Олимпиада «Ломоносов 2018-2019» по физике

Отборочный этап

В 2018/2019 учебном году олимпиада «Ломоносов» по физике в МГУ проводилась в два этапа – отборочный и заключительный. Отборочный этап проходил в форме заочного испытания. На этом этапе каждый ученик 7-го – 11-го классов мог участвовать по собственному выбору в одном или двух турах, проводимых по единой форме. Задания каждого из туров были равноценными по сложности и составлялись раздельно для учащихся младших (7-х – 9-х) и старших (10-х – 11-х) классов. Эти задания были размещены в личных кабинетах участников на сайте http://olymp.msu.ru. Доступ к условиям заданий был открыт для участников дважды: с 13 по 17 ноября 2018 года (1-й тур) и с 6 по 10 декабря 2018 года (2-й тур). Прием решений и ответов по каждому из туров прекращался одновременно с их завершением.

Победители и призеры отборочного этапа были приглашены для участия в заключительном этапе олимпиады. Ниже приводятся примеры заданий для участников отборочного тура олимпиады Ломоносов. Поскольку числовые данные в условиях задач для каждого участника были индивидуальными, приводимые здесь решения задач и ответы к ним приведены в общем виде.

Задание для 7-х – 9 классов

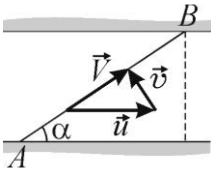
Первый тур

1. Одной из характеристик писчей бумаги является ее плотность σ, для измерения которой обычно используется внесистемная единица г/м^2. Какое давление p оказывает на стол лист бумаги плотностью σ? Ускорение свободного падения примите равным g = 10 м/с^2.

Решение. Сила тяжести, действующая на лист бумаги площадью S, равна $P=\sigma Sg$. Давление, оказываемое листом на стол, $p=\dfrac{P}{S}$. **Ответ:** $p=\sigma g$.

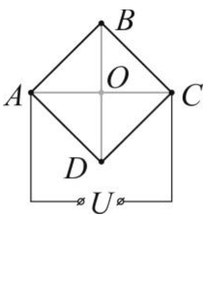
2. Мальчик переплывает реку, двигаясь по прямой из точки A, находящейся на одном берегу реки, в точку B, находящуюся ниже по течению на противоположном берегу реки, за время τ. Скорость течения реки u = 1 м/с. Найдите ширину реки h, если известно, что модуль скорости мальчика относительно воды v = 0,8 м/с, а вектор этой скорости перпендикулярен прямой AB.

Решение. Скорость мальчика относительно берега $\vec{V}$ складывается из скорости мальчика относительно воды и скорости течения, т.е. $\vec{V}=\vec{v}+\vec{u}$. При этом вектор $\vec{V}$ направлен вдоль



отрезка AB. По условию задачи вектор $\vec{v}$ направлен перпендикулярно этому отрезку, поэтому эти три вектора образуют прямоугольный треугольник, как показано на рисунке. Из рисунка видно, что $\sin\alpha=\dfrac{v}{u}=\dfrac{L}{AB}$. Отсюда $L=\dfrac{v}{u}AB$. Длина отрезка AB равна $V\tau$, причем значение скорости V можно найти по теореме Пифагора. Имеем $AB=V\tau=\sqrt{u^2-\upsilon^2}\cdot\tau$. Окончательно для ширины реки получаем выражение $L=\dfrac{v}{u}AB=\dfrac{v\tau}{u}\sqrt{u^2-v^2}$. **Ответ:** $L=\dfrac{v\tau}{u}\sqrt{u^2-v^2}$.

3. Из медной проволоки площадью поперечного сечения s = 0,5 мм^2 изготовлен контур,



имеющий форму квадрата $ABCD$ со стороной a = 1 м, а из алюминиевой проволоки того же сечения – его диагонали AC и BD, соединенные в точке O (см. рисунок). Вершины A и C подключены к источнику постоянного напряжения U. Найдите мощность N, выделяющуюся в рассматриваемой цепи, если сопротивление подводящих проводов пренебрежимо мало. Удельное сопротивление меди $\rho_м$ = 0,018 Ом·мм^2/м, удельное сопротивление алюминия $\rho_а$ = 0,028 Ом·мм^2/м.

Решение. Из соображений симметрии ясно, что по диагонали BD ток не течет и ее можно удалить из схемы. Используя стандартные формулы для расчета сопротивления последовательно и параллельно соединенных проводников, находим, что сопротивление цепи $R = \frac{R_{AB}R_{AC}}{R_{AB}+R_{AC}}$, где $R_{AB} = \frac{\rho_м a}{s}$, $R_{AC} = \frac{\rho_а a\sqrt{2}}{s}$. Следовательно, $R = \frac{\rho_м \rho_а a\sqrt{2}}{s(\rho_м + \rho_а\sqrt{2})}$. По закону Джоуля–Ленца $N = \frac{U^2}{R} = \frac{U^2 s(\rho_м + \rho_а\sqrt{2})}{\rho_м\rho_а a\sqrt{2}}$. **Ответ:** $N = \frac{U^2 s(\rho_м + \rho_а\sqrt{2})}{\rho_м\rho_а a\sqrt{2}}$.

