РАДИОФИЗИКА

УДК 519.246; 524

НЕПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ АПРИОРНОЙ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ ПРИ ОБРАБОТКЕ ВЫХОДНОГО СИГНАЛА РЕЗОНАНСНЫХ ГРАВИТАЦИОННЫХ АНТЕНН (РЕЖИМ МЕДЛЕННОЙ ФИЛЬТРАЦИИ)

А. В. Гусев

(*ГАИШ*)

E-mail: avg@sai.msu.ru

В рамках непараметрической модели априорной неопределенности (небайесовский подход) рассматриваются особенности амплитудно-частотного подавления негауссовых помех на выходе резонансных гравитационных антенн в режиме медленной фильтрации (slow filtering).

1. При обобщенном анализе криогенные резонансные гравитационные антенны (РГА) можно рассматривать как линейные системы с двумя степенями свободы. Случайный процесс на выходе линейного тракта РГА представляет суперпозицию двух квазигармонических колебаний с резонансными частотами ω_1 и ω_2, $\omega_{1,2}/(2\pi) \approx 10^3$ Гц. Частота биений $\omega_b = (\omega_2 - \omega_1)/2$ значительно превышает ширину спектров отдельных колебаний, что позволяет в режиме медленной фильтрации (slow filtering) [1] осуществить *раздельную* по модам первичную обработку выходного сигнала РГА по следующей оптимальной для гауссовых помех схеме ОФ–КДО, где ОФ — оптимальный (по критерию сигнал–шум) фильтр, КДО — квадратичный детектор огибающей. Резонансные частоты ОФ совпадают с собственными частотами ω_1 и ω_2 механической системы. Информация о поведении векторного случайного процесса $\mathbf{E}(t) = [E_1(t) = R_1^2(t) E_2(t) = R_2^2(t)]^{\mathrm{T}}$, где $R_1(t)$ и $R_2(t)$ — огибающие узкополосных процессов на выходах отдельных ОФ, сохраняется в банке данных и может быть использована при дальнейшем анализе.

В предлагаемой работе рассматривается амплитудно-частотный алгоритм [2] подавления негауссовых помех в режиме медленной фильтрации при обнаружении слабых гравитационных импульсов со случайными начальными фазами. Статистические (вероятностные) свойства негауссовых помех считаются полностью неизвестными (непараметрическая модель априорной неопределенности).

Амплитудно-частотный алгоритм подавления коррелированной негауссовой помехи при обнаружении слабого полезного сигнала приводит к следующей схеме обработки информации: $\mathbf{E}(t)$ + БНП + ОФ, где БНП — безынерционный нелинейный преобразователь. Характеристика БНП выбирается в соответствии с критерием сигнал–шум. Наличие в схеме ОФ обеспечивает увеличение отношения сигнал–шум за счет дополнительного «частотного сжатия» аддитивной помехи на выходе БНП [2].

Применение алгоритма БНП–ОФ для обработки выходного сигнала РГА в режиме медленной фильтрации предполагает известной совместную плотность вероятности $W_2(E_1, E_2)$ случайных процессов $E_1(t)$ и $E_2(t)$ в совпадающие моменты времени [3]. При непараметрической модели априорной неопределенности распределение этих случайных процессов считается неизвестным. Для преодоления априорных ограничений воспользуемся небайесовским подходом, основанном на применении критерия максимального правдоподобия.

2. В одночастотном приближении узкополосный процесс $y(t) = y_1(t) \cup y_2(t)$ на выходе ОФ в отдельной моде можно представить в виде суперпозиции

$$y(t) = \lambda s(t) + \xi(t) + n(t)$$

слабого полезного сигнала $s(t)$ со случайной начальной фазой и аддитивных гауссовой $n(t)$ и негауссовой $\xi(t)$ помех, $\lambda = (0, 1)$ — параметр обнаружения.

Можно показать [4], что плотность вероятности случайного процесса $E(t) = E_1(t) \cup E_2(t)$ определяется следующим выражением:

$$W(E) = W_E(E) + \lambda a^2 \frac{d}{dE}\left[E \frac{dW_E(E)}{dE}\right] + o(a^2),$$

где $W_E(E)$ — плотность вероятности случайного процесса $E(t)$ в состоянии $\lambda = 0$, $a = a(t)$ — огибающая слабого полезного сигнала $s(t)$.

