рядом. Сравнить полученные ответы (не вручную!). Сравнить эффективность (время работы) приведенных формул (showtime). Обменяйтесь опытом с коллегами.

$$U_n(x) = \frac{(-1)^n(n+1)}{2^{n+1}f(1/2, n+1)} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \partial_x^n \Big[(1-x^2)^{n+1/2}\Big]$$

$$U_{n+1} = 2xU_n - U_{n-1}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} U_n(x) z^n = \frac{1}{1 - 2xz + z^2}$$

$$U_n = (n+1)F(-n, n+2, \frac{3}{2}, \frac{1-x}{2})$$

здесь

$$F(a,b,c,x) = 1 + \frac{ab}{c}\frac{x^1}{1!} + \frac{f(a,2)f(b,2)}{f(c,2)}\frac{x^2}{2!} + \frac{f(a,3)f(b,3)}{f(c,3)}\frac{x^3}{3!} + \cdots$$

где $f(a,n) = a(a+1)(a+2)\cdots(a+n-1)$. Учтите, что для полиномов гипергеометрический ряд, разумеется, обрывается на соответствующей степени.

Задача 1.8 Классические ортогональные полиномы: полиномы Гегенбауэра.

Вычислить значения первых 20 ($n = 0 \ldots 19$) полиномов Гегенбауэра индекса $\lambda = 2i$, пользуясь формулой Родрига, рекуррентной формулой, производящей функцией и гипергеометрическим рядом. **Избавьтесь от мнимых чисел в знаменателе.** Сравнить полученные ответы (не вручную!). Сравнить эффективность (время работы) приведенных формул (showtime). Обменяйтесь опытом с коллегами.

$$G_n^\lambda(x) = \frac{(-1)^n f(2\lambda, n)}{2^n n! f(\lambda + 1/2, n)} (1 - x^2)^{1/2-\lambda} \partial_x^n \Big[(1 - x^2)^{n+\lambda-1/2} \Big]$$

$$(n + 1)G_{n+1}^\lambda = 2(n + \lambda)xG_n^\lambda - (n + 2\lambda - 1)G_{n-1}^\lambda$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} G_n^\lambda(x) z^n = (1 - 2xz + z^2)^{-\lambda}$$

$$G_n^\lambda = \frac{f(2\lambda, n)}{n!} F(-n, n + 2\lambda, \lambda + 1/2, \frac{1 - x}{2})$$

здесь

$$F(a, b, c, x) = 1 + \frac{ab}{c}\frac{x^1}{1!} + \frac{f(a, 2)f(b, 2)}{f(c, 2)}\frac{x^2}{2!} + \frac{f(a, 3)f(b, 3)}{f(c, 3)}\frac{x^3}{3!} + \cdots$$

где $f(a, n) = a(a+1)(a+2)\cdots(a+n-1)$. Учтите, что для полиномов гипергеометрический ряд, разумеется, обрывается на соответствующей степени.

Задача 1.9 Классические ортогональные полиномы.

Вычислить значения первых 20 обобщенных полиномов Лягерра индекса $\alpha = 3i$ ($n = 0, \ldots, 19$), пользуясь формулой Родрига, рекуррентной формулой, производящей функцией и гипергеометрическим рядом. **Избавьтесь от мнимых чисел в знаменателе.** Для производящей функции ограничьтесь первыми 15 полиномами ($n = 0 \ldots 14$). Сравнить полученные ответы (не вручную!). Сравнить эффективность (время работы) приведенных формул (showtime). Обменяйтесь опытом с коллегами.

$$L_n^\alpha(x) = \frac{1}{n!}\exp(x)x^{-\alpha}\partial_x^n\Big[\exp(-x)x^{n+\alpha}\Big]$$

$$(n+1)L_{n+1}^\alpha = (\alpha + 2n + 1 - x)L_n^\alpha - (n+\alpha)L_{n-1}^\alpha$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_n(x)^\alpha z^n = \frac{\exp(xz/(z-1))}{(1-z)^{\alpha+1}}$$

$$L_n^\alpha = \frac{f(\alpha+1,n)}{n!}\Phi(-n,\alpha+1,x)$$

здесь

$$\Phi(a,c,x) = 1 + \frac{a}{c}\frac{x^1}{1!} + \frac{f(a,2)}{f(c,2)}\frac{x^2}{2!} + \frac{f(a,3)}{f(c,3)}\frac{x^3}{3!} + \cdots$$

где $f(a,n) = a(a+1)(a+2)\cdots(a+n-1)$. Учтите, что для полиномов гипергеометрический ряд, разумеется, обрывается на соответствующей степени.

Задача 1.10 Классические ортогональные полиномы.

Вычислить значения первых 20 полиномов Лежандра ($n = 0, \ldots, 19$), пользуясь формулой Родрига, рекуррентной формулой, производящей функцией и гипергеометрическим рядом. Сравнить полученные ответы (не вручную!). Сравнить эффективность (время работы) приведенных формул (showtime). Обменяйтесь опытом с коллегами.

$$P_n(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \partial_x^n \Big[(1-x^2)^n \Big]$$

$$(n+1)P_{n+1} = (2n+1)xP_n - nP_{n-1}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) z^n = \frac{1}{\sqrt{1 - 2xz + z^2}}$$

$$P_n = F(-n, n+1, 1, \frac{1-x}{2})$$

$$F(a,b,c,x) = 1 + \frac{ab}{c}\frac{x^1}{1!} + \frac{f(a,2)f(b,2)}{f(c,2)}\frac{x^2}{2!} + \frac{f(a,3)f(b,3)}{f(c,3)}\frac{x^3}{3!} + \cdots$$

где $f(a,n) = a(a+1)(a+2)\cdots(a+n-1)$. Учтите, что для полиномов гипергеометрический ряд, разумеется, обрывается на соответствующей степени.