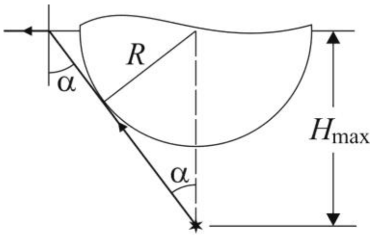
4. С какой минимальной скоростью $v_{\min}$ должен влететь в атмосферу Земли метеорит, состоящий из железа, чтобы полностью расплавиться в воздухе, если на нагрев метеорита расходуется относительная доля его начальной кинетической энергии, равная α? Начальная температура метеорита t_0 = –261 ºС. Удельную теплоёмкость железа считайте равной c = 460 Дж/(кг ºС), температуру плавления железа – $t_{пл}$ = 1539 ºС, удельную теплоту плавления железа – λ = 270 кДж/кг.

Решение. Метеор нагревается и плавится в результате превращения части его кинетической энергии во внутреннюю энергию. Уравнение теплового баланса имеет вид $\alpha\frac{mv_{\min}^2}{2} = mc(t_{пл} - t_0) + \lambda m$, где m – масса метеорита. Отсюда $v_{\min} = \sqrt{\frac{2c(t_{пл} - t_0) + 2\lambda}{\alpha}}$.

Ответ: $v_{\min} = \sqrt{\frac{2\left(c(t_{пл} - t_0) + \lambda\right)}{\alpha}}$.

5. На поверхности воды плавает непрозрачный шар радиусом R, наполовину погруженный в воду. На какой максимальной глубине $H_{\max}$ нужно поместить под центром шара точечный источник света, чтобы ни один световой луч не прошел в воздух? Показатель преломления воды n = 1,33.

Решение. Искомое положение источника изображено на рисунке. Оно определяется из условия, что касательные к шару лучи света, испущенные источником, падают на границу раздела "вода – воздух" под предельным углом полного отражения. В этом случае действительно ни один луч от источника не выйдет в воздух, т.к. часть лучей будет перекрыта шаром, а все остальные лучи заведомо испытают полное отражение на границе раздела сред. Если переместить источник на меньшую глубину, свет по-прежнему не выйдет из воды, если же наоборот погрузить источник глубже, чем $H_{\max}$, то найдется часть лучей, которые будут падать на границу под углами, меньшими предельного угла полного отражения, и пройдут в воздух. Минимальный угол α падения луча на границу "вода – воздух" определяется равенством $\sin\alpha = \frac{R}{H_{\max}}$. Поскольку при полном отражении $\sin\alpha = \frac{1}{n}$, то $H_{\max} = Rn$.

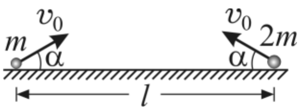


Ответ: $H_{\max} = Rn$.

Задание для 10-х – 11-х классов

Первый тур

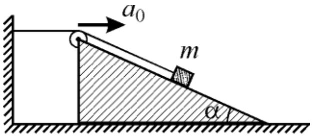
1. Два пластилиновых шарика массами m и $2m$ одновременно бросают навстречу друг к другу с одинаковыми скоростями $v_0 = 5$ м/с, лежащими в одной вертикальной плоскости и образующими с горизонтом углы $\alpha = 30°$. Точки бросания шариков находятся на поверхности земли на расстоянии l друг от друга. После соударения шарики слипаются и движутся далее как одно тело. Найдите время τ полета этого тела от момента соударения до момента падения на землю. Ускорение свободного падения примите равным $g = 10$ м/с^2. Сопротивлением воздуха можно пренебречь.



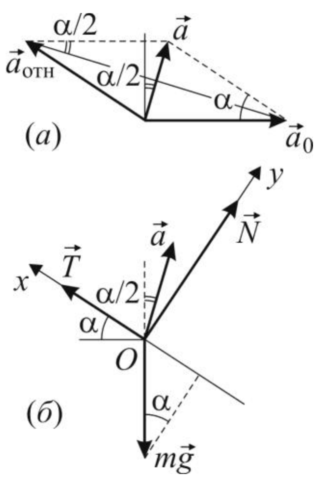
Решение. Столкновение шариков произойдет в воздухе на равных расстояниях от точек бросания. Пренебрегая импульсом силы тяжести за время соударения, по закону сохранения импульса в проекции на вертикальную ось имеем: $mv_y + 2mv_y = 3mv'_y$. Отсюда следует, что вертикальная составляющая скорости шариков после соударения не изменится. Полное время движения шариков от момента бросания до момента падения на землю $t_0 = \dfrac{2v_0 \sin\alpha}{g}$, а время движения до соударения $t_1 = \dfrac{l}{2v_0 \cos\alpha}$. Искомое время $\tau = t_0 - t_1 = \dfrac{2v_0 \sin\alpha}{g} - \dfrac{l}{2v_0\cos\alpha}$.

Ответ: $\tau = \dfrac{2v_0 \sin\alpha}{g} - \dfrac{l}{2v_0\cos\alpha}$.

2. Клин с углом $\alpha = 30°$ при вершине находится на горизонтальном столе. На поверхности клина располагается брусок массой m, к которому привязана невесомая нерастяжимая нить. Второй конец нити перекинут через блок на клине и прикреплен к неподвижной опоре. При этом отрезок нити от опоры до блока горизонтален, а отрезок нити от блока до бруска параллелен поверхности клина. Найдите модуль T силы натяжения нити, если клин двигают по столу вправо с ускорением $a_0 = 2$ м/с^2. Движение всех тел происходит в плоскости рисунка. Трением можно пренебречь. Ускорение сводного падения примите равным $g = 10$ м/с^2.