Пусть $W_{\mathrm{pr}}(Q')$ — априорное распределение квадрата $Q = Q(t)$ огибающей узкополосного случайного процесса $\xi(t)$, $\sigma^2 = \langle n^2(t) \rangle$ — дисперсия гауссовой помехи $n(t)$, $\langle \cdot \rangle$ — символическая форма записи оператора статистического усреднения. Тогда

$$W_E(E) = \langle W(E, Q) \rangle_Q = \int_0^\infty W(E, Q') W_{\mathrm{pr}}(Q')\, dQ',$$

где

$$W(E,Q)=\frac{1}{2\sigma^2}\exp\left\{-\frac{E+Q}{2\sigma^2}\right\}I_0\left(\frac{\sqrt{QE}}{\sigma^2}\right)$$

— распределение Рэлея–Райса, $I_k(\cdot)$ — модифицированная функция Бесселя k-го порядка, $k=0,\pm1,\pm2,\ldots$.

В непараметрической модели априорной неопределенности неизвестный параметр Q считается неслучайным: $W_{\text{pr}}(Q')=\delta(Q'-Q)$ и, следовательно, $W_E(E)=W(E,Q)$,

$$W(E)\approx W(E,Q)+\lambda a^2\Psi(E,Q),$$

$$\Psi(E,Q)=\frac{\partial}{\partial E}\left[E\frac{\partial W(E,Q)}{\partial E}\right].$$

Пусть

$$\gamma(E,Q)=\frac{\partial\ln W(E,Q)}{\partial E}=-\frac{1}{2\sigma^2}+\frac{d\ln I_0(z)}{dz}\,\frac{\partial z}{\partial E} \tag{1}$$

— логарифмическая производная, $z=\sqrt{QE}/\sigma^2$. Тогда

$$\Psi(E,Q)=W(E,Q)\times \\ \times\left\{\gamma(E,Q)+E\left[\frac{\partial\gamma(E,Q)}{\partial E}+\gamma^2(E,Q)\right]\right\}. \tag{2}$$

Из (1) и (2), учитывая, что

$$\frac{dI_0(z)}{dz}=I_1(z),\quad \frac{dI_1(z)}{dz}=I_0(z)-\frac{1}{z}I_1(z),$$

находим

$$\Psi(E,Q)=W(E,Q)\Psi_0(E,Q).$$

Здесь

$$\Psi_0(E,Q)=\left(\frac{1}{2\sigma^2}\right)^2\left[E+Q-2\sigma^2-2\sqrt{QE}\,\frac{I_1(z)}{I_0(z)}\right]. \tag{3}$$

3. При вычислении оптимальной (по критерию сигнал–шум) характеристики $f[\cdot]$ БНП в схеме БНП–ОФ (см. выше) будем предполагать, что в состоянии $\lambda=0$ среднее значение случайного процесса $f[E(t)]$ равно нулю [2]:

$$\langle f[E]|\lambda=0\rangle=\int_0^\infty f[E]W(E,Q)\,dE=0. \tag{4}$$

Учитывая (4), находим отношение сигнал–шум ρ на выходе БНП

$$\rho=\frac{1}{\sigma_f}\left|\langle f[E]|\lambda=1\rangle\right|=\frac{a^2}{\sigma_f}\left|\int_0^\infty f[E]\Psi(E,Q)\,dE\right|. \tag{5}$$

При слабом сигнале различием дисперсий в классах $\lambda=0$ и $\lambda=1$ можно пренебречь и, следовательно,

$$\sigma_f^2\approx\langle f^2[E]|\lambda=0\rangle=\int_0^\infty f^2[E]W(E,Q)\,dE. \tag{6}$$

Из (5), (6), воспользовавшись неравенством Коши–Буняковского, имеем

$$\rho\leqslant\rho_{\max}=\sqrt{\int_0^\infty\Psi_0^2(E,Q)W(E,Q)\,dE},$$

где функция $\Psi_0(E,Q)$ определяется выражением (3).