Решение. Ускорение $\vec{a}$ бруска в неподвижной системе отсчета равно $\vec{a} = \vec{a}_0 + \vec{a}_{\text{отн}}$. При этом относительное ускорение бруска $\vec{a}_{\text{отн}}$ направлено вдоль наклонной поверхности клина вверх и, поскольку длина нити постоянна, по модулю совпадает с a_0. Из рисунка ($а$) видно, что $a = 2a_0 \sin\dfrac{\alpha}{2}$, а вектор $\vec{a}$ образует с вертикалью угол $\alpha/2$. Силы, действующие на брусок в неподвижной системе отсчета, изображены на рисунке ($б$), где $m\vec{g}$ – сила тяжести, $\vec{T}$ – сила натяжения нити, $\vec{N}$ – сила реакции наклонной поверхности клина. Записывая уравнение движения бруска в проекции на ось Ox, имеем: $ma\sin\dfrac{\alpha}{2} = T - mg\sin\alpha$. Используя полученное выше выражение для a, а также формулу $2\sin^2\dfrac{\alpha}{2} = 1 - \cos\alpha$, получаем, что $T = mg\sin\alpha + ma_0(1-\cos\alpha)$. **Ответ:** $T = m\cdot\left(g\sin\alpha + a_0(1-\cos\alpha)\right)$.



3. В вертикально расположенном цилиндрическом сосуде под невесомым подвижным поршнем содержится некоторое количество идеального газа. Газ медленно нагревают так, что он совершает работу A. Во сколько раз α изменяется при этом среднее число соударений молекул газа с единичной площадкой на стенке сосуда за единицу времени? Начальный объем газа $V_0 = 10$ л, атмосферное давление $p_0 = 10^5$ Па. Трение между поршнем и стенками сосуда считайте пренебрежимо малым.

Решение. Число соударений молекул с единичной площадкой за единицу времени равно $\bar{Z}=\frac{1}{2}n\overline{|v_x|}$, где n − концентрация молекул, а $\overline{|v_x|}$ − средний модуль проекции скоростей молекул на направление, перпендикулярное стенке. Чтобы оценить $\overline{|v_x|}$, воспользуемся выражением для среднеквадратичной скорости молекул, а именно $\sqrt{\overline{v^2}}=\sqrt{\frac{3RT}{M}}$, где R − универсальная газовая постоянная, T − абсолютная температура, а M − молярная масса газа. Поскольку $v^2=v_x^2+v_y^2+v_z^2$, а в силу хаотичности движения молекул $\overline{v_x^2}=\overline{v_y^2}=\overline{v_z^2}$, то $\overline{v_x^2}=\frac{1}{3}\overline{v^2}$ и $\sqrt{\overline{v_x^2}}=\sqrt{\frac{\overline{v^2}}{3}}=\sqrt{\frac{RT}{M}}$. Из соображений размерности ясно, что $\overline{|v_x|}$ отличается от $\sqrt{\overline{v_x^2}}$ только некоторым числовым множителем. Поэтому $\bar{Z}\sim n\sqrt{T}$. Следовательно, искомое отношение числа соударений $\alpha=\frac{\bar{Z}_1}{\bar{Z}_0}=\frac{n_1}{n_0}\sqrt{\frac{T_1}{T_0}}=\frac{V_0}{V_1}\sqrt{\frac{T_1}{T_0}}$, где V_1 и T_1 − объем и температура газа в конечном состоянии, T_0 − начальная температура газа. Работа газа в изобарном процессе $A=p_0(V_1-V_0)=\nu R(T_1-T_0)$, где $\nu=\frac{p_0V_0}{RT_0}$ − количество газа. Из этих равенств находим, что $\frac{V_1}{V_0}=\left(1+\frac{A}{p_0V_0}\right)$, $\frac{T_1}{T_0}=\left(1+\frac{A}{p_0V_0}\right)$. Подставляя найденные соотношения в формулу для α, получаем, что $\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+A/(p_0V_0)}}$. **Ответ:** $\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+A/(p_0V_0)}}$.

4. В демонстрационной модели генератора переменного тока плоская проволочная рамка площадью S = 0,02 м^2 равномерно вращается в однородном магнитном поле. Ось вращения перпендикулярна вектору магнитной индукции поля, модуль которого равен B = 0,3 Тл. Через токосъёмные контактные кольца к рамке подключают лампочку от карманного фонарика с вольфрамовой нитью накаливания. До какой температуры t нагревается эта нить, если мощность светового излучения лампочки равна $P_{св}$? Относительная доля работы тока, преобразованной в это излучение, равна η = 0,9. Сопротивление нити накаливания при температуре 0 ºС равно R_0 = 1 Ом. Температурный коэффициент сопротивления вольфрама считайте равным α = 0,005 К$^{-1}$. Угловая скорость вращения рамки ω = 300 рад/с. Сопротивлением и индуктивностью рамки можно пренебречь.

Решение. Мощность, выделяющаяся в лампочке, равна $P=\frac{1}{2}\frac{\mathcal{E}_0^2}{R}$, где R – сопротивление лампочки, $\mathcal{E}_0=BS\omega$ –амплитудное значение ЭДС электромагнитной индукции. Сопротивление нити накаливания лампочки при рабочей температуре $R=R_0\left(1+\alpha(t-0\,°\mathrm{C})\right)$. Относительная доля работы тока, преобразованной в световое излучение лампочки, равна $\eta=\frac{P_{св}}{P}$. Решая совместно записанную систему уравнений, получаем, что $t=\frac{\eta\cdot B^2\cdot S^2\cdot\omega^2}{2P_{св}R_0\alpha}-\frac{1}{\alpha}$.