Отношение сигнал–шум ρ достигает максимальной величины $\rho_{\max}$ при оптимальной характеристике БНП:

$$\rho=\rho_{\max}:\ f[E]=f_{\text{opt}}[E]\propto\Psi_0(E,Q). \tag{7}$$

Оптимальная характеристика БНП (7) зависит от неизвестного, но неслучайного при непараметрической модели априорной неопределенности параметра $Q=Q(t)$. Для преодоления априорных ограничений воспользуемся обобщенным критерием максимального правдоподобия [5], в соответствии с которым неизвестный параметр Q заменяется максимально-правдоподобной оценкой $\hat{Q}=\hat{Q}(E)$ (небайесовский подход). Пренебрегая влиянием слабого полезного сигнала [5], в «нулевом» приближении имеем

$$\hat{Q}\approx\hat{Q}_0,\quad \hat{Q}_0=\hat{Q}_{\lambda=0}(E)$$

— максимально-правдоподобная оценка неизвестного параметра Q в классе $\lambda=0$. В этом классе уравнение максимального правдоподобия имеет следующий вид:

$$W'_Q(E,Q)=0$$

и, следовательно,

$$\sqrt{\hat{Q}_0}=\sqrt{E}\,\frac{I_1(\hat{z}_0)}{I_0(\hat{z}_0)}, \tag{8}$$

где $\hat{z}_0=\hat{z}_0(E,\hat{Q}_0)=\sqrt{\hat{Q}_0E}/\sigma^2$.

Из (3), (7) и (8) находим оптимальную характеристику БНП при непараметрической модели априорной неопределенности

$$f_{\text{opt}}[E]\propto\Psi_0(E,\hat{Q}_0)\propto\left[E-\hat{Q}_0(E)-2\sigma^2\right]. \tag{9}$$

4. Пусть $G=G(t)$ — квадрат огибающей узкополосной гауссовой помехи $n(t)$. Тогда

$$\lambda=0:\ E=Q+2\sqrt{QG}\cos\Delta+G,$$

где $\Delta=\Delta(t)$ — разность фаз между гауссовой и негауссовой помехами. Следовательно, учитывая, что фаза стационарного узкополосного случайного процесса статистически не зависит от огибающей и равномерно распределена на интервале $(0,2\pi)$ [6], условную плотность вероятности $W(E|Q,G)$ можем представить следующим образом:

$$W(E|Q,G) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \delta(E - Q - G - 2\sqrt{QG}\cos\Delta)\,d\Delta. \tag{10}$$

Из теории дельта-функции известно, что

$$\delta[\mu(x)] = \sum_k \frac{\delta(x - x_k)}{|\mu'(x_k)|}, \tag{11}$$

где x_k — корни алгебраического уравнения $\mu(x) = 0$.

Принимая во внимание (10) и (11), получим

$$W(E|Q,G) = \frac{1}{\pi\sqrt{(E - E_{\min})(E_{\max} - E)}},$$
$$E_{\min} \leqslant E \leqslant E_{\max},$$

где $E_{\min,\max} = Q + G \mp 2\sqrt{QE}$.

Оптимальная по критерию минимума среднеквадратической ошибки оценка $\hat{G}$ траектории случайного процесса Q при однократных отсчетах определяется следующим выражением [7]:

$$\hat{G} = \int_0^\infty GW_{\text{ps}}(G)\,dG, \;\; W_{\text{ps}}(G) = gW_{\text{pr}}(G)W(E|Q,G),$$

$$W_{\text{pr}}(G) = \frac{1}{2\sigma^2}\exp\left\{-\frac{G}{2\sigma^2}\right\}, \;\; G \geqslant 0 \tag{12}$$

— апостериорная и априорная плотности вероятности, $g = [W(E,Q)]^{-1}$ — нормировочный коэффициент.

Интеграл в (12) вычисляется путем замены переменных

$$\tilde{G} = G - (Q + E), \;\; \tilde{G} \in [-2\sqrt{QE}, 2\sqrt{QE}].$$

Учитывая, что

$$\int_{-1}^{1} \frac{\exp\{-px\}}{\sqrt{1 - x^2}}dx = \pi I_0(p), \;\; p \geqslant 0,$$

имеем

$$\hat{G} = Q + E - 2\sqrt{QE}\,\frac{I_1(z)}{I_0(z)} \propto \Psi_0(E,Q) + \text{const}\,.$$

При небайесовском подходе неизвестный параметр Q в состоянии $\lambda = 0$ заменяется максимально-правдоподобной оценкой $\hat{Q}_0(E)$. Тогда, принимая во внимание (8), окончательно получим

$$\lambda = 0\colon\;\; \hat{G}(E) = E - \hat{Q}_0(E). \tag{13}$$

Выражения (9) и (13) устанавливают связь между нелинейной фильтрацией слабого полезного сигнала по критерию сигнал–шум и восстановлением траектории случайного процесса $G(t)$ при однократных отсчетах.