Ответ: $t=\frac{\eta\cdot B^2\cdot S^2\cdot\omega^2}{2P_{св}R_0\alpha}-\frac{1}{\alpha}$.

5. Расстояние от предмета до экрана L. Какое максимальное увеличение $\Gamma_{\max}$ изображения предмета на экране можно получить с помощью тонкой линзы с фокусным расстоянием F = 10 см? Ответ округлите до сотых.

Решение. Обозначим через a и b расстояния от предмета до линзы и от линзы до экрана. По формуле тонкой линзы $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{F}$, а по условию $b=L-a$. Из записанных выражений получаем квадратное уравнение относительно a, а именно $a^2-La+LF=0$. Корни этого уравнения $a_{1,2}=\frac{L}{2}\left(1\pm\sqrt{1-4F/L}\right)$. Поэтому $b_{1,2}=\frac{L}{2}\left(1\mp\sqrt{1-4F/L}\right)$. Увеличение, даваемое линзой, $\Gamma=\frac{b}{a}$. Это выражение максимально, если $b=b_{\max}=b_2$, $a=a_{\min}=a_2$. Следовательно, $\Gamma_{\max}=\frac{1+\sqrt{1-4F/L}}{1-\sqrt{1-4F/L}}$.

Ответ: $\Gamma_{\max}=\frac{1+\sqrt{1-4F/L}}{1-\sqrt{1-4F/L}}$.

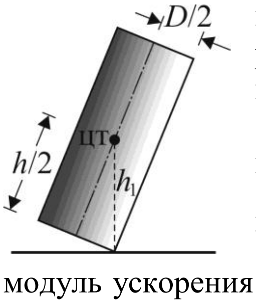
Заключительный этап

Проведение заключительного этапа олимпиады «Ломоносов» было назначено на 22 февраля 2019 года. Для учащихся всех классов этот этап проводился в очной форме на физическом факультете МГУ и на трех региональных площадках в городах Астана (Казахстан), Белгород и Невинномысск. Задание для учащихся 7-х − 8-х а также 9-х классов состояло из четырех задач по темам, изучаемым в рамках программы по физике для основной общеобразовательной школы. Задания для учащихся 10-х – 11-х классов были составлены в полном соответствии с Кодификатором ЕГЭ 2019 года по физике и охватывали основные разделы Кодификатора, а именно, 1) механику, 2) молекулярную физику и термодинамику, 3) электродинамику и 4) оптику. Типовое задание состояло из четырех различных разделов, состоящих из задач и уточняющих вопросов по теории. В первом разделе были помещены задания по механике, во втором разделе – задания по молекулярной физике и термодинамике, в третьем разделе – задания по электродинамике, в четвертом разделе – задания по оптике
Ниже приводятся задания заключительного этапа олимпиады «Ломоносов – 2018/2019»

Задание для 7-х – 8-х классов

1. Сплошной однородный цилиндр высотой h = 8 см и диаметром основания D = 6 см стоит на горизонтальной плоскости. Медленно наклоняя цилиндр, его опрокидывают. Во сколько раз n энергия, выделившаяся при падении цилиндра на стол, превысит минимальную работу, совершенную при его опрокидывании? Ответ округлите до десятых.

Решение. Поскольку в начальном, промежуточном и конечном состояниях цилиндра его кинетическая энергия равна нулю, совершенная при опрокидывании цилиндра работа и выделившаяся при его падении энергия равны соответствующим изменениям его потенциальной энергии. Потенциальная энергия цилиндра относительно стола определяется высотой над столом его центра тяжести, который совпадает с геометрическим центром цилиндра. Начальная потенциальная энергия цилиндра $E_{\Pi 0}=\frac{mgh}{2}$, где m – масса цилиндра, g – модуль ускорения свободного падения. Цилиндр начнет опрокидываться при таком угле наклона, при котором вертикаль, проведенная из центра тяжести, выйдет за пределы опоры (см. рисунок).



Потенциальная энергия в момент опрокидывания $E_{\Pi 1}=mgh_1=\frac{mg\sqrt{h^2+D^2}}{2}$. Конечная потенциальная энергия цилиндра $E_{П2} = \frac{mgD}{2}$. Выделившаяся при падении цилиндра энергия $E = E_{П1} - E_{П2} = \frac{mg}{2}\left(\sqrt{h^2 + D^2} - D\right)$. Работа, затраченная на приведение цилиндра в наклонное положение, $A = E_{П1} - E_{П0} = \frac{mg}{2}\left(\sqrt{h^2 + D^2} - h\right)$. Из записанных выражений находим, что $n = \frac{E}{A} = \frac{\sqrt{h^2 + D^2} - D}{\sqrt{h^2 + D^2} - h}$. **Ответ:** $n = \frac{\sqrt{h^2 + D^2} - D}{\sqrt{h^2 + D^2} - h} \approx 2$.

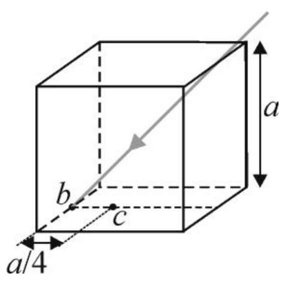
2. В чайник со свистком налили воду массой $m_1 = 1$ кг и поставили на электрическую плитку. Через время $\tau_1 = 6$ мин вода закипела и раздался свисток. Какова масса m_2 воды, оставшейся в чайнике после кипения воды, продолжавшегося в течение еще $\tau_2 = 2$ мин? Начальная температура воды $t = 20$ °С, температура кипения воды $t_к = 100$ °С. Удельная теплота парообразования воды $r = 2{,}3$ МДж/кг, а ее удельная теплоёмкость $c = 4{,}2$ кДж/(кг·°С). Теплоемкостью чайника и потерями теплоты за счет рассеяния в окружающую среду можно пренебречь.

Решение. Количество теплоты, необходимое для того чтобы нагреть воду до температуры кипения, $Q_1 = cm_1(t_к - t)$, где $t_к$ температура кипения. Количество теплоты, требующееся для превращения воды массой Δm в пар, $Q_2 = r\Delta m$. Количество теплоты, полученное от плитки мощностью N за время τ, равно $N\tau$. Согласно уравнению теплового баланса имеем $N\tau_1 = cm_1(t_к - t)$, $N\tau_2 = r\Delta m$. Отсюда $\Delta m = \frac{cm_1(t_к - t)\tau_2}{r\tau_1}$ и $m_2 = m_1 - \Delta m = m_1\left(1 - \frac{c\tau_2(t_к - t)}{r\tau_1}\right)$.

Ответ: $m_2 = m_1 - \Delta m = m_1\left(1 - \frac{c\tau_2(t_к - t)}{r\tau_1}\right) \approx 0{,}95$ кг.

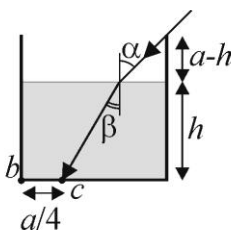
3. Гальванометр с неизвестным внутренним сопротивлением включили в цепь источника постоянного тока один раз последовательно с резистором сопротивлением $R = 10$ Ом, а второй раз параллельно с ним. При этом в первый раз стрелка гальванометра отклонилась на $X_1 = 2$ деления шкалы, а во второй раз на $X_2 = 4$ деления. Определите по этим данным внутреннее сопротивление гальванометра r, если напряжение на клеммах источника в обоих случаях одно и то же.

Решение. Отклонения стрелки гальванометра X в обоих случаях пропорциональны силе тока I, протекающего по прибору. Применяя закон Ома для соответствующих однородных участков цепи, нетрудно найти, что $I_1 = \frac{U}{R + r}$, а $I_2 = \frac{U}{r}$, где U – напряжение на клеммах источника. Отношение этих показаний прибора равно $\frac{X_2}{X_1} = \frac{R + r}{r}$. Отсюда уже легко выразить искомую величину $r = \frac{X_1}{X_2 - X_1}R$. **Ответ:** $r = \frac{X_1}{X_2 - X_1}R = 10$ Ом.



4. Непрозрачный сосуд имеет форму куба с длиной ребра $a = 50$ см. Внутрь сосуда параллельно одной из его боковых граней направляют луч света, как показано на рисунке. Луч попадает в точку b, находящуюся на ребре куба. До какого уровня h необходимо заполнить сосуд водой, чтобы луч света попал в точку c, расположенную на дне сосуда на расстоянии $a/4$ от точки b. Показатель преломления воды $n = 1{,}33$.

Решение. Поскольку сосуд имеет форму куба, угол падения луча на поверхность воды $\alpha = 45°$. Для того чтобы луч попал в точку *c*, должно выполняться равенство $h \cdot \text{tg}\,\beta + a - h = a - a/4$.



Отсюда $h = \dfrac{a}{4(1-\text{tg}\,\beta)}$. По закону преломления света: $\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n$. Тогда $\text{tg}\,\beta = \dfrac{\sin\beta}{\sqrt{1-\sin^2\beta}} = \dfrac{\sin\alpha}{\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha}}$. Следовательно, $h = \dfrac{a\sqrt{n^2-\sin^2\alpha}}{4(\sqrt{n^2-\sin^2\alpha}-\sin\alpha)}$.

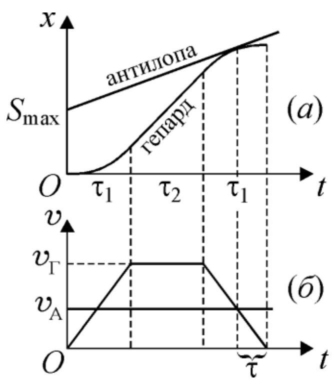
Учитывая, что $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, получаем окончательно, что $h = \dfrac{a\sqrt{n^2-0{,}5}}{4\sqrt{n^2-0{,}5}-2\sqrt{2}}$.

Ответ: $h = \dfrac{a\sqrt{n^2-0{,}5}}{4\sqrt{n^2-0{,}5}-2\sqrt{2}} \approx 34$ см.

Задание для 9-х классов

1. Гепард, заметив антилопу, убегающую от него со скоростью $v_{\text{А}} = 20$ м/с, начинает ее преследовать. Разгоняясь равноускоренно, он за $\tau_1 = 4$ с развивает скорость $v_{\Gamma} = 30$ м/с, с которой бежит в течение $\tau_2 = 10$ с. Затем, почувствовав перегрев своего тела, гепард прекращает преследование, останавливаясь с тем же по модулю ускорением, что и при разгоне. На каком максимальном расстоянии $S_{\max}$ должны находиться друг от друга в начальный момент эти животные, чтобы гепард смог полакомиться пойманной антилопой?
Замечание. Вследствие отсутствия потовых желез на теле и плохого отвода теплоты через шкуру гепард не может развивать максимальную скорость (примерно 110 км/час) в течение длительного времени без опасного для его организма перегрева.