Основные результаты и выводы

А. При непараметрической модели априорной неопределенности негауссова помеха на выходе РГА рассматривается как узкополосный процесс с неизвестной, но неслучайной амплитудой. Так как гауссовы помехи в отдельных модах считаются статистически независимыми, подобный небайесовский подход приводит к раздельной обработке случайных процессов $E_1(t)$ и $E_2(t)$ при нелинейных безынерционных преобразованиях. Характеристики БНП в отдельных каналах определяются выражением (9). Зависимость $\hat{Q}_0(E)$ приведена в работе [4]. Дисперсии σ_i^2, $i = 1, 2$ определяются минимальной шумовой температурой РГА $T_{\text{eff},\,i}$, зависящей от интенсивности естественных гауссовых помех в системе:

$$2\sigma_i^2 = \langle E_i|\lambda = 0\rangle = T_{\text{eff},\,i}.$$

В теории РГА параметр T_{eff} предполагается известным [1].

Так как

$$I_0(z) \approx \varepsilon I_1(z) \approx \frac{\exp\{z\}}{\sqrt{2\pi z}}, \;\; z \gg 1,$$

то при сильных негауссовых возмущениях фона БНП можно рассматривать как сглаженный «амплитудный» ограничитель.

Б. Применение БНП с оптимальной характеристикой (9) обеспечивает восстановление траектории квадрата огибающей $G(t)$ узкополосного гауссова случайного процесса $n(t)$ (при одиночных отсчетах), которая затем используется для компенсации негауссовых возмущений с неизвестными (априори) вероятностными свойствами. Таким образом, рассматриваемый алгоритм обработки информации относится к классу «оценочно-компенсационных» алгоритмов обнаружения полезного сигнала на фоне негауссовой помехи [5] в рамках непараметрической модели априорной неопределенности.

В. При амплитудно-частотном подавлении коррелированного негауссового шума по схеме БНП + ОФ предполагается, что среднее значение помехи на выходе БНП в классе $\lambda = 0$ равно нулю. Для непараметрической модели априорной неопределенности среднее значение помехи на выходе БНП с оптимальной характеристикой (9) при нулевой гипотезе оказывается пропорциональным смещению максимально-правдоподобной оценки

$$b(Q) = \left\langle \left[Q - \hat{Q}_0(E)\right] \Big| \lambda = 0 \right\rangle.$$

Однако, учитывая, что максимально-правдоподобные оценки оказываются асимптотически несмещенными [7], имеем

$$\lim_{Q\to\infty} \langle f_{\text{opt}}[E]|\lambda = 0\rangle = 0.$$

Г. Синтез расположенной на выходе оптимальной по критерию сигнал–шум линейной системы при использовании непараметрической модели априорной неопределенности требует дополнительного исследования. При стационарных шумах в системе (период стационарности действующих РГА $T_0 \approx 2$ ч) аддитивная помеха на выходе БНП может рассматриваться как стационарный случайный процесс с неизвестными спектральной плотностью и средним значением (см. выше).

Статистическая зависимость негауссовых помех в режиме медленной фильтрации в рамках непараметрической модели априорной неопределенности может оказать влияние на структуру двухканального ОФ [5].

Литература

1. *Astone P., Buttiglione S., Frasca S.* et al. // Nuovo Cimento. **20C**, N 1. P. 9.
2. *Акимов П.С., Бакут П.А., Богданович В.А.* и др. Теория обнаружения сигналов. М., 1984.
3. *Гусев А.В.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2001. №6. С. 41 (Moscow University Phys. Bull. 2001. N 6. P. 51).
4. *Гусев А.В., Виноградов М.П., Милюков В.К.* // Радиотехника и электроника. 2000. №4. С. 91.
5. *Сосулин Ю.Г.* Теоретические основы радиолокации и радионавигации. М., 1992.
6. *Тихонов В.И.* Статистическая радиотехника. М., 1982.
7. *Куликов О.Е, Трифонов А.П.* Оценка параметров сигналов на фоне помех. М., 1978.

Поступила в редакцию
08.04.05