Решение. Поместим начало системы координат в точку старта гепарда, а координатную ось *OX* направим вдоль прямой, по которой движутся животные. На рисунке изображены графики зависимости координат (рис. *а*) и скоростей (рис. *б*) гепарда и антилопы от времени.

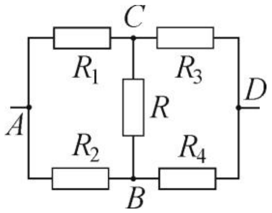


Из рис. *а* видно, что гепард догонит антилопу, если расстояние между животными в момент начала погони не превышает $S_{\max}$. В свою очередь, $S_{\max}$ находится из условия, что в тот момент, когда гепард догоняет антилопу, одновременно с равенством координат животных достигается и равенство их скоростей (если в этот момент гепард не схватил антилопу, то в последующем он будет от нее отставать).
Из рис. *б* видно, что время T движения животных до момента, когда их скорости сравняются, равно: $T = \tau_1 + \tau_2 + (\tau_1 - \tau)$. При этом входящий в это выражение промежуток времени τ может быть найден из отношения: $\dfrac{v_\Gamma}{\tau_1} = \dfrac{v_\text{А}}{\tau}$, которое следует из подобия треугольников на графиках $v = v(t)$. Отсюда $\tau = \dfrac{v_\text{А}}{v_\Gamma}\tau_1$. Пути, пройденные гепардом и антилопой за время T, равны: $S_\Gamma = v_\Gamma(\tau_1+\tau_2) - \dfrac{1}{2}v_\text{А}\tau$, $S_\text{А} = v_\text{А}(2\tau_1 + \tau_2 - \tau)$. Начальное расстояние между гепардом и антилопой равно разности их путей: $S_{\max} = S_\Gamma - S_\text{А}$.

Ответ: $S_{\max} = v_\Gamma(\tau_1+\tau_2) - v_\text{А}(2\tau_1+\tau_2) + \dfrac{1}{2}\dfrac{v_\text{А}^2}{v_\Gamma}\tau_1 \approx 86{,}7$ м.

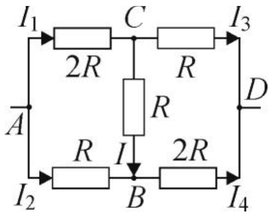
2. В калориметр с водой, имеющей температуру $t_1 = 8$ °С, помещают кусок льда, причем масса льда равна массе воды. После установления теплового равновесия оказалось, что отношение массы льда к массе воды равно $k = 8/7$. Пренебрегая теплообменом калориметра с окружающей средой, определите начальную температуру t_2 льда. Удельные теплоёмкости льда и воды считайте равными $c_л = 2{,}1$ кДж/(кг·°С) и $c_в = 4{,}2$ кДж/(кг·°С), соответственно, удельную теплоту плавления льда – $\lambda = 0{,}33$ МДж/кг, а температуру плавления льда $t_0 = 0$ °С. Ответ приведите в градусах Цельсия.

Решение. Пусть m – первоначальная масса воды, равная первоначальной массе льда. Если m_1 – масса кристаллизовавшейся воды, то после установления теплового равновесия полная масса льда будет $m_л = m + m_1$, а масса оставшейся воды $m_в = m - m_1$. По условию $\dfrac{m+m_1}{m-m_1} = k$, откуда $m_1 = m\dfrac{k-1}{k+1}$. Согласно уравнению теплового баланса, $mc_в(t_0 - t_1) + mc_л(t_0 - t_2) - m_1\lambda = 0$. Отсюда $t_2 = \dfrac{(c_в + c_л)t_0 - c_в t_1 - \lambda(k-1)/(k+1)}{c_л}$. **Ответ:** $t_2 = \dfrac{(c_в + c_л)t_0 - c_в t_1 - \lambda(k-1)/(k+1)}{c_л} \approx -26{,}5\,°\text{C}$.



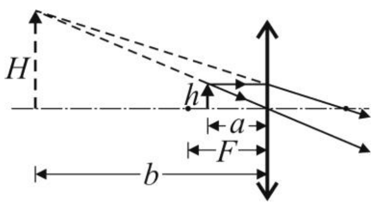
3. Электрическая цепь, схема которой изображена на рисунке, подключена к источнику постоянного напряжения в точках A и D. Известно, что сила тока через резистор R_2 равна $I_2 = 0{,}6$ А. Пренебрегая сопротивлением проводов, определите силу тока I_1, текущего через резистор R_1. Считайте, что $R_1 = R_4 = 2R$, $R_2 = R_3 = R$, где $R = 1$ Ом.

Решение. На рисунке указаны токи, текущие через резисторы. Из этого рисунка, соотношения между величинами сопротивлений и соображений симметрии следует, что $I_1 = I_4$, $I_2 = I_3$. Для узла C справедливо равенство $I_3 = I_1 - I$, или $I_1 = I_2 + I$. По закону Ома $U_{AB} = I_2 R$, $U_{AC} = I_1 2R$, $U_{CB} = IR$. Кроме того, $U_{AB} = U_{AC} + U_{CB}$. Из записанных равенств находим, что $I_1 = \dfrac{2}{3} I_2$. **Ответ:** $I_1 = \dfrac{2}{3} I_2 = 0{,}4$ А.



4. С помощью тонкой собирающей линзы получено мнимое изображение предмета с увеличением $\Gamma_1 = 20$. Когда, не двигая линзу, сместили предмет параллельно самому себе на расстояние $\Delta a = 4$ мм, увеличение изображения предмета стало равным $\Gamma_2 = 25$. Найдите оптическую силу линзы D.

Решение. Увеличение изображения предмета Г, определяемое как отношение поперечного размера изображения H к поперечному размеру предмета h (см. рисунок), равно $\Gamma = \dfrac{b}{a}$. С учетом того, что изображение мнимое, по формуле тонкой линзы имеем $\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b} = \dfrac{1}{F}$, откуда $b = \dfrac{aF}{F-a}$. Следовательно, $\Gamma = \dfrac{F}{F-a}$. По условию задачи $\Gamma_1 = \dfrac{F}{F-a_1}$, $\Gamma_2 = \dfrac{F}{F-a_2}$, $a_2 - a_1 = \Delta a$. Исключая из этих соотношений a_1 и a_2, получаем, что $D = \dfrac{1}{F} = \dfrac{\Gamma_2 - \Gamma_1}{\Delta a \cdot \Gamma_1 \cdot \Gamma_2}$. **Ответ:** $D = \dfrac{\Gamma_2 - \Gamma_1}{\Delta a \cdot \Gamma_1 \cdot \Gamma_2} = 2{,}5$ дптр.



Вариант задания для 10-х – 11-х классов

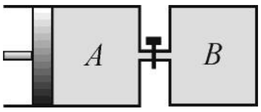
1. Задача. Вертолёт Ми-171 массой $m = 7 \cdot 10^3$ кг неподвижно завис над поверхностью Земли. Какую мощность N развивает при этом его двигатель, если диаметр винта вертолёта $d = 20$ м. Считайте, что доля мощности двигателя, расходуемая на образование вертикальной струи воздуха, составляет η = 80% от его полной мощности, а скорость воздуха в этой струе примерно одинакова по всему ее сечению. Плотность воздуха ρ = 1,3 кг/м^3. Ускорение свободного падения примите равным g = 10 м/с^2.

Вопросы. Сформулируйте второй и третий законы Ньютона.

Решение. Масса отбрасываемого за время Δt винтом вертолёта воздуха равна $\Delta m = \frac{\rho v \Delta t \cdot \pi d^2}{4}$, где v – скорость струи воздуха от винта. Импульс, переданный воздуху за это время, $\Delta p = \Delta m \cdot v = \frac{\rho v^2 \Delta t \cdot \pi d^2}{4}$. Подъёмная сила, действующая на вертолёт, $F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{\rho v^2 \pi d^2}{4}$. Поскольку вертолёт неподвижен, $F = mg$, откуда получаем, что $v = \sqrt{\frac{4mg}{\pi \rho d^2}}$. Энергия, передаваемая воздуху за время Δt, равна $\Delta E = \frac{\Delta m v^2}{2} = \frac{\pi \rho v^3 d^2 \Delta t}{8}$. Мощность, развиваемая двигателем вертолёта, $N = \frac{\Delta E}{\eta \Delta t} = \frac{\pi \rho v^3 d^2}{8\eta} = \frac{mg}{d\eta}\sqrt{\frac{mg}{\pi\rho}}$.

Ответ: $N = \frac{100\%}{\eta} \cdot \frac{mg}{d}\sqrt{\frac{mg}{\pi\rho}} \approx 573$ кВт.

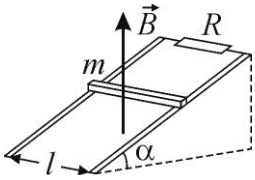
2. Задача. Цилиндр A соединён с сосудом B короткой трубкой с краном. В исходном состоянии в сосуде и в цилиндре справа от поршня находились равные количества гелия при одинаковой температуре и давлении $p_0 = 1$ атм. Закрыв кран, объём гелия в цилиндре изобарно уменьшили в $n = 3$ раза, а гелий в сосуде нагрели так, что его давление возросло в $k = 3$ раза. Затем, зафиксировав положение поршня, открыли кран. Пренебрегая объемом трубки и теплообменом гелия с окружающими телами, определите установившееся давление p в сосуде. Ответ выразите в атмосферах.



Вопросы. Запишите уравнение Менделеева−Клапейрона (уравнение состояния идеального газа). Какими уравнениями описываются изотермический, изобарный и изохорный процессы?

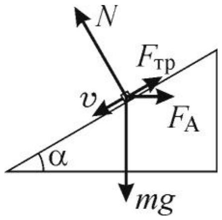
Решение. Согласно уравнению Менделеева–Клапейрона абсолютная температура T_0, объём V_0 и число молей гелия в сосуде ν удовлетворяют соотношению: $p_0 V_0 = \nu R T_0$, где R – универсальная газовая постоянная. После закрытия крана согласно закону Гей-Люссака температура в цилиндре понизится до $T_A = \frac{T_0}{n}$, а согласно закону Шарля температура в сосуде станет равной $T_B = kT_0$. После открывания крана внутренняя энергия гелия не изменяется, т.е. $\frac{3}{2}\nu R(T_A + T_B) = \frac{3}{2} 2\nu RT$, где T – установившаяся температура, причём $pV_0\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 2\nu RT$. Из записанных выражений получаем, что $p = p_0 \frac{kn+1}{n+1}$. **Ответ:** $p = p_0 \frac{kn+1}{n+1} = 2{,}5$ атм.

3. Задача. По двум проводящим длинным шинам, установленным под углом $\alpha = 30°$ к горизонту, поступательно соскальзывает расположенный перпендикулярно шинам медный брусок массой m = 100 г (см. рисунок). Вся система находится в однородном вертикальном магнитном поле, модуль индукции которого равен B = 0,1 Тл. Сверху шины замкнуты на резистор сопротивлением R = 0,1 Ом. Коэффициент трения между поверхностями шин и бруска равен $\mu = 0,5$, а расстояние между шинами l = 1 м. Пренебрегая сопротивлением шин, бруска и мест контакта между ними, найдите тепловую мощность N, выделяющуюся в резисторе при движении бруска с установившейся скоростью. Ускорение свободного падения примите равным g = 10 м/с^2.



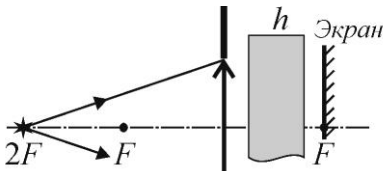
Вопросы. Сформулируйте закон электромагнитной индукции и правило Ленца.

Решение. Брусок движется по шинам под действием сил, модули и направления которых изображены на рисунке, где mg − модуль силы тяжести, N − модуль нормальной составляющей силы реакции шин, $F_А$ − модуль силы Ампера, $F_{тр}$ − модуль силы трения скольжения. На концах бруска возникает ЭДС индукции, обусловленная действием силы Лоренца на свободные заряды в движущемся проводнике, и по модулю равная $\mathcal{E} = Blv\cos\alpha$. По контуру, образованному шинами, бруском и резистором, начинает течь ток силой $I = \dfrac{\mathcal{E}}{R}$. В результате появляется сила Ампера, действующая на брусок, и по модулю равная $F_А = IBl$. Она нарастает до тех пор, пока скорость движения бруска не перестаёт увеличиваться, достигая значения $v_{уст.}$. Соответствующее уравнение движения имеет вид $0 = mg\sin\alpha - \mu(mg\cos\alpha + F_А\sin\alpha) - F_А\cos\alpha$. Сила протекающего в контуре тока равна при этом $I = \dfrac{Blv_{уст}\cos\alpha}{R}$, а сила Ампера: $F_А = \dfrac{B^2l^2v_{уст}\cos\alpha}{R}$. Подставляя полученное выражение для силы Ампера в уравнение движения, найдем установившуюся скорость движения бруска: $v_{уст} = \dfrac{mgR}{B^2l^2\cos\alpha}\cdot\dfrac{(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)}{(\cos\alpha + \mu\sin\alpha)}$. Используя это выражение, находим, что сила тока в контуре $I = \dfrac{mg}{Bl}\cdot\dfrac{(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)}{(\cos\alpha + \mu\sin\alpha)}$. Тепловая мощность, выделяющаяся в резисторе, по закону Джоуля−Ленца равна $N = I^2R = \left[\dfrac{mg}{Bl}\cdot\dfrac{(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)}{(\cos\alpha + \mu\sin\alpha)}\right]^2 R$.



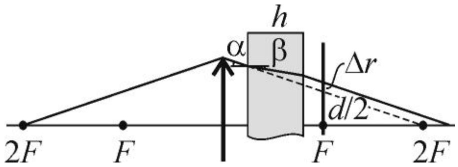
Ответ: $N = \left[\dfrac{mg}{Bl}\cdot\dfrac{(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)}{(\cos + \mu\sin\alpha)}\right]^2 R \approx 0,036$ Вт ≈ 36 мВт.

4. Задача. Тонкая собирающая линза плотно вставлена в круглое отверстие в непрозрачной ширме. Точечный источник света располагается на главной оптической оси на удвоенном фокусном расстоянии от нее. При этом на экране, установленном в фокальной плоскости по другую сторону от линзы перпендикулярно ее главной оптической оси, наблюдается светлое пятно диаметра d = 1 см. Каким станет диаметр d_1 светлого пятна на экране, если между ним и линзой поместить плоскопараллельную стеклянную пластинку толщиной h = 2 см с показателем преломления n = 2? Фокусное расстояние линзы F = 10 см. Учтите, что для малых значений аргумента x, заданного в радианах, справедливы приближенные формулы $\sin x \approx \mathrm{tg}\, x \approx x$.



Вопросы. Какие линзы называют тонкими? Что такое фокусное расстояние и оптическая сила тонкой линзы?

Решение. Ход одного из крайних лучей, ограничивающих световое пятно на экране, изображен на рисунке. В отсутствие пластинки ход луча показан штриховой линией, а при наличии пластинки − сплошной. Видно, что преломление света на боковых поверхностях пластинки приводит к тому, что луч смещается параллельно самому себе на некоторое расстояние, что вызывает изменение размеров светлого пятна на экране.



Как следует из рисунка, $\Delta r = h(\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta)$, где α и β − углы падения и преломления на левой поверхности пластинки, причем $\operatorname{tg}\alpha = \frac{d}{2F}$. По условию $\frac{d}{2F} = 0{,}05 << 1$, поэтому справедливы приближенные формулы $\operatorname{tg}\alpha \approx \alpha$, $\operatorname{tg}\beta \approx \beta$. Кроме того, $\sin\alpha \approx \alpha$, $\sin\beta \approx \beta$ и закон преломления на гранях пластинки принимает вид $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} \approx \frac{\alpha}{\beta} \approx n$. Из записанных равенств следует, что $\Delta r \approx \frac{dh}{2F} \cdot \frac{n-1}{n}$. Учитывая, что $d_1 = d + 2\Delta r$, получаем окончательно, что $d_1 = d\left(1 + \frac{h}{F} \cdot \frac{n-1}{n}\right)$. **Ответ:** $d_1 = d\left(1 + \frac{h}{F} \cdot \frac{n-1}{n}\right)$=1,1 см.